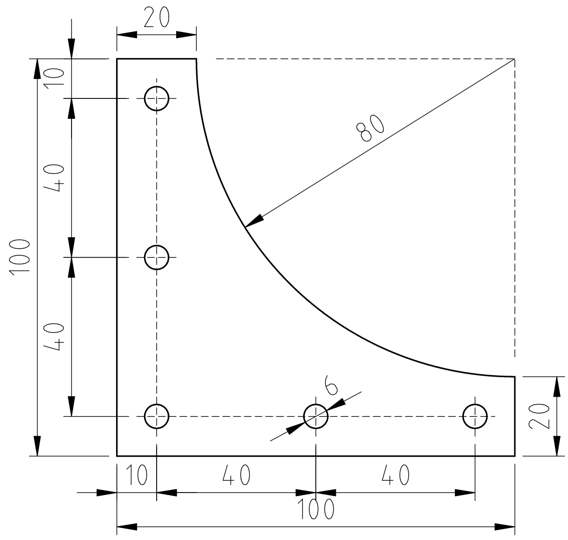
Übungen zur Vorlesung Physik für Ingenieure I (M7.1)
Prof. Dr. L. Kipp, WS 2009/10
Blatt 1 – zu bearbeiten bis zum 03.11.2009

Aus einem Stahlblech von 1 cm Dicke wurde nach dieser Zeichnung ein Werkstück ausgefräst und mit fünf Bohrungen versehen. Die Dichte von Stahl ist $\varrho = 7,86\,\mathrm{g/cm^3}$. Die Bemaßung ist in Millimetern:



1. Die Masse eines Körpers ergibt sich aus dem nullten Moment der Masseverteilung $\varrho(\vec{r})$

$$M = \int_V \varrho(\vec{r})\mathrm{d}V \tag{1}$$

Die Integration erstreckt sich über das Volumen $\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Im hier vorliegenden Fall eines Werkstücks konstanter Dichte ergibt sich vereinfachend das Produkt aus Dichte und Volumen des Werkstücks.

$$M = \varrho V \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Masse des Werkstücks

a) zunächst unter Vernachlässigung der Bohrungen,

b) unter Berücksichtigung der Bohrungen.

Hinweis: $\varrho(\vec{r}) = \varrho$ innerhalb des Werkstücks und $\varrho(\vec{r}) = 0$ außerhalb. Definieren sie ein geeignetes Koordinatensystem mit geeignetem Ursprung. Ein möglicher (wenn auch rechnerisch nicht der einfachste) Lösungsweg ist die Berechnung des Integrals

$$M = \varrho \int \mathrm{d}z \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x \; 1 \tag{3}$$

mit geeigneten Integrationsgrenzen, welche die Form des Werkstückes beschreiben. Die Integrationsgrenzen für eine Koordinate können von dem Wert einer anderen Koordinate abhängen. Das Integral wird in geeignete Teile zerlegt, die getrennt berechnet und addiert oder subtrahiert werden. Anschließend ziehen sie die Masse des ausgebohrten Materials ab.

Bitte wenden

2. Der Schwerpunkt ergibt sich aus dem ersten Moment der Masseverteilung

$$\vec{S} = \frac{1}{M} \int_V \varrho(\vec{r}) \vec{r} \mathrm{d}V \tag{4}$$

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Werkstücks

a) zunächst unter Vernachlässigung der Bohrungen,

b) unter Berücksichtigung der Bohrungen, wobei der Bohrdurchmesser als klein angesehen und vernachlässigt werden soll.

Hinweise: Analog zu Aufgabe 1 ergibt sich ein Integral mit geeigneten Integrationsgrenzen:

$$\vec{S} = \frac{\varrho}{M} \int \mathrm{d}z \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}x \; (x, y, z). \tag{5}$$

Die drei Komponenten des Schwerpunktvektors können einzeln berechnet werden. Dabei kann die Symmetrie des Problems zur Vereinfachung der Lösung herangezogen werden. Das Integral für die z-Komponente in karthesischen Koordinaten lautet zum Beispiel:

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{\varrho}{M} \int_0^H \mathrm{d}z \; z \left[\int_0^L \mathrm{d}y \int_0^L \mathrm{d}x - \int_0^R \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \right] && (6) \\ &= \frac{\varrho}{M} \frac{1}{2} H^2 \, A && (7) \\ &= \frac{\varrho V}{M} \frac{H}{2} && (8) \\ &= \frac{H}{2} && (9) \end{aligned}$$

mit der Höhe $H = 1\,\mathrm{cm}$, der Kantelänge $L = 10\,\mathrm{cm}$, dem Radius $R = 8\,\mathrm{cm}$ und der Fläche des Oberseite des Werkstücks A. Der Koordinatenursprung ist hier in der rechten oberen Ecke im Mittelpunkt des ausgefrästen Kreises, und die $x-$ b.z.w. y-Koordinaten laufen nach links und nach unten.

Aus der Formelsammlung, für Aufgabe 1:

$$\int \mathrm{d}x \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \tag{10}$$