

# Inhalt

## Artikel

Bewegung (Physik)	1
Kinematik	3
Koordinatensystem	6
Geschwindigkeit	10
Beschleunigung	17

## Referenzen

Quellen und Bearbeiter des Artikels	22
Quellen, Lizenzen und Autoren des Bildes	23

## Artikel Lizenzen

Lizenz	24
--------	----

# Bewegung (Physik)

---

Als **Bewegung** im physikalischen Sinne versteht man die Änderung des Ortes eines Beobachtungsobjektes mit der Zeit.

Die zwei Fachgebiete der Physik, die sich als *Bewegungslehre* mit der Bewegung befassen sind:

- die *Dynamik* als Kräftelehre der Bewegung
- die  $\rightarrow$  *Kinematik* als Bewegungslehre ohne Ursachenbetrachtung der Kräfte

## Bewegung und Bahn

Die Gesamtheit aller Orte, an denen sich ein punktförmiges Objekt bei seiner Bewegung befindet, nennt man *Bahnkurve* oder *Trajektorie*. Bahnkurven sind immer zusammenhängend und, sofern die Bewegung in keinem Punkt der Bahnkurve zum Stillstand kommt, auch glatt.

## Relativität der Bewegung

Die Beschreibung der Bewegung eines Beobachtungsobjektes hängt vom Beobachter ab. Eine Person auf dem Beifahrersitz eines fahrenden Autos scheint sich beispielsweise aus der Sicht eines Fußgängers am Fahrbahnrand zu bewegen, während sie aus Sicht des Fahrers zu ruhen scheint. Ein anderes Beispiel: Aus Sicht der Sonne bewegt sich der Autor dieses Textes mit hoher Geschwindigkeit auf einer annähernd kreisförmigen Bahn um die Sonne und bewegt sich gleichzeitig, ebenfalls mit hoher Geschwindigkeit, kreisförmig um die Erdachse. Aus Sicht des Lesers aber scheint der Autor still zu stehen.

## Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die  $\rightarrow$  Geschwindigkeit ist das Verhältnis der Länge eines kleinen Stückes der Bahnkurve zu der Zeit, die das Objekt braucht, um dieses Wegstück zurückzulegen. Die Geschwindigkeit hat eine Richtung, die der Bewegungsrichtung zum jeweiligen Zeitpunkt entspricht. Die Richtung entspricht also der Richtung der Bahnkurve.

Bei Fortschreiten auf der Bahnkurve kann die Geschwindigkeit einerseits ihren Betrag und andererseits ihre Richtung ändern. Das Verhältnis zwischen der Änderung des Geschwindigkeitsbetrag und der Zeit, in der sich die Geschwindigkeit um diesen Betrag ändert, heißt  $\rightarrow$  Tangentialbeschleunigung. Die Beschleunigung senkrecht zur Bahnkurve heißt  $\rightarrow$  Normalbeschleunigung und ergibt sich als das Verhältnis des Quadrates der Geschwindigkeit zum Krümmungsradius der Bahnkurve. Die Vektorsumme aus Tangentialbeschleunigung und Normalbeschleunigung ergibt den Beschleunigungsvektor.

## Spezielle Formen der Bewegung einzelner Objekte

### Geradlinig gleichförmige Bewegung

Von geradlinig gleichförmiger Bewegung spricht man, wenn die Bahnkurve ein Geradenabschnitt ist und die Geschwindigkeit an jedem Punkt der Bahn die gleiche ist. Eine geradlinig gleichförmige Bewegung liegt genau dann vor, wenn die Beschleunigung überall Null ist.

### Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung hat die  $\rightarrow$  Beschleunigung in jedem Punkt der Bahnkurve den gleichen Betrag und die gleiche Richtung. Die Bahnkurve einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist entweder ein Geradenabschnitt oder eine Parabel.

---

## Kreisbewegung

Bei einer Kreisbewegung ist die Bahnkurve kreisförmig. Wenn bei einer Kreisbewegung der Betrag der Geschwindigkeit überall gleich ist, dann ist die Tangentialbeschleunigung gleich Null und die Normalbeschleunigung zum Kreismittelpunkt gerichtet.

## Periodische Bewegung

Bei einer periodischen Bewegung kehrt das Beobachtungsobjekt nach einer gewissen Zeit, der Periodendauer, wieder an den Ausgangsort zurück und hat dabei die gleiche Richtung und die gleiche Geschwindigkeit. Periodische Bewegungen haben geschlossene Bahnkurven. Die Kreisbewegung ist ein Spezialfall einer periodischen Bewegung.

## Harmonische Schwingung

Ein weiteres Beispiel einer periodischen Bewegung ist die harmonische Schwingung, bei der die Veränderung des Ortes mit der Zeit einer Sinus-Funktion folgt. Ein klassisches Beispiel für einen harmonisch schwingenden Gegenstand ist ein Pendel. Allgemein schwingt jedes Objekt harmonisch, das geringfügig aus einer Gleichgewichtslage ausgelenkt wird. Durch Fourieranalyse lässt sich jede periodische Bewegung als Summe aus harmonischen Schwingungen darstellen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz, dem Kehrwert der Periodendauer, sind.

## Ergodische Bewegung

Bei einer ergodischen Bewegung liegt die Bahnkurve dicht in einer Fläche oder in einem Raumausschnitt.

## Bewegung im mikroskopischen Maßstab

Die Vorstellung von punktförmigen Teilchen, die sich mit wohldefinierten Geschwindigkeiten auf einer Bahnkurve bewegen, ist in Wahrheit ein Modell, das nur ab einer gewissen Größe des Maßstabes tragfähig ist. Das Modell der Bahnkurve versagt beispielsweise bei der Bewegung von Elektronen in einem Atom, von Leitungselektronen in einem Metall, von Protonen und Neutronen in einem Atomkern oder von Photonen.

Um die genannten Situationen zu analysieren, muss man zur exakteren Darstellung, der Quantenmechanik, übergehen, in der man physikalische Objekte durch eine Wellenfunktion beschreibt. Aus der Wellenfunktion kann man ableiten, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein Objekt an einem bestimmten Ort befindet oder eine bestimmte Geschwindigkeit hat. Die heisenbergsche Unschärferelation begrenzt dabei die Genauigkeit einer gleichzeitigen Messung von Ort und Geschwindigkeit; außerdem wirkt sich jede Messung auf die Wellenfunktion aus und verändert die zukünftige Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeiten.

## Mathematische Beschreibung von Bewegung

Mathematisch beschreibt man die Bewegung eines punktförmigen Objektes durch eine vektorwertige, stetig differenzierbare Funktion einer reellen Veränderlichen, wobei die Veränderliche mit der Zeit und der Funktionswert mit dem Ortsvektor des Objektes identifiziert wird. Die Geschwindigkeit ist dann die erste, die Beschleunigung die zweite Zeitableitung dieser Funktion.

## Bewegungsgleichungen

Eine Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung, deren Lösung die Bewegungsfunktion ist. Bewegungsgleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit. Durch die Festlegung von Ort und Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt als Anfangsbedingungen ist die weitere Zeitentwicklung eindeutig bestimmt.

## Chaotische Bewegung

Von einer chaotischen Bewegung spricht man, wenn die Bewegungsgleichung so beschaffen ist, dass kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen große Änderungen in der sich ergebenden Bewegung zur Folge haben.

## Bewegung mehrerer Objekte

### Statistische Betrachtung von Bewegung

Die Bewegungen einer großen Zahl unabhängiger Objekte (Ensemble) beschreibt man statistisch. Dabei betrachtet man alle Bewegungszustände des Ensembles, die mit den gemessenen Zustandsgrößen (z.B. Energie, Volumen und Teilchenzahl) verträglich sind, als gleich wahrscheinlich.

### Bewegung starrer Körper

Die Bewegung eines starren Körpers lässt sich in die Bewegung des Schwerpunktes und Drehbewegungen des Körpers um Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen, zerlegen.

### Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen

Die Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen folgt den Navier-Stokes-Gleichungen.

ckb: کبی زی ف (کی زی ف)

# Kinematik

---

Die **Kinematik** (gr.: *kinema*, Bewegung) ist die Lehre der → Bewegung von Punkten und Körpern im Raum, beschrieben durch die Größen Weg  $s$  (Änderung der Ortskoordinate), → Geschwindigkeit  $v$  und → Beschleunigung  $a$ , ohne die Ursachen einer Bewegung (Kräfte) zu betrachten.

Ihr Gegenstück ist die Dynamik, die sich mit der Bewegung von Körpern unter Einwirkung von Kräften beschäftigt. Kinematik und Dynamik sind Teilgebiete der Mechanik.

## Grundgleichungen

Die Position eines Punktes wird durch drei Koordinaten (Freiheitsgrade) im dreidimensionalen Raum definiert. Bei einem starren Körper kommen zu diesen drei Freiheitsgraden für die Position noch drei Freiheitsgrade für die Rotation (Drehungen im 3D-Raum) hinzu.

Die Grundgleichungen der Kinematik einer Punktmasse definieren die → Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  und die → Beschleunigung  $\vec{a}(t)$  als Ableitungen der Bahnkurve  $\vec{r}(t)$ , die der Ortsvektor im Laufe der Zeit  $t$  durchläuft:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t),$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}(t).$$

## Stoßvorgänge

Die Kinematik von Stoßvorgängen befasst sich mit den Einschränkungen, die sich aus Impuls- und Energieerhaltung für die Bewegung der Stoßpartner ergeben.

### Billardspiel

Der elastische Zusammenstoß einer bewegten mit einer ruhenden Kugel beim Billardspiel (ohne Effet-, Zugstöße u.ä.) veranschaulicht die Punktmassen-Kinematik in Verbindung mit dem Impulserhaltungssatz. Haben die beiden Kugeln, wie üblich, gleiche Massen, so sind zwei Extremfälle am einfachsten zu beschreiben:

- *zentraler* Stoß: die stoßende Kugel bleibt liegen, die getroffene Kugel übernimmt vollständig deren Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung.
- *streifender* Stoß: die stoßende Kugel rollt (fast) unverändert weiter, die getroffene bewegt sich mit der Geschwindigkeit (fast) Null etwa rechtwinklig zur Seite.

In allen anderen, dazwischen liegenden Fällen bewegen sich nach dem Stoß beide Kugeln in zueinander rechtwinkligen Richtungen mit solchen Geschwindigkeiten, dass der gemeinsame Schwerpunkt der Kugeln (der stets auf der Mitte der Verbindungsgeraden der Kugelmittelpunkte liegt) sich geradeaus weiterbewegt. Es kommt nicht vor, dass eine der Kugeln nach dem Stoß "rückwärts" (um mehr als 90 Grad von der Stoßrichtung abweichend) rollt.

### Atom-, Kern-, Elementarteilchenphysik

Impuls- und Energieerhaltung bestimmen die Kinematik von Stoßvorgängen auch bei Vorgängen, die durch die Quantenmechanik beschrieben werden müssen. Beispielsweise ergibt sich daraus bei Streuprozessen, etwa der Compton-Streuung eines Photons an einem Elektron, wie die Energie des gestreuten Photons mit dem Streuwinkel zusammenhängt.

### Besonderheiten

Gegenüber dem klassisch-mechanischen Fall des Billards kommen hier allerdings in manchen Fällen Komplikationen hinzu:

- Die Teilchen können verschiedene Massen haben. Trifft ein leichteres auf ein schwereres Teilchen, kann es um mehr als 90 Grad abgelenkt, also "zurückgestreut" werden. Die von Ernest Rutherford beobachtete Rückstreuung von Alphateilchen an Atomen war der erste Hinweis auf die Existenz des schweren Atomkerns.
- Nach dem Stoß können mehr als 2 Teilchen vorhanden sein.
- Die kinetische Energie des stoßenden Teilchens (*Projektils*) kann teilweise in andere Formen (Anregungsenergie, Masse neuer Teilchen) umgewandelt werden.
- Umgekehrt kann zusätzlich zur Projektilenergie weitere Energie in kinetische Form überführt werden (siehe exotherme Reaktion). Dies geschieht insbesondere bei den zur technischen Energiegewinnung dienenden Kernspaltungs- und Kernfusionsreaktionen.
- Sind die auftretenden Geschwindigkeiten nicht mehr vernachlässigbar gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, muss mit der relativistischen Energie und dem relativistischen Impuls (siehe Spezielle Relativitätstheorie) gerechnet werden.

### Schwerpunkts-Koordinatensystem

Die Beschreibung der kinematischen Verhältnisse wird oft erleichtert durch Wahl eines Koordinatensystems, in dem der gemeinsame Schwerpunkt der Teilchen ruht (*Schwerpunktsystem*, engl. *center-of-mass system*, *CMS*). In diesem System bewegen sich die beiden vor dem Stoß vorhandenen Teilchen um 180 Grad entgegengesetzt aufeinander zu, und bei nur zwei Teilchen nach dem Stoß fliegen diese um 180 Grad auseinander. Der Impuls jedes Teilchens im *Laborsystem* (in dem sich vor dem Stoß nur das Projektilteilchen bewegt) ist die Vektorsumme aus seinem im Schwerpunktsystem berechneten Impuls und dem Impuls des Schwerpunkts im Laborsystem

(Galilei-Transformation). Im relativistischen Fall tritt an die Stelle der Galilei-Transformation die Lorentz-Transformation .

### **Doppel-Speicherring-Experimente**

Kinetische Energie und Impuls eines Körpers sind nicht unabhängig voneinander. Die kinetische Energie, die in der Mitbewegung des Schwerpunkts steckt, steht nicht zur Umwandlung in andere Formen (etwa neue Teilchen) zur Verfügung. Dies ist der Grund, Experimente der Hochenergiephysik an Doppel-Speicherring-Anlagen durchzuführen. Hier ist (bei entgegengesetzt gleichen Impulsvektoren der zusammenstoßenden Teilchen) das Schwerpunktssystem mit dem Laborsystem identisch, so dass die gesamte kinetische Energie beider Teilchen "verbraucht" werden kann.

### **Siehe auch**

- Dynamik
- Mechanik
- Statik (Physik)
- Ballistik

### **Weblinks**

- Die Kinematik des Massepunktes auf einer Kreisbahn <sup>[1]</sup> Animation von BIGS
- Die Kinematik des starren Körpers <sup>[2]</sup>
- Phynet.de <sup>[3]</sup>
- Kinematik und Computeranimation <sup>[4]</sup>
- Digitalisierte Bücher <sup>[5]</sup> aus der Geschichte der Kinematik
- Kinematik auf Lern-Online.net <sup>[6]</sup>

### **Referenzen**

- [1] [http://www.bigs.de/BLH/de/index.php?option=com\\_content&view=category&layout=blog&id=82&Itemid=250](http://www.bigs.de/BLH/de/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=82&Itemid=250)
- [2] <http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/kreisel/node1.html>
- [3] <http://www.phynet.de>
- [4] <http://www.grundstudium.info/animation/node19.php>
- [5] <http://kmoddl.library.cornell.edu/bib.php?sort=author&type=1>
- [6] <http://www.lern-online.net/physik/mechanik/kinematik/>
-

# Koordinatensystem

Ein **Koordinatensystem** (mathematisches Kürzel: *KOS*) dient der Positionsangabe von Punkten im Raum. Der Fachbegriff der **Koordinate**, in der Bedeutung „Lageangabe“, wurde im 18. Jahrhundert aus dem Wort *Ordinate* gebildet.<sup>[1]</sup>



Zweidimensionale, kartesische Koordinaten zur Lokalisierung von Hydranten und Wasserabsperrhähnen.

## Verwendung

Koordinatensysteme sind Hilfsmittel der Mathematik, die in vielen Wissenschaften und der Technik verwendet werden. Daneben finden sich Koordinatensysteme jedoch auch im Alltag:

- Die Längen- und Breitengrade bilden ein geographisches Koordinatensystem der Erde.
- In vielen Spielen wie Schiffe versenken oder beim Schachbrett werden Felder mit Koordinaten wie **B3** bezeichnet.
- Ebenso sind Wanderkarten und Stadtpläne meist in derart bezeichnete Quadrate eingeteilt. In der Quadratestadt Mannheim bilden die Innenstadtstraßen das Koordinatensystem.
- Die Lage von Hydranten werden durch ein vom Hinweisschild ausgehendes Koordinatensystem beschrieben.



Mannheimer Straßenschild

## Mathematische Grundlagen

Die Position eines Punktes im Raum wird im gewählten Koordinatensystem durch die Angabe von Zahlenwerten, die Koordinate, eindeutig bestimmt. Entsprechend lässt sich die Position eines durch mehrere Punkte bestimmten Objekts (Linie, Kurve, Fläche, Körper) über deren Koordinaten angeben.

Die Anzahl der zur Beschreibung notwendigen Zahlenwerte ist die Dimension des Raumes (oft als  $n$  abgekürzt). Man fasst die Koordinaten eines  $n$ -dimensionalen Raumes dann auch als  $n$ -Tupel von reellen Zahlen (allgemeiner: von Elementen des zugrundeliegenden Körpers) auf.

Das am häufigsten verwendete Koordinatensystem ist – dies gilt besonders für die Schulmathematik – das Kartesische Koordinatensystem, sowie Polarkoordinatensysteme.

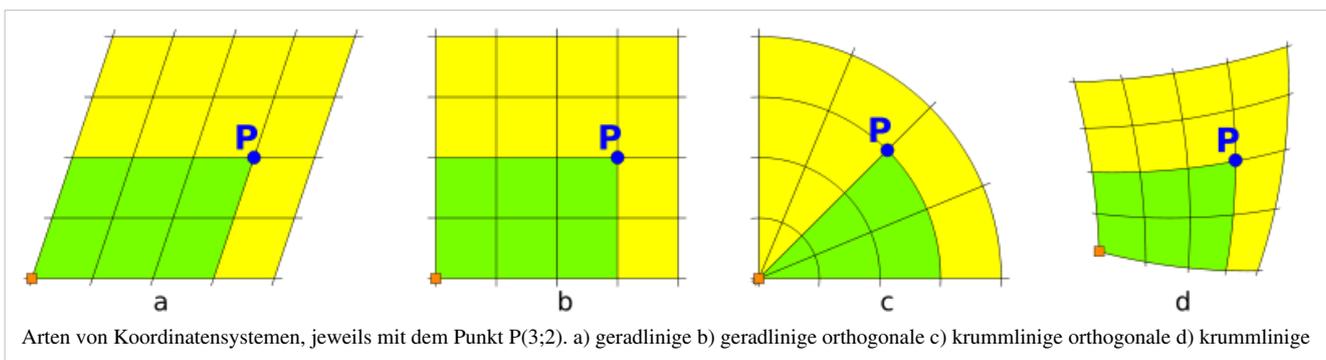
## Koordinatenursprung, Pol

Der Koordinatenursprung (mathematisches Kürzel KOU) bezeichnet den Punkt in einem Koordinatensystem oder einer Karte, an dem alle Koordinaten den Wert Null annehmen. Er wird deshalb häufig auch allgemein Nullpunkt genannt, bei Polarkoordinaten Pol.

Durch den Ursprung verlaufen die Koordinatenachsen, sofern das Koordinatensystem solche hat.

## Unterschiedliche Koordinatensysteme

Die Positionen desselben Punktes im Raum können in verschiedenen Koordinatensystemen dargestellt werden. In den unterschiedlichen Darstellungen wird diese durch unterschiedliche Koordinaten repräsentiert. Bei Systemen, die eine Symmetrie aufweisen kann man durch Darstellung in einem geeigneten Koordinatensystem erreichen, dass einzelne Koordinaten konstant bleiben. Zum Beispiel genügt zur Festlegung einer Position auf der Erdoberfläche, wenn es auf die Höhe über Normalnull (genauer: Ortsabhängigkeit des Erdradius) nicht ankommt, die Angabe von lediglich zwei Koordinaten (wie Längengrad und Breitengrad), die dritte Koordinate ist durch den Erdradius festgelegt. Während sich in solchen Fällen die Verwendung sphärischer Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) anbietet, erfolgt die Beschreibung von Punkten auf einer Ebene im Raum hingegen einfacher in kartesischen Koordinaten: zwei Koordinaten sind variabel, die dritte ist (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) durch den konstanten Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung festgelegt.



Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen geradlinigen (affinen) und krummlinigen Koordinatensystemen. Wenn außerdem Koordinatenlinien in jedem Punkt senkrecht aufeinander stehen, nennt man solche Koordinatensysteme orthogonal.

### Beispiele

- geradlinige Koordinatensysteme:
  - affine Koordinaten, Vektorraum
- geradlinige orthogonale Koordinatensysteme:
  - Kartesisches Koordinatensystem
- krummlinige Koordinatensysteme
- krummlinige orthogonale Koordinatensysteme:
  - ebene Polarkoordinaten und Zylinderkoordinaten
  - räumliche und sphärische Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)
  - Elliptische Koordinaten
  - Toruskoordinaten

## Transformationen zwischen Koordinatensystemen

Die Transformation zwischen unterschiedlichen Koordinatensystemen erfolgt durch Koordinatentransformation. Die unterschiedlichen Zahlenwerte der  $n$ -Tupel beschreiben dieselbe Position im Raum. Beim Übergang von geradlinigen (affinen) Koordinaten zu krummlinigen Koordinaten ist zur Berechnung von Größen wie Volumen die Funktionaldeterminante (Jacobi-Determinante) anzuwenden.

## Spezielle Koordinatensysteme

Der uns umgebende und in Mathematik und Physik benutzte Raum ist der dreidimensionale euklidische Raum. Wenn für diesen Raum das Newtonsche Trägheitsgesetz der klassischen Physik gilt, spricht man von einem Inertialsystem.

Oft kann eine Raumdimension vernachlässigt werden, so dass nur ein zweidimensionaler Raum zu betrachten ist. Unter Einbeziehung der Zeit entsteht der vierdimensionale Minkowskiraum der Relativitätstheorie.

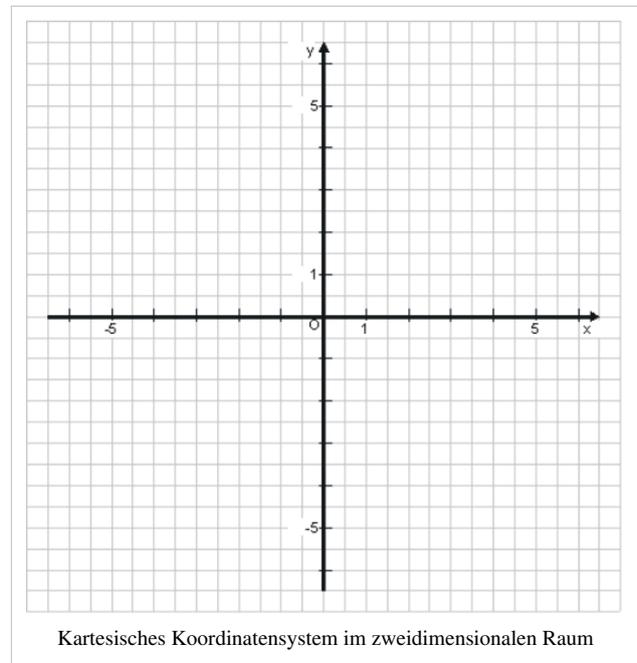
Diese Räume lassen sich durch kartesische Koordinaten beschreiben, das sind affine (geradlinige) Koordinaten, die entlang senkrecht aufeinander stehender Achsen gemessen werden.

Bei der Beschreibung in Polarkoordinaten werden der Abstand von einem festgelegten Koordinatenursprung und Winkel zu gegebenen Achsen als Koordinaten verwendet. Auch hier stehen die Koordinatenachsen senkrecht aufeinander, aber sie sind krummlinig.

Andere Koordinatensysteme werden in Bezug auf geometrische Objekte (Zylinder, Kegelschnitt) definiert: Zylinderkoordinaten, Hyperbolische Koordinaten.

Einige nur in Fachgebieten (z. B. Geodäsie, Kartografie, Geographie, Fernerkundung, Astronomie) gebräuchliche Koordinatensysteme sind:

- Geographisches Koordinatensystem
- Soldner-Koordinatensystem
- Gauß-Krüger-Koordinatensystem
- UTM-Koordinatensystem
- Astronomische Koordinatensysteme wie das ekliptikale oder galaktische
- Baryzentrische Koordinaten
- Trilineare Koordinaten
- Bewegte Koordinatensysteme
- Rotierende Koordinatensysteme
- Fahrzeugkoordinatensystem



## Mathematische Betrachtungen

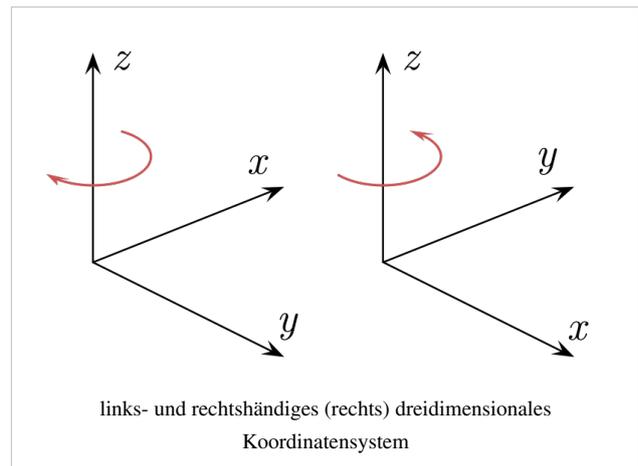
In einem (endlichdimensionalen) Vektorraum ist durch eine Basis automatisch ein Koordinatensystem gegeben. Die Koeffizienten der Basisvektoren lassen sich als Koordinaten verstehen. Einer Transformation zwischen zwei Basissystemen entspricht eine Transformation zwischen den entsprechenden Koordinatensystemen.

Wenn eine Transformation von einer Basis zu einer anderen eine lineare Abbildung ist, die etwa durch eine Matrix dargestellt werden kann, sind auch die entsprechenden Transformationen der Koordinatensysteme linear.

## Rechts- und linkshändige Koordinatensysteme

Ein Koordinatensystem wird nicht nur durch die Norm, also die Länge "1", die Grad- oder Krümmigkeit der Hauptachsen, also der Koordinatenachsen und die Winkel zwischen den Koordinatenachsen unterschieden, sondern auch durch die Orientierung und den Drehsinn des Koordinatensystems. Beide Eigenschaften beschreiben gemeinsam den Zusammenhang der Koordinatenachsen bei rotatorischer Transformation einer Achse in eine andere.

Man unterscheidet zwischen rechts- und linkshändigen Koordinatensystemen (in 3 Dimensionen), wobei standardmäßig rechtshändige Koordinatensysteme den positiven Drehsinn bezeichnen. Zur Überprüfung der Händigkeit nimmt man die rechte Hand mit abgespreiztem Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger. Der Daumen zeigt in die positive  $x$ -Richtung und der Zeigefinger in die positive  $y$ -Richtung. Zeigt die positive  $z$ -Achse in die gleiche Richtung wie der Mittelfinger, so handelt es sich um ein rechtshändiges System, andernfalls um ein linkshändiges. Man nennt dieses allgemein gültige Modell die Drei-Finger-Regel.



## Weblinks

- Einfache und verständliche Erklärung <sup>[2]</sup> (hpts. durch Abbildungen)
- Mathematisch exakte Definitionen <sup>[3]</sup> (mit Formeln)

## Referenzen

- [1] Etymologie nach *Kluge Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache*, 24. Auflage, 2002  
 [2] <http://www.mathe-online.at/mathint/zeich/i.html>  
 [3] <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/lexikon/K/koordinatensystem.html>

# Geschwindigkeit

Physikalische Größe		
Name	<b>Geschwindigkeit</b> <sup>(1)</sup>	
Formelzeichen der Größe	$v, u, w, c$ <sup>(2)</sup>	
Abgeleitet von	lat. <i>velocitas</i>	
Größen- und Einheiten-system	Einheit	Dimension
SI	Meter pro Sekunde ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )	$\text{L}\cdot\text{T}^{-1}$
CGS	Zentimeter pro Sekunde ( $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ )	$\text{L}\cdot\text{T}^{-1}$
Planck	Lichtgeschwindigkeit ( $c$ )	$c$
Anmerkungen		
<sup>(1)</sup> auch: <i>Bahngeschwindigkeit, Tangentialgeschwindigkeit, geschlossene Bahn: Umfangsgeschwindigkeit, Kreis- und Ellipsenbahn: Orbital- oder Umlaufgeschwindigkeit</i> <sup>(2)</sup> auch $v_t, v_\perp, v_u$ uä.		
<i>Siehe auch:</i> Winkelgeschwindigkeit, Tangentialbeschleunigung		

Unter der **Geschwindigkeit** (Formelzeichen:  $v$ , von lat. *velocitas*) eines Objekts versteht man die von ihm zurückgelegte Wegstrecke  $s$  pro Zeiteinheit  $t$ . Mathematisch entspricht die Geschwindigkeit der Ableitung des Ortes nach der Zeit.

## Definition

Die Definition der Geschwindigkeit als Zeitableitung des Ortes lässt sich in vier Schritten nachvollziehen;



Sprint in einem Fußballspiel

1. Gesamtdurchschnittsgeschwindigkeit:  $\bar{v} = \frac{x}{t}$

2. Durchschnittsgeschwindigkeit in einem bestimmten Abschnitt:  $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

3. Momentangeschwindigkeit (= differentielle Abschnittsgeschwindigkeit):  $v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$
4. Eine Strecke hat immer eine Richtung und ist daher ein Vektor. Aus diesem Grunde ist auch die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe. Die exakte Definition lautet deshalb:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

Im Englischen wird (besonders unter Mathematikern und Physikern) gelegentlich zwischen *velocity* (vektorielle Geschwindigkeit) und *speed* (Betrag der Geschwindigkeit) unterschieden. Auch im deutschen Sprachraum wird teilweise dieser Unterschied gemacht: Für *velocity* (vektorielle Geschwindigkeit:  $\vec{v}$ ) wird dann der Begriff *Geschwindigkeit* verwendet und für *speed* (Betrag der Geschwindigkeit:  $v$ ) der Begriff *Tempo* oder *Schnelligkeit*.

Ein Beispiel: Auf einer Kreisbahn kann ein Auto eine konstante Schnelligkeit, aber nie eine konstante Geschwindigkeit haben.

Ist der Ort  $x$  eine Funktion der Zeit  $t$  in der Form  $x = x(t)$ , so ergibt sich die Geschwindigkeit  $v(t)$  durch Ableiten des Ortes nach der Zeit, mit

$$\dot{x}(t) = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

wobei man in der Physik Ableitungen nach der Zeit üblicherweise als  $\dot{x}(t)$  schreibt.

Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit ist die  $\rightarrow$  Beschleunigung, die ebenfalls ein Vektor ist, mit

$$\ddot{x}(t) = \vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Ebenfalls lässt sich die Geschwindigkeit als Ableitung der Energie nach dem Impuls definieren, mit

$$v = \frac{dE}{dp}$$

**Beispiel:** Die kinetische Energie in der klassischen Mechanik ist

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

Die Ableitung ist dann

$$v = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v.$$

## Einheiten

SI-Einheit der Geschwindigkeit ist Meter pro Sekunde (m/s). Eine weitere gebräuchliche Einheit der Geschwindigkeit ist Kilometer pro Stunde (km/h).

In der Alltagssprache (auch im Duden) wird auch die Bezeichnung „Stundenkilometer“ verwendet, welche im Sinne von „stündlichen Kilometern“ gemeint ist. Da es jedoch in der Physik Konvention ist, dass eine derartige Zusammensetzung für eine Multiplikation der aufgeführten Einheiten steht, würde „Stundenkilometer“ für die Einheit „km×h“ statt „km/h“ stehen. Deshalb sollte der Ausdruck „Stundenkilometer“ vermieden werden. Im Alltag führt der Begriff nicht zu Missverständnissen, da es keine Größe mit der Einheit „km×h“ gibt. In der geschriebenen Sprache sollte man aber insbesondere bei der Abkürzung „km/h“ den Divisionsstrich nicht weglassen.

Als nicht metrische Einheit wird vor allem in den USA und einigen anderen englischsprachigen Ländern Meilen pro Stunde (mph) benutzt. In der See- und Luftfahrt ist außerdem die Einheit Knoten (kn) gebräuchlich; ein Knoten ist eine Seemeile pro Stunde. Vertikalgeschwindigkeiten in der motorisierten Luftfahrt werden in der Regel in Fuß pro Minute angegeben.

Fast nur in der Luftfahrt wird das Mach verwendet, das keine absolute Größe hat, sondern das Verhältnis der Geschwindigkeit zur lokalen Schallgeschwindigkeit angibt. Die Schallgeschwindigkeit ist stark temperaturabhängig

aber nicht luftdruckabhängig. Der Grund für die Nutzung dieser Zahl ist, dass aerodynamische Effekte von ihr abhängen. Beim Erreichen der Schallgeschwindigkeit ändert sich das Strömungsverhalten. Propellermaschinen können beispielsweise nicht schneller als der Schall fliegen, sondern nur einen bestimmten Bruchteil der Schallgeschwindigkeit erreichen, gleichgültig, wie groß diese absolut ist.

Umrechnung gebräuchlicher Geschwindigkeitseinheiten:

- $1 \text{ kn} = 0,5144 \text{ m/s} = 1,852 \text{ km/h} (= 1 \text{ Seemeile/h})$ ;
- $1 \text{ m/s} = 1,944 \text{ kn} = 3,6 \text{ km/h (exakt)} = 2,237 \text{ mph (Kehrwert: } 1 \text{ km/h} = 5/18 \text{ m/s} = 0,2\overline{7} \text{ m/s} \approx 0,278 \text{ m/s})$
- $1 \text{ km/h} = 0,540 \text{ kn} = 0,2778 \text{ m/s} = 0,6214 \text{ mph}$ ;
- $1 \text{ mph} = 0,8690 \text{ kn} = 0,44704 \text{ m/s (exakt)} = 1,609344 \text{ km/h (exakt)}$ ;
- $100 \text{ ft/min} = 0,508 \text{ m/s (exakt)}$ ;
- $c = 299.792.458 \text{ m/s (exakt)} = 582.749.918 \text{ kn} = 670.616.629 \text{ mph} = 1.079.252.848,8 \text{ km/h. (exakt)}$

Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist eine wichtige Naturkonstante der Physik. Mit dieser Geschwindigkeit breiten sich elektromagnetische Wellen, also auch das Licht, im Vakuum aus. Außerdem ist die Lichtgeschwindigkeit nach der Relativitätstheorie die höchste (lokal) mögliche Geschwindigkeit für Bewegung und Informationsübertragung.

## Besondere Darstellungen

### Kartesische und Polarkoordinaten

Eine *Bahn (Trajektorie)* ist bestimmt durch einen Ortsvektor (Fahrstrahl) als Funktion der Zeit:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

wobei eine Darstellung von  $\vec{r}$  möglich ist

- in kartesischen Koordinaten  $\vec{r} = \vec{x} = \vec{x}(x, y)$  bzw.  $= \vec{x}(x, y, z)$  in den häufigen Fällen der Ebene und des Raumes
- in Polarkoordinaten  $\vec{r} = \vec{r}(\varphi)$  bzw.  $= \vec{r}(\varphi, \rho)$  oder in Kugelkoordinaten  $\vec{r} = \vec{r}(\varphi, \theta)$

Dann ist die Geschwindigkeit des Punktes die Änderung des Ortes mit der Zeit, die einfachste Darstellung der Bewegungsgleichung:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \dots \text{die Bahngeschwindigkeit}$$

die Ableitung in der Punktschreibweise, die in der Dynamik üblich ist

Bei astronomischen Objekten, wie Planeten, Kometen, oder Satelliten nennt man die Geschwindigkeit traditionell *Bahngeschwindigkeit*, oder *Orbitalgeschwindigkeit* bei geschlossenen Bahnen.

### Tangentialgeschwindigkeit (Umfangsgeschwindigkeit) und Radialgeschwindigkeit

Bei Beobachtung aus einem Punkt zeigt die Geschwindigkeit zwei Komponenten – hier nimmt man typischerweise die Polardarstellung zuhilfe:

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{\omega} \times \vec{r} \text{ ist die Tangentialkomponente der Bahngeschwindigkeit}$$

mit  $\omega$  als der Winkelgeschwindigkeit

$$v_t = \dot{r} \text{ ist der Betrag der Radialkomponente, die Radialgeschwindigkeit}$$

Für die Radialkomponente reicht also eine rein geometrische Betrachtung der Bewegung nicht aus, man muss den Zeitverlauf der Bahn kennen und den Differentialkalkül zu Hilfe nehmen.

Tangentialgeschwindigkeit und Radialgeschwindigkeit treten in der Beobachtung immer auf, auch bei geradlinigen Bahnen.

### Absolute und Relativgeschwindigkeit

Der Begriff *Bahngeschwindigkeit* der Astronomie grenzt zum einen die Geschwindigkeit längs der Bahn eindeutig von der Winkelgeschwindigkeit ab, mit der der Himmelskörper über den Nachthimmel zieht – dies ist die für die beobachtende Astronomie vorrangige Größe, wie sie auch als Bahnelement angegeben wird.

Zum anderen spielt die „physikalische“ (absolute) Geschwindigkeit in der Astronomie keinerlei Rolle, weil prinzipiell keine ruhenden Bezugssysteme existieren: So beträgt etwa die Geschwindigkeit des Mondes:

#### Geschwindigkeit des Mondes (in km/s)

	Mittlere Bahngeschwindigkeit (um den Erde-Mond-Schwerpunkt)	um die Sonne/Baryzentrum des Sonnensystems	um das galaktische Zentrum	in Bezug zur Andromeda
Geschwindigkeit	1,02 ± 5,5 % mensal	29,78 ± 1,51 (± 5,1 % annual)	~ 250 (je galaktischem Jahr, genaue Schwankungen unbekannt)	266 ± 31,3 (annual)
Anteil der mittleren Bahngeschwindigkeit an der mittleren Relativgeschwindigkeit	100 %	3,4 %	0,4 %	0,37 %

Für ferne Objekte des Universums ist die Geschwindigkeit primär von der Ausdehnung der Raumzeit bestimmt, und wird etwa als Rotverschiebung gemessen. Daher spielt in der Astronomie ausschließlich die Darstellung der *Relativgeschwindigkeit* in Bezug zu einem ausgewählten Gravizentrum (Erde-Mond-System, Sonnensystem, Erdorbit eines Satelliten) bzw. zum Beobachtungsort eine Rolle.

### Geschwindigkeit zahlreicher Teilchen

Die Geschwindigkeiten in einem strömenden Medium können als Vektorfeld aufgefasst werden.

### Spezialfälle

Der Trivialfall ist ein Punkt in Ruhe: Hier ist die Bahngeschwindigkeit offenkundig null. Ein einfacher Fall ist auch die *unbeschleunigte geradlinige Bewegung*, hier ist die Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}(t) = \text{const.}$

### Beschleunigte Bewegungen

Bei einer *geradlinigen beschleunigten Bewegung* gelten die Grundbedingungen einer Geschwindigkeit. Bei allen anderen Bahnen folgt direkt aus dem ersten Newtonschen Axiom (*Trägheitsprinzip*), dass eine → Beschleunigung wirken muss.

Bei allen Bahnen, auf denen eine Beschleunigung wirkt, folgt aus deren Definition

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

mit dem Verlauf der Beschleunigungen als einer Funktion der Zeit, die die Bahn bestimmt

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt$$

Gilt  $\vec{a}(t) = \text{const.}$ , spricht man von *gleichmäßiger Bewegung*.

Typische Grundprobleme der beschleunigten Bewegungen sind freier Fall und Wurfparabel in einem Gravitationsfeld, die kreisförmige Bewegung und die Keplerbahnen.

## Nicht-geradlinige Bahnen

Bei allen nicht-geradlinigen Bewegungen, ändert sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors. Er ist dann eine *instantane* Größe (wie auch bei Beschleunigungen), und kann als solche nur für einen gewissen Zeitpunkt angegeben werden. Dabei zeigt der Vektor immer in die momentane Bewegungsrichtung – und diese wird durch die Tangente an die Bahnkurve beschrieben, die nach ihrer Definition die Gerade des *differenziellen Linienelements* ist, dem in der Annäherung an Null als gerade annehmbarem Abschnitt der Bahn. Daher ist jede Bahngeschwindigkeit einer nicht-geradlinigen Bewegung eine *Tangentialgeschwindigkeit*.

Da an jedem Punkt einer stetig differenzierbaren Bahn auch die Krümmung berechnet werden kann (über die zweite Ableitung), lässt sich die Bahn durch ihren Krümmungskreis annähern, und spricht von *Umfangsgeschwindigkeit*, weil die Tangente an den Umfang des Krümmungskreises anliegt. An allen Stellen ergibt sich dabei eine Bewegung, welche mit Hilfe der Vektorrechnung in eine *radiale* (entlang des Krümmungskreisradius) zerlegt werden kann, und eine *tangentiale* Bewegungskomponente: Es gibt eine *Radialgeschwindigkeit*, und es tritt unabhängig von einer *Tangentialbeschleunigung* auch eine Beschleunigung durch die Zentripetalkraft (deren Gegenkraft die „Fliehkraft“ ist) auf.

Misst man aus dem Krümmungskreismitelpunkt, verschwindet die Radialkomponente. Der „fehlende“ Anteil liegt darin, dass der Krümmungskreismitelpunkt nur für diesen einen Bahnpunkt gilt, und sich beim Fortschreiten auf der Bahn – außer bei einem kreisbogenförmigen Abschnitt der Bahn – verschiebt.

## Geschlossene Bahnkurven: Umlaufgeschwindigkeit

Bei geschlossenen Bahnkurven (insbesondere) Kreis- und Ellipsenbahnen spricht man von *Umlaufgeschwindigkeit* oder *Orbitalgeschwindigkeit*, weil der Körper periodisch dieselbe Kurve durchläuft.

In der Himmelsmechanik bezeichnet die *Orbitalgeschwindigkeit* die Bahngeschwindigkeit, mit der sich ein Körper um einen Gravizentrum bewegt (*Orbit*, *Umlaufbahn*). Umwandern sich zwei Körper aufgrund ihrer Schwerkraftwirkung, so ist die Bahnkurve jeweils eine Ellipse. Für den Spezialfall eines kreisförmigen Orbits bringt die Anziehungskraft zwischen den Himmelskörpern jeweils gerade die für die Kreisbahn notwendige Zentripetalkraft auf, wodurch die Geschwindigkeit festgelegt (und betragsmäßig konstant) ist.

## Kreisbewegung

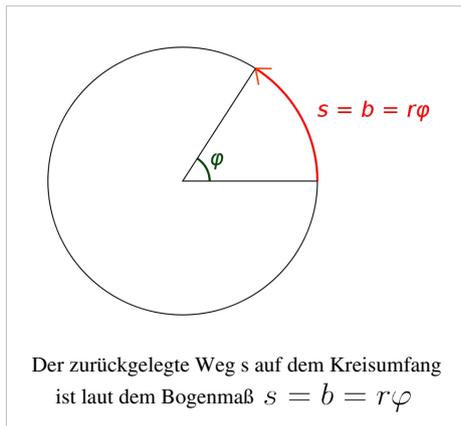
Eines der Grundprobleme der Ermittlung einer Bahngeschwindigkeit ist die Bewegung auf einer *Kreisbahn* (*Rotation*). In diesem Fall bewegt sich der Punkt in konstantem Abstand zum Kreismittelpunkt.

Im Gegensatz zur Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , die beschreibt, in welcher Zeit ein Objekt einen bestimmten Kreissektor, also einen Winkel, umrundet, ist die Tangentialgeschwindigkeit auch abhängig vom Radius  $r$  des Kreises. Daraus folgt, dass ein Punkt auf einer sich drehenden Scheibe am Rand eine größere Tangentialgeschwindigkeit hat, als ein sich dem Mittelpunkt näher befindender Punkt, da er eine größere Strecke in der gleichen Zeit zurücklegt.

$$v = \frac{s}{t}$$

Wenn  $t$  die Zeitdauer einer vollständigen Umrundung des Kreises ist ( $t = T$ ), so gilt  $s = 2\pi r$  (Kreisumfang). Daraus folgt:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$



Eine andere Möglichkeit der Herleitung führt über das Bogenmaß  $\varphi = \frac{b}{r}$ : Wenn ein Weg  $s$  in der Zeit  $t$  zurückgelegt wird, ist die Geschwindigkeit  $v = \frac{s}{t}$ . Hier ist der Weg  $s$  gleich die Bogenlänge  $b = r\varphi$  (siehe Bild).

Eingesetzt ergibt das  $v = \frac{r\varphi}{t}$ . Dabei ist  $\frac{\varphi}{t}$  die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , also folgt:  $v = r\omega$

*Rechenbeispiel:* Die Bahngeschwindigkeit eines Punkts auf dem Äquator der Erde

Der Erdumfang beträgt etwa 40000 km. Ein Ort auf dem Äquator umläuft die Erdachse in etwa 24 h (einen Tag). Die Bahngeschwindigkeit ist dann

$$v = \frac{40000 \text{ km}}{24 \text{ h}} \approx 1666 \text{ km/h}$$

Für die Stadt München, die etwa bei  $48^\circ$  nördlicher Breite liegt, ist die Geschwindigkeit  $\cos(48^\circ) = 0,67$  Mal so groß; das heißt nur etwa 1100 km/h.

Die Kreistangente steht zu jedem Zeitpunkt im rechten Winkel zur Verbindungslinie vom Kreismittelpunkt zum bewegten Punkt, dem *Berührungsradius*. Daher tritt keine Radialgeschwindigkeit auf (die Bewegung entlang des Radius ist null, weil der Radius konstant bleibt). Trotzdem ist auch eine *gleichförmige Kreisbewegung* nicht beschleunigungsfrei, es tritt eine *Zentripetalbeschleunigung* auf, die den Punkt „in die Kreisbahn zwingt.“ Sie wird etwa von einem Seil, an dem ein Körper rotiert, ausgeübt, oder von der Gravitation.

### Ellipsenbahn

In der Astronomie treten elliptischen Bahnen als eine der grundlegenden Lösungen der Keplergleichung im Zweikörpersystem auf. Kreisbahnen, die in der technischen Mechanik bevorzugt vorkommen, spielen in der Astronomie keine Rolle, sie sind nur eine Ideallösung, die die Basis für die Bahnbestimmung bilden (Mittlere Anomalie).

Aufgrund der Energieerhaltung ist die Orbitalgeschwindigkeit im allgemeinen Fall einer Ellipse nicht konstant, sondern nimmt zu, wenn der Abstand zwischen den Körpern kleiner wird. Mit Orbitalgeschwindigkeit können dann verschiedene Größen gemeint sein, etwa die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt oder eine gemittelte Geschwindigkeit.

Johannes Kepler entdeckte, dass zwar Bahnradius und Bahngeschwindigkeit variieren, aber der Fahrstrahl (die Verbindungslinie zwischen Gravizentrum und umlaufendem Körper) in gleicher Zeit die gleiche Fläche überstreicht (*Zweites Keplergesetz*).

An einer Ellipse ist die Tangente nur an vier Stellen, den *Haupt-* und *Nebenscheiteln*, den Endpunkten der großen und kleinen Halbachse, rechtwinklig zum Radius, und die Berechnungen für eine Kreisbahn gelten hier nur für die *Normalkomponente* an den Radius.

Der Umfang einer Ellipse, der für den Weg-Zeit-Zusammenhang der Geschwindigkeit gebraucht wird, kann analytisch nicht berechnet werden. Man muss hier auf die Elliptischen Integrale zurückgreifen, die die Bogenlänge der Kegelschnitte beschreiben, und nur in Spezialfällen analytisch lösbar sind – mit ihnen hat sich schon Euler und

Gauß, und später insbesondere Legendre auseinandergesetzt. (Eine besondere Klasse führt auf die Jacobi-Integrale, und darüber weiter zur Fourier-Analyse.) Meist wird daher auf numerische Methoden zurückgegriffen, in der Praxis erfolgen daher besonders häufige Messungen – das ist das Kernproblem der Bahnbestimmung.

Für die Hauptscheitel der Ellipse gibt es aber analytische Lösungen:<sup>[1]</sup>

$$\text{Winkelgeschwindigkeit im Perizentrum: } \omega_p = \omega_m \sqrt{a^2(a+e)/(a-e)^3}$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit im Apozentrum: } \omega_a = \omega_m \sqrt{a^2(a-e)/(a+e)^3}$$

mit

- $\omega_m$ : mittlere Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_m = 2\pi/T$$

$T$ : Umlaufdauer

- $a$ : große Halbachse
- $e$ : numerische Exzentrizität

Weil sich der Radiusvektor in den Scheiteln differentiell kaum ändert, gilt:

$$\text{Perizentrumsgeschwindigkeit: } v_r = \omega_p(a-e) = \frac{2\pi}{T} a \sqrt{\frac{a+e}{a-e}}$$

$$\text{Apozentrumsgeschwindigkeit: } v_r = \omega_a(a+e) = \frac{2\pi}{T} a \sqrt{\frac{a-e}{a+e}}$$

Die Perizentrumsgeschwindigkeit ist das Maximum der Orbitalgeschwindigkeit, die Apozentrumsgeschwindigkeit das Minimum.

Mit  $e \ll a$  (kreisähnliche Bahnen) gilt näherungsweise:<sup>[1]</sup>

$$\omega_p = \omega_m \sqrt{1 + 2e/a}$$

$$\omega_a = \omega_m \sqrt{1 - 2e/a}$$

**Siehe auch:**

- Keplerbahn
- Zweikörperproblem (Keplerproblem), Mehrkörpersystem
- Hodograph

## Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck

Die Ableitung des Ortes nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit:  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$

Die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit, also die Ableitung der Geschwindigkeit, ist die → Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Die dritte Ableitung schließlich, also nunmehr die Ableitung der Beschleunigung nach der Zeit, gibt den Ruck an:

$$\vec{j}(t) = \dot{\vec{a}}(t) = \ddot{\vec{v}}(t) = \frac{d^3\vec{x}(t)}{dt^3}$$

## Geschichtliche Anmerkung

Galileo Galilei definierte wohl als Erster die Geschwindigkeit gleichförmig-geradliniger Bewegung geometrisch, und zwar als Proportionalität der vom bewegten Körper zurückgelegten Strecken  $s$  zu den dazu benötigten Zeiten  $t$ .<sup>[2]</sup> Dies entspricht in heutigen Begriffen der Durchschnittsgeschwindigkeit.

## Siehe auch

- Größenordnung (Geschwindigkeit)
- Geschwindigkeitsrekord
- Durchsatz
- Datendurchsatz (Informatik)
- Geschwindigkeit (Straßenverkehr), Reisegeschwindigkeit

## Weblinks

- Versuche und Aufgaben zur Geschwindigkeit <sup>[3]</sup>

## Referenzen

- [1] Norbert Treiz: *Wie schnell sieht die Sonne einen Planeten wandern?*. In: *Spektrum der Wissenschaft*. 04/09, spektrum Akademischer Verlag, April 2009, Physikalische Unterhaltungen. *Sonnensystem (III): Keine Sonnenuhr für den Merkur.*, S. 36–38 (Kasten S. 37 – mit Herleitung der Formeln über die Energieerhaltung).
- [2] Galileo Galilei: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed i movimenti locali*, Leiden 1638
- [3] [http://www.physik.uni-muenchen.de/leifiphysik/web\\_ph08/m04\\_geschwindigkeit.htm](http://www.physik.uni-muenchen.de/leifiphysik/web_ph08/m04_geschwindigkeit.htm)

# Beschleunigung

Physikalische Größe		
Name	<b>Beschleunigung</b>	
Größenart	Beschleunigung	
Formelzeichen der Größe	$a$	
Größen- und Einheiten-system	Einheit	Dimension
SI	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$	$\text{L}\cdot\text{T}^{-2}$
CGS	$\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$	$\text{L}\cdot\text{T}^{-2}$
Planck	Planck-Beschleunigung	$\hbar^{-1/2}\cdot\text{G}^{-1/2}\cdot\text{c}^{7/2}$

**Beschleunigung** ist die Änderung der  $\rightarrow$  Geschwindigkeit eines Körpers. Das Wort wird, sogar innerhalb der physikalischen Fachsprache, in zwei etwas verschiedenen Bedeutungen benutzt:

- Im alltäglichen Wortsinn, aber auch z. B. in dem Begriff Teilchenbeschleuniger, ist eine Erhöhung des *Betrages* der Geschwindigkeit gemeint;
- im allgemeineren Sinn bezeichnet Beschleunigung *jede* Änderung des Geschwindigkeitsvektors, also auch eine Abnahme des Betrages (*Verzögerung* oder *Abbremsung*) oder eine Richtungsänderung bei gleich bleibendem

Geschwindigkeitsbetrag. Die Beschleunigung in diesem Sinne ist die zeitliche Ableitung des Geschwindigkeitsvektors oder die zweite zeitliche Ableitung des Ortsvektors.

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Die SI-Einheit der Beschleunigung ist  $\text{m/s}^2$ .

Die Beschleunigung ist wie die  $\rightarrow$  Geschwindigkeit eine gerichtete Größe (Vektor). Sie ist eine der wesentlichen Größen der klassischen Mechanik, deren Dynamik (Änderung der Beschleunigung unter Einwirkung von Kräften) erstmals von Isaac Newton beschrieben wurde (siehe auch Newton-Axiome).

Um einen Körper zu beschleunigen, ist immer eine Kraft notwendig.

Für Systeme mit konstanter Masse in einem Inertialsystem ergibt sich die Beschleunigung aus dem Verhältnis von Kraft zu Masse

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Beschleunigungsvorgänge spielen in allen bewegten Systemen, wie z. B. Fahrzeugen, Flugzeugen oder Aufzügen, eine wichtige Rolle und sind aufgrund der in diesem Zusammenhang auftretenden Trägheitskräfte für die darin beförderten Menschen und Sachen meist deutlich spürbar.

## Physikalische Definition

Die Beschleunigung  $\vec{a}$  ist eine physikalische Größe aus der  $\rightarrow$  Kinematik, die definiert ist als die  $\rightarrow$  Geschwindigkeitsänderung  $d\vec{v}$  pro Zeitintervall  $dt$ . Sie ist also die zeitliche Ableitung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}(t)$$

Da die Geschwindigkeit die Ableitung des Ortes nach der Zeit ist, kann man die Beschleunigung auch als zweite Ableitung des Ortsvektors  $\vec{r}$  darstellen

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}(t)$$

Eine *mittlere* Beschleunigung kann aus der Differenz der Geschwindigkeiten  $\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$  zu zwei verschiedenen Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  dividiert durch das zwischen den beiden Zeitpunkten verstrichene Zeitintervall  $\Delta t = t_2 - t_1$  berechnet werden

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = v\hat{t}$  setzt sich zusammen aus dem Geschwindigkeitsbetrag  $v$  und dem Tangenteneinheitsvektor  $\hat{t}$ . Bildet man nun die Ableitung dieses Ausdrucks erhält man die Beschleunigung. Die zeitliche Ableitung des Tangenteneinheitsvektors kann über die Bogenlänge  $s$  berechnet werden:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{t})}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{t} + v\left(\frac{d\hat{t}}{dt}\right) \quad \text{mit} \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = \underbrace{\frac{d\hat{t}}{ds}}_{\hat{n}/\rho} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v = \frac{v}{\rho}\hat{n}$$

$$\vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}$$

Dabei ist  $\rho$  der Krümmungsradius der Bahn und  $\hat{n}$  der Normaleneinheitsvektor quer zur Bahnkurve in Richtung des Krümmungsmittelpunkts.

Die Beschleunigung  $\vec{a}$  kann aufgeteilt werden in eine zur Bewegungsrichtung  $\vec{v}$  parallelen Beschleunigung (*Tangentialbeschleunigung*)

$$a_t = \dot{v}$$

und eine senkrecht dazu stehende *Normalbeschleunigung*

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Die zeitliche Ableitung der Beschleunigung (also die dritte Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit) ist der Ruck:

$$\vec{j}(t) = \dot{\vec{a}}(t) = \ddot{\vec{v}}(t) = \frac{d^3 \vec{x}(t)}{dt^3},$$

## Sonderfälle der Beschleunigung

- Beschleunigung  $\vec{a} = \vec{0}$ :

Die Geschwindigkeit bleibt in Betrag und Richtung unverändert, der Körper verharrt in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung.

- Konstante Beschleunigung in (bzw. entgegen der) Richtung der Geschwindigkeit (sowohl Richtung als auch Betrag der Beschleunigung sind konstant) führt laut klassischer Mechanik (nach Newton) zu *geradliniger Bewegung* mit zeitlich gleichförmig wachsender (bzw. abnehmender) Geschwindigkeit (Gleichmäßig beschleunigte Bewegung).

Nach der speziellen Relativitätstheorie gilt diese Linearität aber nur näherungsweise bei nichtrelativistischen Geschwindigkeiten:  $v \ll c$  ( $c$ : Lichtgeschwindigkeit).

- Eine Kreisbewegung mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag kommt zustande, wenn eine konstante *Zentripetalbeschleunigung* besteht. Diese Beschleunigung ist nach innen auf den Kreismittelpunkt hin gerichtet. Ein mitbewegter Beobachter hingegen spürt eine gleich große Beschleunigung vom Mittelpunkt weg nach außen (*Zentrifugalbeschleunigung*).
- Beim freien Fall auf der Erde werden alle Körper mit der Fallbeschleunigung  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$  (DIN 1305) in Richtung Erdmittelpunkt beschleunigt. Allerdings gibt es regionale Schwankungen, da die Erdgestalt von einer Kugel abweicht (Erdabplattung) und der innere Aufbau der Erde nicht völlig homogen ist (Schwereanomalie). In der Regel wird bei allgemein gültigen Berechnungen der Näherungswert  $9,81 \text{ m/s}^2$  benutzt.
- Bei einem *Stoß* zwischen zwei Festkörpern können während des kurzen Zeitraums der Berührung extrem hohe Beschleunigungen auftreten.

## Ruck

Der *Ruck*, die zeitliche Änderung einer Beschleunigung, hat z. B. eine Bedeutung bei der dynamischen Anregung von Maschinen und anderen schwingungsfähigen Systemen. So vollführt bei einer Autofahrt der Beifahrer einen „Kopfnicker“, wenn der Fahrer zu schnell einkuppelt. Die zeitliche Änderung einer Zentripetalbeschleunigung heißt Querruck.

## Messung der Beschleunigung

Es existiert eine Vielzahl von Beschleunigungssensoren für verschiedene Anwendungen, von hohen Messbereichen (z. B. +/- 50.000 g) bis zu hochgenauen Messungen. Dies ermöglicht durch zweifache Integration über die Zeit eine Ortsbestimmung von Flugzeugen über einen mittellangen Zeitraum (z. B. für den Fall, dass das GPS-System ausfällt.)

## Beispiele für die Größe von Beschleunigungen

- Beim freien Fall im Schwerfeld der Erde beträgt die Beschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Damit wird (ohne Luftwiderstand) eine Geschwindigkeit von 100 km/h in 2,83 Sekunden erreicht.
- Bei Nähmaschinen wirken auf die Nadel Beschleunigungen von bis zu 6.000  $g$ .
- Bei einer Waschmaschine wirken im Schleudergang mehr als 300  $g$  auf den Trommelinhalt.
- Beim Fahrradfahren treten Beschleunigungen von etwa  $1 \text{ m/s}^2$  auf (Freizeitfahrer) und bei Sportprofis etwa  $2 \text{ m/s}^2$ .
- Ein Mittelklassewagen kann Beschleunigungen bis zu  $5 \text{ m/s}^2$  und Autos höherer Klasse sogar mehr als  $6 \text{ m/s}^2$  hervorbringen.
- Beim Bremsen eines Autos treten negative Beschleunigungen von bis zu  $10,5 \text{ m/s}^2$  auf.
- Bei den Dragster-Fahrzeugen der Top-Fuel-Klasse treten beim Start  $+6 \text{ g}$  ( $60 \text{ m/s}^2$ ) und beim Abbremsen  $-6 \text{ g}$  an Beschleunigung auf.
- Ein vollbeladener Jumbo-Jet erfährt eine Beschleunigung von etwa  $1,6 \text{ m/s}^2$ .
- Der ICE erreicht eine Beschleunigung von etwa  $0,5 \text{ m/s}^2$ , ein moderner S-Bahn-Triebwagen sogar  $1,0 \text{ m/s}^2$ .
- Während der ersten Schritte eines Sprints wirken Beschleunigungen von etwa  $4 \text{ m/s}^2$  auf den Sportler.
- Die Kugel beim Kugelstoßen wird bei der Abstoßphase mit etwa  $10 \text{ m/s}^2$  beschleunigt.
- Ein Tennisball kann Beschleunigungen bis zu  $10.000 \text{ m/s}^2$  erfahren.
- Tischzentrifugen im Laborbedarf können Beschleunigungen von  $12.000 \text{ g}$  erzielen.
- Ultrazentrifugen im Laborbedarf können Beschleunigungen von  $200.000 \text{ g}$  erzielen.
- Auf der Achterbahn Silverstar im Europa-Park herrschen Vertikalbeschleunigungen von bis zu  $4 \text{ g}$  ( $40 \text{ m/s}^2$ ).
- Bei Nesselzellen wird der Stachel mit bis zu  $5.410.000 \text{ g}$  beschleunigt.
- Bei einer Atombombenexplosion werden Beschleunigungen von bis zu 100 Milliarden  $g$  erreicht.
- Am Ereignishorizont eines Schwarzen Lochs mit etwa 3 Sonnenmassen werden etwa 500 Milliarden  $g$  erzeugt.

## Umgangssprachliche Verwendung

- Bei Kraftfahrzeugen wird die erreichbare Beschleunigung als ein wesentlicher Parameter zur Klassifizierung der Leistung verwendet. Es wird dabei jedoch nicht direkt die physikalische Größe angegeben (die ohnehin je nach Geschwindigkeit und Fahrzustand verschieden ist), sondern meist eine Art Mittelwert in der Form „Sekunden von 0 auf 100 km/h“ (auch 160 oder 200 km/h).
- Die „Kosmologische Beschleunigung“ ist ein für die *Expansion des Universums* verwendeter Ausdruck.
- In der Psychologie wird die subjektiv empfundene zunehmende Geschwindigkeit im täglichen Leben mit der Alterung in Verbindung gebracht (siehe hierzu auch Entschleunigung, Gerontologie).

## siehe auch

- Dynamik (Physik)

## Weblinks

- Programm, mit dem Bewegungen mit beliebigen (auch nicht konstanten!) Beschleunigungen berechnet werden können <sup>[1]</sup>
- Untersuchungen zur Beschleunigung an der Atwoodschen Fallmaschine <sup>[2]</sup>

ckb: J□;

## Referenzen

[1] <http://newton2.slueck.de>

[2] <http://archiv.christoph-hoffmann.de/ESS/Physik/Versuch12-5.pdf>

---

# Quellen und Bearbeiter des Artikels

**Bewegung (Physik)** *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=66211008> *Bearbeiter:* Avoided, Blechlawinenhund, Entlinkt, Euphoriceyes, Frosty79, Gary Dee, Howwi, Hydro, Kanapee, Krawi, MrBurns, NCC1291, Nikkis, OecherAlemanne, Pjacobi, Redf0x, Regi51, S1, Tönjes, W!B., Wolfgang1018, YourEyesOnly, Zipferlak, 23 anonyme Bearbeitungen

**Kinematik** *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=66145264> *Bearbeiter:* 790, Alex P., Allen McC., AndreasPraefcke, Bdk, Bierdimpfl, Carstor, Cdang, Chaddy, Cljk, Conny, Daniel B., Dietmar13, Don Magnifico, Dr.Marbuse, Ervog, Euphoriceyes, FischX, Forbfruit, Gerd Taddicken, Grumbler, Hagbard, Heeey, Heikoschmitz, Il Stregone, Juesch, Kajak, Kku, MBerg, Martin-vogel, Merkel, MovGP0, Mrmorgana, Nikai, Norbert Dragon, Osalkah, Proxima, Quintilis, Rocks88, Schaengel89, Schulzjo, Shelter, Staro1, Striegistaler, Studi111, Tarks, Taschenrechner, Thomas Magnet, Thorbojern, Ulrich.fuchs, UvM, 57 anonyme Bearbeitungen

**Koordinatensystem** *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=66193050> *Bearbeiter:* 24-online, Aglarech, Aka, Alexandra lb, Alexkin, Anneke Wolf, BK-Master, Balz, Berni, BirgitLachner, Blauer elephant, Blaufisch, Chefzapp, Cinemental, Cjesch, Ckeen, Curtis Newton, DasBee, Der.Traeumer, DerHexer, Diba, Diorit, Einmaliger, El., EricPoehlsen, Franzl aus tirol, Frau Holle, Fritz, Geof, HaSee, Hafenbar, He3nry, Herr Klugbeisser, Howwi, J.Rohrer, Jan G, Jan eissfeldt, Katharina, Kku, Kopoltra, LKD, Langläufer, Lupussy, MalteAhrens, ManfredK, Martin-vogel, Micha L. Rieser, Mikl, Mikue, MilesTeg, Minderbinder, MsChaos, Mudd1, Na23k6, Netpilots, P. Birken, Pacogo7, Paeng, PeeCee, Peter Steinberg, Peter200, Querverplänkler, RoB, S1, Schewek, Schlurher, Sinn, Stefan, Stefan Kühn, SteffenB, Suricata, Taxiarchos228, Terabyte, Timekeeper, Totenmontag, Tsor, Twenty-nine, Ulrich.fuchs, W!B., WAH, Wfstb, Wiedemann, Wolfgang1018, Wuzur, Yonatan, Youandme, YourEyesOnly, Zumbo, Zwikki, 121 anonyme Bearbeitungen

**Geschwindigkeit** *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=66322580> *Bearbeiter:* 24-online, Aka, Alexander.stohr, Alfred Grudszus, Allen McC., AndreasPraefcke, Andy king50, Asdert, BLueFiSH.as, Baumfreund-FFM, Ben Ben, Ben-Oni, Ben-Zin, Berlin-Jurist, Bernd vdB, BerndGehrmann, Bobbl, Boehm, C-M, Calynka, Christian Specht, ChristophDemmer, Clemensfranz, Complex, Cäsium137, D, Darkweasel, DavidDerGroße, Der.Traeumer, DerHexer, Diba, Dickbauch, Dr.tux, Dubby, Duesi, Dufo, Dundak, Dupréz, Ebs, Elya, Engie, Fab, Farino, Felix Stember, Filzstift, Floklk, Flynx, Fristu, Geisslr, Georg Slickers, Gerhardvalentin, Gree, Gustavf, HaeB, He3nry, Head, Heikoschmitz, Hidden, Hofres, Holger666, Ian Dury, Ichmichi, Inxavis, Ireas, Jergen, Johanna72, Jonathan Hornung, Joni2, Joriki, Jpp, KaHe, Kai11, KaiMartin, Kein Einstein, Kevinol, Kku, Krasnoj, Krawi, Kroschka Ru, Körnerbrötchen, Lordsteff, MFM, Ma-Lik, Magnummandel, Manecke, MarquardtM, Martin-vogel, Matthias M., Matzematik, Media lib, Metaxa, Mike.lifeguard, Mnh, MovGP0, MrBurns, MrTux, MrX, Nick-zug, Ninjamask, Numbo3, OsGr, Peter Steinberg, Peter200, Pfalzfrank, Philipendula, Piepmatz, Proxima, Pygmalion, Rainer Nase, Regi51, Rhododendronbusch, RobertLechner, RolandS, Roo1812, S1, SPEziFiSH, STBR, Saperaud, Schlurher, Schwarzseher, Serpens, Simon.bgdt, Sinn, SiriusB, Skaldo, Skriptor, Slomox, Sloyment, Spectrums, St.Krekeler, Studi111, Succu, Thuringius, Tsor, Tbya, Tuxman, Ulz, Umherirrender, Umweltschützen, Usien, Von der grün, W!B., WAH, Wangen, Wikibach, Wikipediaphil, Wikisearcher, Wissen, Wolfgang.Pfalzgraf, Wolfgang1018, Wolfgangbeyer, Wst, Wunderknabe, Wurzelndrei, Yoky, YourEyesOnly, Zaibatsu, conversion script, 240 anonyme Bearbeitungen

**Beschleunigung** *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65557991> *Bearbeiter:* 1-1111, 6D, Abrakadabra, Aka, Andim, Andreas 06, Apophis27, Aresch, BJ Axel, Baumfreund-FFM, Berlin-Jurist, Bernd vdB, Boehm, ChristophDemmer, Church of emacs, Clins, Cmoder, Complex, D, DasBee, DerHexer, Diba, Ebs, Einemnet, El., Engie, Experte zweiter Klasse, Farino, Fleischlaible, Fomafix, Franzl aus tirol, Frau Holle, Gerhardvalentin, Gut informiert, He3nry, Heikoschmitz, Howwi, Hubertl, Ixitixel, JFKCom, Jacks grinsende Rache, Joschi71, Jpp, Kallistratos, Karl-Henner, Kku, Kolossos, Krasno, Krawi, Leonhard Ochs, Lustiger seth, Ma-Lik, Markus Bärlocher, Martin-vogel, MikeTheGuru, Mnh, Mosaik, MovGP0, MrBurns, Olei, Ot, Pendulin, Peter200, Phrood, Pill, Proxima, Quibbler, RokerHRO, Rolands, Ryzaan, S1, Saethwr, Schluddi, Schmidtdchen, Schnieftee, Seewolf, Sicherlich, Sinn, Stefan64, Stfn, Studi111, Taadma, Talaris, Thgoiter, Thornard, Tobi B., Tönjes, Ulfbastel, Unscheinbar, UvM, Video2005, Voyager, W!B., Wiegels, Wikipediaphil, Wipape, Wolfgang1018, YourEyesOnly, Zagreus, Zendo3, Zinnmann, 10-8-151, 164 anonyme Bearbeitungen

# Quellen, Lizenzen und Autoren des Bildes

**Datei:Hinweisschild\_hydrant.jpg** *Quelle:* [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Hinweisschild\\_hydrant.jpg](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Hinweisschild_hydrant.jpg) *Lizenz:* GNU Free Documentation License *Bearbeiter:* Bitzer, MB-one, Saperaud, 1 anonyme Bearbeitungen

**Datei:Mannheim-Quadrat.jpg** *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Mannheim-Quadrat.jpg> *Lizenz:* GNU Free Documentation License *Bearbeiter:* AndreasPraefcke, Frank-m, Immanuel Giel

**Datei:Koordinatensysteme.svg** *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Koordinatensysteme.svg> *Lizenz:* GNU Free Documentation License *Bearbeiter:* Benutzer:Paeng

**Datei:Koordinatensystem.png** *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Koordinatensystem.png> *Lizenz:* GNU Free Documentation License *Bearbeiter:* Darapti, Maksim

**Datei:Cartesian\_coordinate\_system\_handedness.svg** *Quelle:* [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Cartesian\\_coordinate\\_system\\_handedness.svg](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Cartesian_coordinate_system_handedness.svg) *Lizenz:* GNU Free Documentation License *Bearbeiter:* Darapti, Gustavb, 1 anonyme Bearbeitungen

**File:Sprint von zwei fuussballspielern.JPG** *Quelle:* [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Sprint\\_von\\_zwei\\_fuussballspielern.JPG](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Sprint_von_zwei_fuussballspielern.JPG) *Lizenz:* unbekannt *Bearbeiter:* User:Usien

**Datei:Bogenmass\_Weglaenge.svg** *Quelle:* [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Bogenmass\\_Weglaenge.svg](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Bogenmass_Weglaenge.svg) *Lizenz:* Public Domain *Bearbeiter:* User:Ttbya

# Lizenz

## Wichtiger Hinweis zu den Lizenzen

Die nachfolgenden Lizenzen beziehen sich auf den Artikeltext. Im Artikel gezeigte Bilder und Grafiken können unter einer anderen Lizenz stehen sowie von Autoren erstellt worden sein, die nicht in der Autorenlister erscheinen. Durch eine noch vorhandene technische Einschränkung werden die Lizenzinformationen für Bilder und Grafiken daher nicht angezeigt. An der Behebung dieser Einschränkung wird gearbeitet. Das PDF ist daher nur für den privaten Gebrauch bestimmt. Eine Weiterverbreitung kann eine Urheberrechtsverletzung bedeuten.

### Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported - Deed

Diese "Commons Deed" ist lediglich eine vereinfachte Zusammenfassung des rechtsverbindlichen Lizenzvertrages ([http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen\\_Commons\\_Attribution-ShareAlike\\_3.0\\_Unported](http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported)) in allgemeinverständlicher Sprache.

Sie dürfen:

- das Werk bzw. den Inhalt **vervielfältigen, verbreiten und öffentlich zugänglich machen**
- Abwandlungen und Bearbeitungen** des Werkes bzw. Inhaltes anfertigen

Zu den folgenden Bedingungen:

- Namensnennung** — Sie müssen den Namen des Autors/Rechteinhabers in der von ihm festgelegten Weise nennen.
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen** — Wenn Sie das lizenzierte Werk bzw. den lizenzierten Inhalt bearbeiten, abwandeln oder in anderer Weise erkennbar als Grundlage für eigenes Schaffen verwenden, dürfen Sie die daraufhin neu entstandenen Werke bzw. Inhalte nur unter Verwendung von Lizenzbedingungen weitergeben, die mit denen dieses Lizenzvertrages identisch, vergleichbar oder kompatibel sind.

Wobei gilt:

- Verzichtserklärung** — Jede der vorgenannten Bedingungen kann aufgehoben werden, sofern Sie die ausdrückliche Einwilligung des Rechteinhabers dazu erhalten.
- Sonstige Rechte** — Die Lizenz hat keinerlei Einfluss auf die folgenden Rechte:
  - Die gesetzlichen Schranken des Urheberrechts und sonstigen Befugnisse zur privaten Nutzung;
  - Das Urheberpersönlichkeitsrecht des Rechteinhabers;
  - Rechte anderer Personen, entweder am Lizenzgegenstand selber oder bezüglich seiner Verwendung, zum Beispiel Persönlichkeitsrechte abgebildeter Personen.
- Hinweis** — Im Falle einer Verbreitung müssen Sie anderen alle Lizenzbedingungen mitteilen, die für dieses Werk gelten. Am einfachsten ist es, an entsprechender Stelle einen Link auf <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.de> einzubinden.

### Haftungsbeschränkung

Die „Commons Deed“ ist kein Lizenzvertrag. Sie ist lediglich ein Referenztext, der den zugrundeliegenden Lizenzvertrag übersichtlich und in allgemeinverständlicher Sprache aber auch stark vereinfacht wiedergibt. Die Deed selbst entfaltet keine juristische Wirkung und erscheint im eigentlichen Lizenzvertrag nicht.

## GNU Free Documentation License

Version 1.2, November 2002

Copyright (C) 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc.

51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies

of this license document, but changing it is not allowed.

### 0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

### 1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable Transparent formats include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ, in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History.") To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties; any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

### 2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

### 3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

### 4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing modification and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- Preserve all the copyright notices of the Document.
- Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- Include an unaltered copy of this License.
- Preserve the section Entitled "History". Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
- Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words to a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

### 5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need not contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

## 6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects. You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## 7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## 8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

## 9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

## 10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

## ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (c) YEAR YOUR NAME.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document

under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2

or any later version published by the Free Software Foundation;

with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts.

A copy of the license is included in the section entitled

"GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the

Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.