# Übungen zur Vorlesung Physik für Ingenieure II
Prof. Dr. L. Kipp
Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungen

**Allgemeines Lösungsverfahren: Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

Eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung ist durch

$$\ddot{x} + f(t)\dot{x} + g(t)x = h(t) \tag{1}$$

gegeben, wobei $x(t)$, $f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ Funktionen von $t$ sind. Ist $h(t) \equiv 0$, so ist sie *homogen.* Sind ferner $f(t) \equiv a$ und $g(t) \equiv b$ konstant ($a$ und $b$ unabhängig von $t$), also

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \tag{2}$$

so liegt eine *lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* vor. Für diesen speziellen Typus von Differentialgleichungen gibt es ein allgemeines Lösungsverfahren:

- Man führt den sogenannten $e$-Ansatz durch:

  $$x(t) = \exp(\lambda t). \tag{3}$$

  Dies ist noch nicht die endgültige Lösung!

- Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man damit als sogenannte *charakteristische Gleichung* ein Polynom in $\lambda$.

- Ihre zwei Lösungen (im Falle eine Differentialgleichung 2. Ordnung) $\lambda_1$ und $\lambda_2$ geben, wenn sie nicht gerade zusammenfallen, zwei *Fundamentallösungen* $x_1(t) = \exp(\lambda_1 t)$ und $x_2(t) = \exp(\lambda_2 t)$. Falls die charakteristische Gleichung nur eine reelle Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ hat, so erhält man die beiden Fundamentallösungen $x_1(t) = \exp(\lambda t)$ und $x_2(t) = t\exp(\lambda t)$.

- Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist dann als beliebige Linearkombination der Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gegeben:

  $$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t). \tag{4}$$

  Die Konstanten $C_1$ und $C_2$ können durch die *Anfangsbedingungen* (z.B. $x(t = 0)$ und $\dot{x}(t = 0)$) für ein spezielles Problem bestimmt werden, so daß eine *spezielle Lösung* $x(t)$ der Differentialgleichung gewonnen wird.

**Allgemeines Lösungsverfahren: Lineare inhomogene Differentialgleichungen**

Finden Sie irgendeine (einfache) Lösung $x_0(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung. Alle anderen Lösungen erhalten Sie durch Addition der Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

$$x(t) = x_0(t) + C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t). \tag{5}$$