

Wheatstone'sche Brücke mit PT1000

Stephan I. Böttcher

11. Juni 2020

Zusammenfassung

Die Temperatur ist

$$T = T_{R_2} + 0,260 \frac{^{\circ}\text{C}}{\Omega} \times 4R_2 \frac{U_T}{U_B}.$$

Die Leistung im PT1000 ist

$$P = \frac{U_B^2}{4R_1}.$$

Inhaltsverzeichnis

1	Die Wheatstonesche Brücke	2
2	Brückengleichung	3
3	Linearisierung	4
4	Leistung	5
A	Lösung des Gleichungssystems	5
B	Maxima	7

Abbildungsverzeichnis

1	Schaltbild der Brückenschaltung mit Vorwiderstand. Positive Spannungen und Ströme werden von oben nach unten oder von links nach rechts betrachtet.	2
---	---	---

1 Die Wheatstonesche Brücke

Der Widerstand R_4 ist ein PT1000 Temperaturmesswiderstand aus Platin mit positivem Temperaturkoeffizienten (PTC)

$$c_0 = 3850 \frac{\text{ppm}}{^\circ\text{C}}. \quad (1)$$

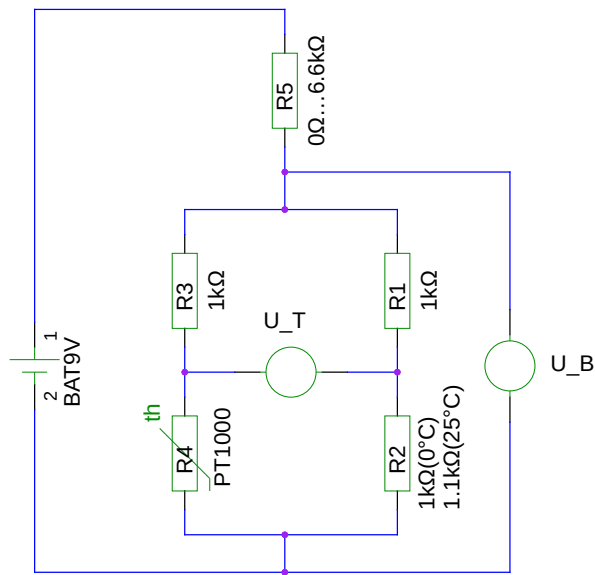


Abbildung 1: Schaltbild der Brückenschaltung mit Vorwiderstand. Positive Spannungen und Ströme werden von oben nach unten oder von links nach rechts betrachtet.

Bei der Temperatur $T_0 = 0^\circ\text{C}$ hat der PT1000 den Widerstand $R_{4;0^\circ\text{C}} = 1000\,\Omega$. Damit erhalten wir den Koeffizienten

$$C = \frac{1}{c_0 R_{4;0^\circ\text{C}}} = \frac{1}{3850 \frac{\text{ppm}}{^\circ\text{C}} \times 1\,\text{k}\Omega} = 0.260 \frac{^\circ\text{C}}{\Omega}.$$

Der Widerstand R_2 soll so gewählt werden, daß er in etwa den Wert von R_4 bei der zu messenden Temperatur hat, $R_2 \approx R_4$. Die Differenz $\Delta R = R_4 - R_2$ ist also klein verglichen mit den anderen Widerstandswerten. Für Messungen in Eiswasser wählen wir $R_2 = 1\,\text{k}\Omega$, $T_{R_2} = 0^\circ\text{C}$. Für Messungen der Umgebungsluft mit $R_2 = 1,1\,\text{k}\Omega$ ist $T_{R_2} = 26,0^\circ\text{C}$. Die Widerstände R_1 und R_2 sollen gleich sein mit einem Wert der sich nicht zu sehr vom Wert von R_2 unterscheidet. Wir wählen $R_1 = R_2 = 1\,\text{k}\Omega$. Mit dem Vorwiderstand R_5 können wir den Strom und damit auch die Leistung durch den PT1000 verändern.

2 Brückengleichung

Wir nehmen für jeden Widerstand der Brücke das Ohmsche Gesetz

$$U_1 = R_1 I_1, \quad (2)$$

$$U_2 = R_2 I_2, \quad (3)$$

$$U_3 = R_3 I_3, \quad (4)$$

$$U_4 = R_4 I_4. \quad (5)$$

Dazu zwei Kirchhoffsche Knotenregeln

$$I_1 = I_2, \quad (6)$$

$$I_3 = I_4, \quad (7)$$

und drei Maschenregeln

$$U_B = U_1 + U_2, \quad (8)$$

$$U_B = U_3 + U_4, \quad (9)$$

$$U_T = U_4 - U_2. \quad (10)$$

Dieses Gleichungssystem müssen wir lösen. Bekannt sind R_1 , R_2 , R_3 , U_B und U_T . die Unbekannten sind U_1 , I_1 , U_2 , I_2 , U_3 , I_3 , U_4 , I_4 , und R_4 . Wir

brauchen davon nur U_4 , I_4 , und R_4 . Wir erhalten, nach einigen Umformungen, und mit $R_3 = R_1$,

$$R_4 = R_2 + \frac{U_T}{U_B} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1} \frac{1}{1 - \frac{U_T}{U_B} \frac{R_1 + R_2}{R_1}}, \quad (11)$$

$$U_4 = U_T + U_B \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (12)$$

$$I_4 = \frac{U_B}{R_1 + R_2} - \frac{U_T}{R_1}. \quad (13)$$

3 Linearisierung

In Gl. (11) vernachlässigen wir den letzten Term,

$$\Delta R = R_4 - R_2 = \frac{U_T}{U_B} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1} + \mathcal{O}\left(\frac{U_T}{U_B}\right)^2. \quad (14)$$

Dann nutzen wir $\Delta = R_2 - R_1 \ll R_2$,

$$\frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1} = \frac{(2R_1 + \Delta)^2}{R_1} = \frac{4R_1^2 + 4R_1\Delta + \Delta^2}{R_1} \quad (15)$$

$$= \frac{4(R_1 + \Delta)R_1 + \Delta^2}{R_1} = \frac{4R_2R_1 + \Delta^2}{R_1} \quad (16)$$

$$= 4R_2 + \frac{\Delta^2}{R_1} = 4R_2 + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta}{R_2}\right)^2. \quad (17)$$

Die Widerstandsänderung ist damit in linearer Näherung

$$\Delta R = 4R_2 \frac{U_T}{U_B}. \quad (18)$$

Multipliziert mit dem Temperaturkoeffizienten C erhalten wir die Abweichung von der Abgleichtemperatur $T(R_2)$

$$\Delta T = T - T_{R_2} = C \times 4R_2 \times \frac{U_T}{U_B}. \quad (19)$$

4 Leistung

Die Leistung $P = U_4 I_4$ im Messwiderstand führt zu einer lokalen Temperaturerhöhung, die den Messwert verfälscht. Mit Gl. (12) und (13) erhalten wir

$$P = U_4 I_4 \quad (20)$$

$$= \left(U_T + U_B \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{U_B}{R_1 + R_2} - \frac{U_T}{R_1} \right) \quad (21)$$

$$= U_B^2 \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} - U_B U_T \frac{\Delta}{R_1 (R_1 + R_2)} - U_T^2 \frac{1}{R_1}. \quad (22)$$

Wir vernachlässigen die Terme $\mathcal{O}(U_T^2)$ und $\mathcal{O}(U_T \Delta)$, verwenden eine Rechnung wie in Gl. (17) und erhalten

$$P = \frac{U_B^2}{4R_1}. \quad (23)$$

A Lösung des Gleichungssystems

Wir lösen das Gleichungssystem Gl. (2) bis (10), neun Gleichungen mit neun Unbekannten. Zunächst eliminieren wir alle Ströme mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes aus den Knotenregeln

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}, \quad (24)$$

$$\frac{U_3}{R_3} = \frac{U_4}{R_4}. \quad (25)$$

Damit haben wir fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , und R_4 . Wir eliminieren U_1 und U_3 ,

$$U_1 = U_B - U_2, \quad (26)$$

$$U_3 = U_B - U_4, \quad (27)$$

$$\frac{U_B - U_2}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}, \quad (28)$$

$$\frac{U_B - U_4}{R_3} = \frac{U_4}{R_4}. \quad (29)$$

Diese Gleichunge lösen wir nach U_2 und U_4 auf,

$$U_2 = U_B \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (30)$$

$$U_4 = U_B \frac{R_4}{R_3 + R_4}. \quad (31)$$

Das sind die Formeln für die beiden Spannungsteiler R_1/R_2 und R_3/R_4 . Die Brückenspannung U_T ist die Differenz dieser Spannungen

$$U_T = U_4 - U_2 = U_B \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right). \quad (32)$$

Diese Gleichung müssen wir nach R_4 auflösen. Erst die Bruchstriche weg,

$$U_T(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) = U_B(R_4(R_1 + R_2) - R_2(R_3 + R_4)). \quad (33)$$

Dann die Klammern weg,

$$U_T R_1 R_3 + U_T R_2 R_3 + U_T R_1 R_4 + U_T R_2 R_4 = U_B R_4 R_1 - U_B R_2 R_3. \quad (34)$$

Sortieren, Terme mit R_4 links, den Rest nach rechts,

$$U_B R_4 R_1 - U_T R_1 R_4 - U_T R_2 R_4 = U_T R_1 R_3 + U_T R_2 R_3 + U_B R_2 R_3. \quad (35)$$

Klammern wieder rein,

$$R_4 (U_B R_1 - U_T (R_1 + R_2)) = U_T R_3 (R_1 + R_2) + U_B R_2 R_3. \quad (36)$$

Jetzt kommt der Bruchstrich zurück,

$$R_4 = \frac{U_T R_3 (R_1 + R_2) + U_B R_2 R_3}{U_B R_1 - U_T (R_1 + R_2)}. \quad (37)$$

Damit haben wir die Lösung. Wir ziehen nun R_2 ab, und setzen $R_3 = R_1$,

$$\Delta R = R_4 - R_2 = \frac{U_T R_1 (R_1 + R_2) + U_B R_1 R_2}{U_B R_1 - U_T (R_1 + R_2)} - R_2 \quad (38)$$

$$= \frac{U_T R_1 (R_1 + R_2) + U_T R_2 (R_1 + R_2)}{U_B R_1 - U_T (R_1 + R_2)} \quad (39)$$

$$= \frac{U_T}{U_B} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1 - \frac{U_T}{U_B} (R_1 + R_2)} \quad (40)$$

$$= \frac{U_T}{U_B} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1} \frac{1}{1 - \frac{U_T}{U_B} \frac{R_1 + R_2}{R_1}} \quad (41)$$

$$\approx \frac{U_T}{U_B} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1} \left(1 + \frac{U_T}{U_B} \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \quad (42)$$

$$= \frac{U_T}{U_B} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1} + \mathcal{O} \left(\frac{U_T}{U_B} \right)^2 \quad (43)$$

$$= \frac{U_T}{U_B} 4R_2 + \mathcal{O} \left(\frac{\Delta^2}{R_2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{U_T}{U_B} \right)^2. \quad (44)$$

Dabei haben wir für Gl. (42) die binomische Formel $(1+x)^n = 1+nx+\mathcal{O}(x^2)$ angewendet.

Für die Leistung brauchen wir U_4 . Dazu setzen wir Gl. (30) in Gl. (10) ein, wieder mit $R_3 = R_1$,

$$U_4 = U_T + U_2 = U_T + U_B \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (45)$$

Für den Strom I_4 nutzen wir die Knotenregel Gl. (7), das Ohmsche Gesetz Gl. (4), eine neue Maschenregel $U_3 = U_1 - U_T$ und die Lösung des Spannungsteilers für U_1 ,

$$I_4 = I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{U_1 - U_T}{R_1} = \frac{U_B \frac{R_1}{R_1 + R_2} - U_T}{R_1} = \frac{U_B}{R_1 + R_2} - \frac{U_T}{R_1}. \quad (46)$$

B Maxima

Zur Lösung des Gleichungssystems kann das Programm **maxima** verwendet werden. Folgender Script definiert die Gleichungen, die Liste der Unbekannten, und die Lösung.

```
O: [U1=I1*R1, U2=I2*R2, U3=I3*R3, U4=I4*R4];
M: [UB = U1+U2, UB=U3+U4, UT=U4-U2];
K: [I1=I2, I3=I4];
B: [DR=R4-R2];
U: [DR,U4,I4,R4,I1,I2,I3,U1,U2,U3];
L: solve(append(O,M,K,B), U)[1], R3=R1, UT=u*UB, ratsimp;
```

Der Skript wir in die Datei **wheatstone.maxima** gespeichert. Mit dem Befehl

```
display2d:false$ batch("wheatstone.maxima");
```

wird der skript ausgeführt. Das Ergebnis ist

```

(%i1) display2d:false$ batch("wheatstone.maxima");
read and interpret wheatstone.maxima
(%i3) O: [U1 = I1*R1,U2 = I2*R2,U3 = I3*R3,U4 = I4*R4]
(%o3) [U1 = I1*R1,U2 = I2*R2,U3 = I3*R3,U4 = I4*R4]
(%i4) M: [UB = U1+U2,UB = U3+U4,UT = U4-U2]
(%o4) [UB = U2+U1,UB = U4+U3,UT = U4-U2]
(%i5) K: [I1 = I2,I3 = I4]
(%o5) [I1 = I2,I3 = I4]
(%i6) B: [DR = R4-R2]
(%o6) [DR = R4-R2]
(%i7) U: [DR,U4,I4,R4,I1,I2,I3,U1,U2,U3]
(%o7) [DR,U4,I4,R4,I1,I2,I3,U1,U2,U3]
(%i8) ev(L:solve(append(O,M,K,B),U)[1],R3 = R1,UT = u*UB,ratsimp)
(%o8) [DR = -((R2^2+2*R1*R2+R1^2)*u)/((R2+R1)*u-R1),
      U4 = ((R2+R1)*UB*u+R2*UB)/(R2+R1),
      I4 = -((R2+R1)*UB*u-R1*UB)/(R1*R2+R1^2),
      R4 = -((R1*R2+R1^2)*u+R1*R2)/((R2+R1)*u-R1),
      I1 = UB/(R2+R1),
      I2 = UB/(R2+R1),
      I3 = -((R2+R1)*UB*u-R1*UB)/(R1*R2+R1^2),
      U1 = (R1*UB)/(R2+R1),
      U2 = (R2*UB)/(R2+R1),
      U3 = -((R2+R1)*UB*u-R1*UB)/(R2+R1)]
(%o9) "wheatstone.maxima"
(%i10)

```

Literatur

[1] Keine.