Übungen zur Vorlesung Physik für Ingenieure II (M7.2)
Prof. Dr. L. Kipp, SS 2010
Blatt 15 – zu bearbeiten bis zum 18.05.2010

1. Der Zeiger eines Amperemeters mit Trägheitsmoment J ist an einer Torsionsfeder mit Federkonstante c aufgehängt. In der Ruhelage der Feder zeigt der Zeiger auf Null. Ein konstanter Strom I durch das Amperemeter bewirkt über eine Magnetspule ein dem Strom proportionales Drehmoment τ auf den Zeiger. Die Bewegung des Zeigers wird durch (nicht-turbulente) Reibung in der Luft gedämpft, mit Reibungskonstante k.

   Die Bewegung des Zeiger wird durch den Auslenkungswinkel φ und die Bewegungsgleichung
   $$J\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + c\varphi = \tau.$$
   beschrieben.

   a) Bestimmen sie alle Lösungen der Bewegungsgleichung. Es gibt drei Klassen von Lösungen, ja nach der relativen Grösse der Koeffizienten.

   b) Welche der drei Lösungsklassen wird bei der Konstruktion von Zeigerinstrumenten angestrebt.

Bitte wenden

Allgemeines Lösungsverfahren: Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung ist durch

$$\ddot{x} + f(t)\dot{x} + g(t)x = h(t) \tag{1}$$

gegeben, wobei $x(t)$, $f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ Funktionen von t sind. Ist $h(t) \equiv 0$, so ist sie *homogen*. Sind ferner $f(t) \equiv a$ und $g(t) \equiv b$ konstant (a und b unabhängig von t), also

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \tag{2}$$

so liegt eine *lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* vor. Für diesen speziellen Typus von Differentialgleichungen gibt es ein allgemeines Lösungsverfahren:

- Man führt den sogenannten e-Ansatz durch:

  $$x(t) = \exp(\lambda t). \tag{3}$$

  Dies ist noch nicht die endgültige Lösung!

- Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man damit als sogenannte *charakteristische Gleichung* ein Polynom in λ.

- Ihre zwei Lösungen (im Falle eine Differentialgleichung 2. Ordnung) λ_1 und λ_2 geben, wenn sie nicht gerade zusammenfallen, zwei *Fundamentallösungen* $x_1(t) = \exp(\lambda_1 t)$ und $x_2(t) = \exp(\lambda_2 t)$. Falls die charakteristische Gleichung nur eine reelle Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ hat, so erhält man die beiden Fundamentallösungen $x_1(t) = \exp(\lambda t)$ und $x_2(t) = t\exp(\lambda t)$.

- Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist dann als beliebige Linearkombination der Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gegeben:

  $$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t). \tag{4}$$

  Die Konstanten C_1 und C_2 können durch die *Anfangsbedingungen* (z.B. $x(t = 0)$ und $\dot{x}(t = 0)$) für ein spezielles Problem bestimmt werden, so daß eine *spezielle Lösung* $x(t)$ der Differentialgleichung gewonnen wird.

Allgemeines Lösungsverfahren: Lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Finden Sie irgendeine (einfache) Lösung $x_0(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung. Alle anderen Lösungen erhalten Sie durch Addition der Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

$$x(t) = x_0(t) + C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t). \tag{5}$$