LC Schwingkreis

Stephan I. Böttcher

Institut für Experimentelle und Angewandte Physik
Christian Albrechts Universität zu Kiel

Sommersemester 2020

Widerstand, Kondensator und Spule sind lineare Bauelemente. Wenn man die Spannung $u_1(t)$ anlegt, fließt der Strom $i_1(t)$. Entsprechend, wenn der Spannungsverlauf $u_2(t)$ anliegt, dann fließt der Strom $i_2(t)$. Linearität heißt, wenn die Spannung

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \tag{1}$$

angelegt wird, dann fließt der Strom

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t). \tag{2}$$

Lineare Abbildungen werden allgemein durch Integrationskerne $K(t,\tau)$ dargestellt, das sind unendlichdimensionale Matrizen,

$$i(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,\tau)\, u(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{3}$$

Elektronische Schaltungen sind kausal und zeitunabhänging. Das heißt, $K(t,\tau) = 0$ für $\tau > t$, und K hängt nur von der Differenz von t und τ ab,

$$i(t) = \int\limits_{0}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

mit $h(t)$, das ist die Impulsantwort der Schaltung.

Linearkombinationen von harmonischen Schwingungen $|u_0|\cos(\omega t - \varphi)$ mit gleicher Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ sind immer harmonischen Schwingungen der gleichen Frequenz. Das heißt, harmonischen Schwingungen sind Eigenfunktionen linearer Schaltungen. Man kann eine Schaltung vollständig charakterisieren, wenn man Amplitude $|u_0|$ und Phase ϕ für alle Frequenzen angibt. Dafür werden komplexe Zahlen verwendet

$$u_0 = |u_0|\exp(j\phi) = |u_0|\cos\phi + j|u_0|\sin\phi, \tag{5}$$

$$u = u_o\exp(-j\omega t) = u_0\cos\omega t - ju_0\sin\omega t, \tag{6}$$

$$\Re(u) = |u_0|(\cos\phi\cos\omega t + \sin\phi\sin\omega t) = |u_0|\cos(\omega t - \phi) \tag{7}$$

mit $j = \sqrt{-1}$.

Das Verhältnis von Spannung zu Strom eines linearen Bauelements nennt man Impedanz

$$Z(\omega) = \frac{u(t)}{i(t)}. \tag{8}$$

Fließt der Strom

$$i(t) = i_0 \cos \omega t, \tag{9}$$

dann ist die Spannung

$$u(t) = Z\, i(t) = i_0\, \Re(Z) \cos \omega t + i_0\, \Im(Z) \sin \omega t. \tag{10}$$

Das Ohmsche Gesetz ist

$$u = Ri. \tag{11}$$

Die Impedanz des Widerstands ist reel, es gibt keine Phasenverschiebung,

$$Z = R. \tag{12}$$

Am Kondensator ist die Spannung proportional zur Ladung,

$$Q = Cu. \tag{13}$$

In der Elektronik betrachten wir Strom, nicht Ladung,

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \tag{14}$$

Mit $u = u_0 \cos \omega t$ ist

$$i = u_0 C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos \omega t = -u_0 \omega C \sin \omega t. \tag{15}$$

Die Impedanz ist

$$Z = -\frac{u_0 \cos \omega t}{u_0 \omega C \sin \omega t} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}. \tag{16}$$

Je öfter der Kondensator umgeladen wird, um so mehr Strom fließt, umso kleiner ist der Betrag der Impedanz.

An einer Spule wird eine Spannung induziert, wenn sich der Strom, und damit das Magnetfeld, und damit die Energie in der Spule ändert

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{17}$$

Mit $i = i_0 \cos\omega t$ ist

$$u = i_0 L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\omega t = -i_0\omega L\sin\omega t. \tag{18}$$

Die Impedanz ist

$$Z = -\frac{i_0\omega L\sin\omega t}{i_0\cos\omega t} = j\omega L. \tag{19}$$

Je länger die Spannung eine Polarität hat, um so mehr Strom kann sich aufbauen, um so kleiner der Betrag der Impedanz.

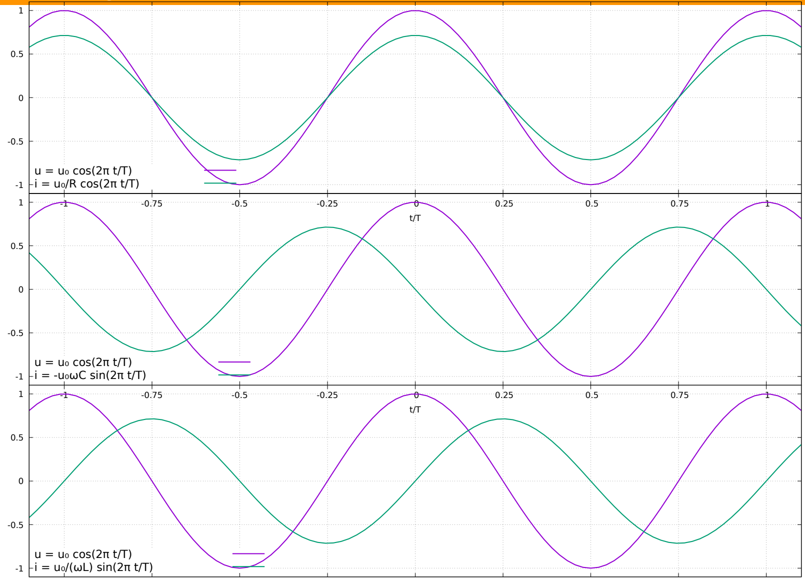
Impedanzen.

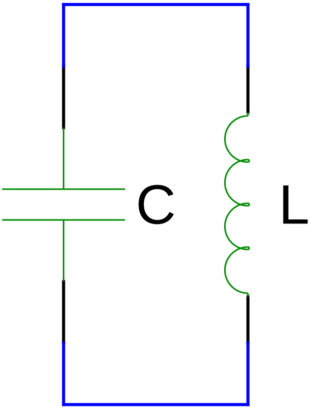
$$U_R = R I_R \qquad Z = R \tag{20}$$

$$I_C = C \frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} \qquad Z = \frac{1}{j\omega C} \tag{21}$$

$$U_L = L \frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} \qquad Z = j\omega L \tag{22}$$

Phasenverschiebung





$$U = U_L = U_C, \tag{23}$$

$$U = L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} = L\dot{I}_L, \tag{24}$$

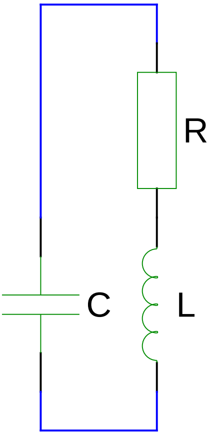
$$I_L = -I_C = -C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -C\dot{U}, \tag{25}$$

$$U = -LC\ddot{U}, \tag{26}$$

$$\ddot{U} + \frac{1}{LC}U = 0, \tag{27}$$

$$\ddot{U} + \omega_0^2 U = 0 \tag{28}$$

$$U = U_0\cos(\omega_0 t - \phi). \tag{29}$$



$$U = RI_L + L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} = RI_L + L\dot{I}_L, \tag{30}$$

$$I_L = -I_C = -C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -C\dot{U}, \tag{31}$$

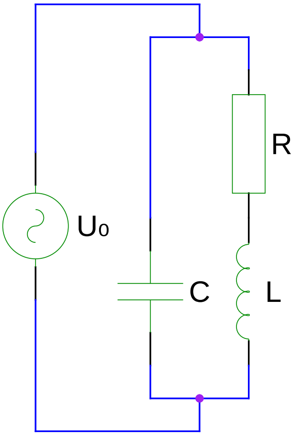
$$U = -RC\dot{U} - LC\ddot{U}, \tag{32}$$

$$\ddot{U} + \frac{R}{L}\dot{U} + \frac{1}{LC}U = 0, \tag{33}$$

$$\ddot{U} + 2\delta\dot{U} + \omega_0^2 U = 0 \tag{34}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0, \tag{35}$$

$$U = U_0 \exp(-\delta t)\cos(\omega t - \phi). \tag{36}$$



$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_L+R} + \frac{1}{Z_C}} \tag{37}$$

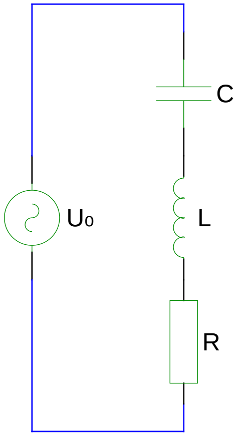
$$= \frac{Z_L + R}{1 + \frac{Z_L}{Z_C} + \frac{R}{Z_C}} \tag{38}$$

$$= \frac{Z_L + R}{1 - \omega^2 LC + \frac{R}{Z_C}} \tag{39}$$

$$= (Z_L + R)\ \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega} \tag{40}$$

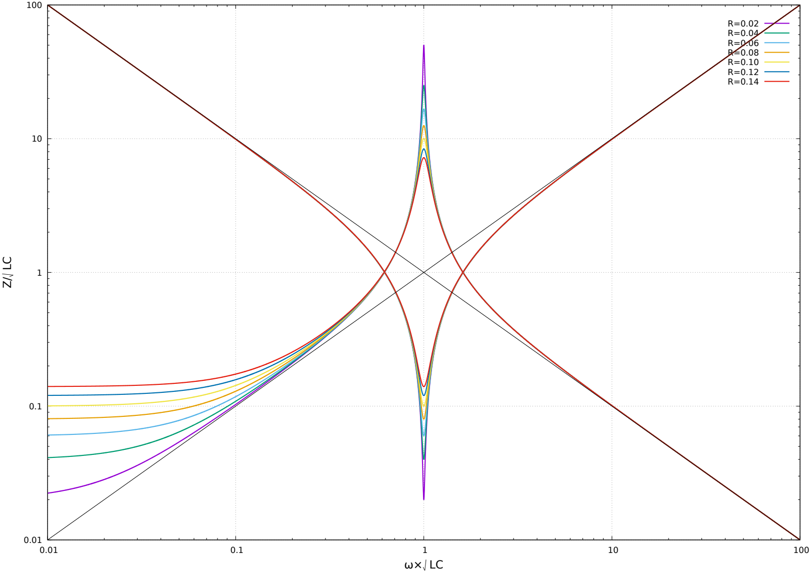
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad 2\delta = \frac{R}{L}. \tag{41}$$

Impedanz

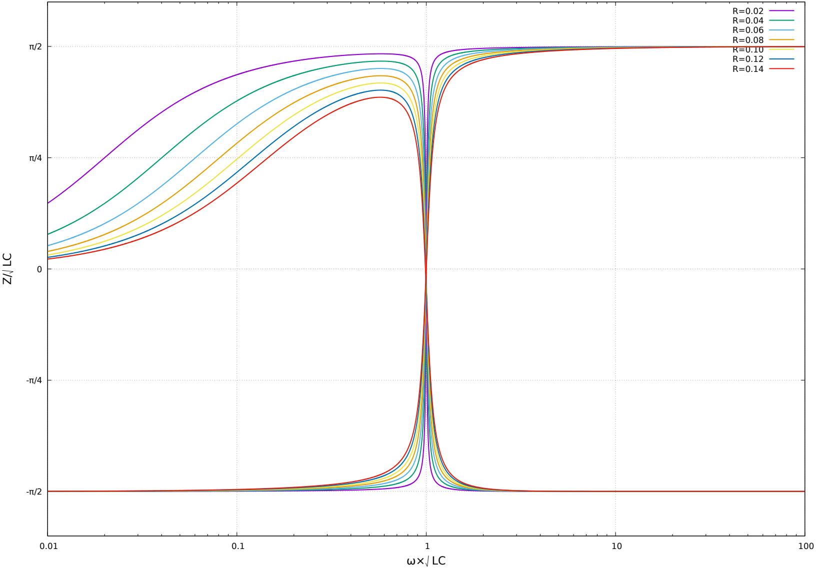


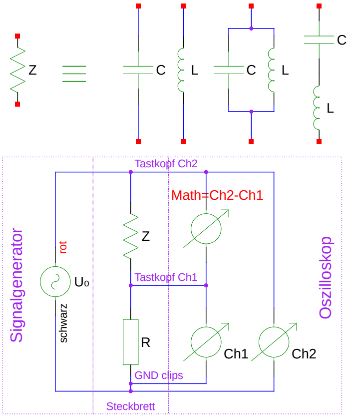
$$
\begin{aligned}
Z &= Z_C + Z_L + R && (42)\\
&= \frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R && (43)\\
&= \frac{1-\omega^2 LC}{j\omega C} + R && (44)\\
&= Z_C\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}{\omega_0^2}, && (45)\\
& Z_L = Z_C\,\frac{\omega^2}{\omega_0^2}. && (46)
\end{aligned}
$$

Betrag der Impedanz



Phase der Impedanz





- Steckbrett: Kondensator $C = 2.2\,\mu\text{F}$, Spule $L = 10\,\text{mH}$, Widerstände.
- Oszilloskop: zwei Kanäle, *Math*-Funktion (skalierbar), *Measure*-Funktion U_{RMS} auch für *Math*.
- Signalgenerator, Sinus, $100\,\text{Hz} \ldots 10\,\text{kHz}$, $5\,\text{V}_{\text{pp}}$.
- Zwei Tastköpfe mit GND und Signal-Klemmen, BNC-Adapter, zwei Kabel mit Klemmen.

Kanal 1 des Oszilloskop misst die Spannung u_1 über dem Widerstand $R = 235\,\Omega$. Diese ist proportional zum Strom i durch die unbekannte Impedanz Z.

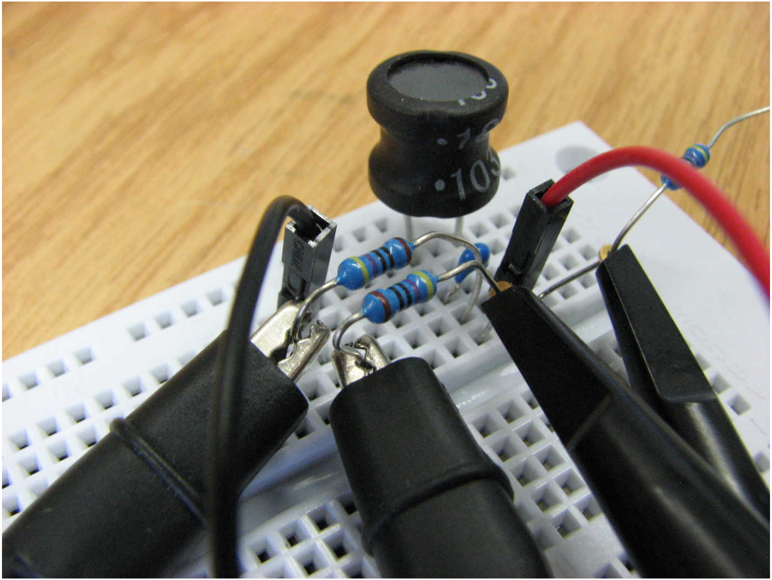
Kanal 2 misst die Spannung u_2 aus dem Signalgenerator.

Math misst die Differenz $u = u_2 - u_1$, das ist die Spannung über der unbekannten Impedanz Z.

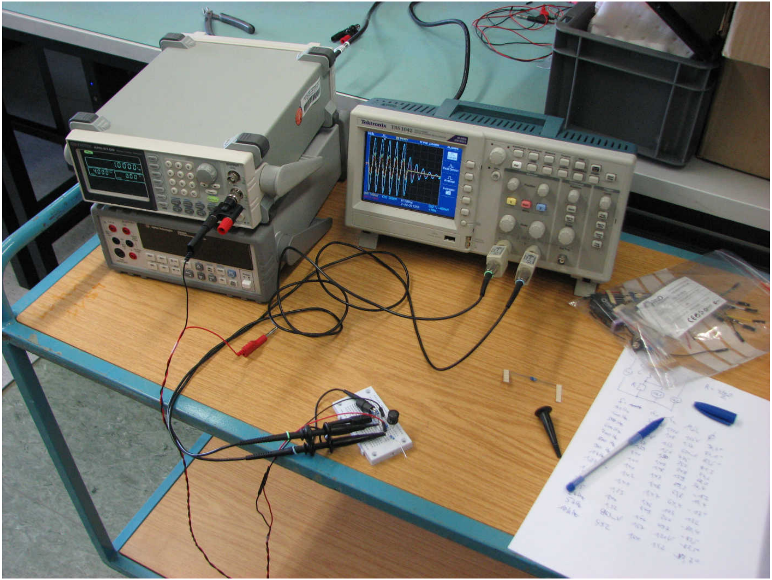
Den Betrag der Impedanz ist

$$|Z| = \frac{u_{\mathrm{rms}}}{i_{\mathrm{rms}}} = R\,\frac{u_{\mathrm{rms}}}{u_{1,\mathrm{rms}}}. \tag{47}$$

Steckbrett



Aufbau




Tektronix
TBS 1042
TWO CHANNEL
DIGITAL STORAGE OSCILLOSCOPE
40 MHz
500 MS/s
AutoRange
Save/Recall
Measure
Acquire
Help
Auto Set
Ref
Utility
Cursor
Display
Default Setup
Single
Run/ Stop
Save
Vertical
Position
1
Math
2
Menu
Scale
Horizontal
Position
Horiz
Set to Zero
Scale
Ext Trig
Trigger
Level
Trig Menu
Set To 50%
Force Trig
Trig View
Probe Check
USB
Flash Drive
300 V CAT II

Arbitrary Function Generator

Oszilloskop

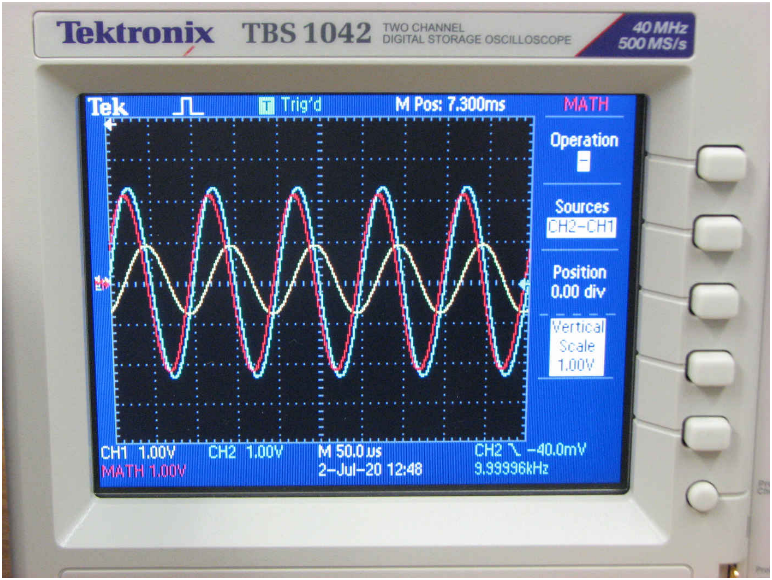
- Trigger
  - Source Ch 2
- Math
  - Ch 2 – Ch 1
- Measure
  - Ch 1 RMS
  - Ch 2 RMS
  - Math RMS
  - Ch1 — Math PHASE
- Acquire
  - Average 128

Arbitrary Function Generator

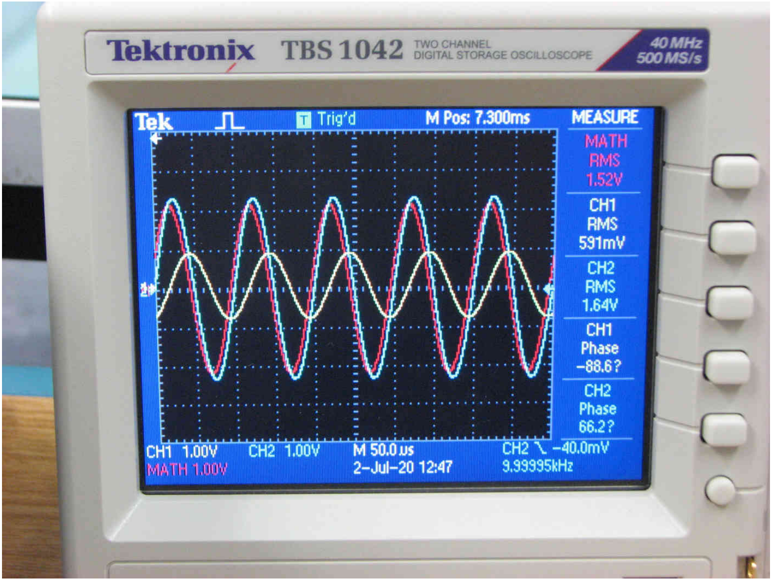
- Sine Wave
- Amplitude 5 V peak to peak
- Offset 0
- Frequency 100 Hz to 10 kHz

Die Frequenz wird in drei Schritten pro Dekade eingestellt, 1, 2, 5, 10, ... Um die Resonanz weitere Werte. Am Oszilloskop werden die Skalen jeweils so angepasst, daß etwa fünf Perioden zu sehen sind, mit möglichst großer Amplitude, auch Math.

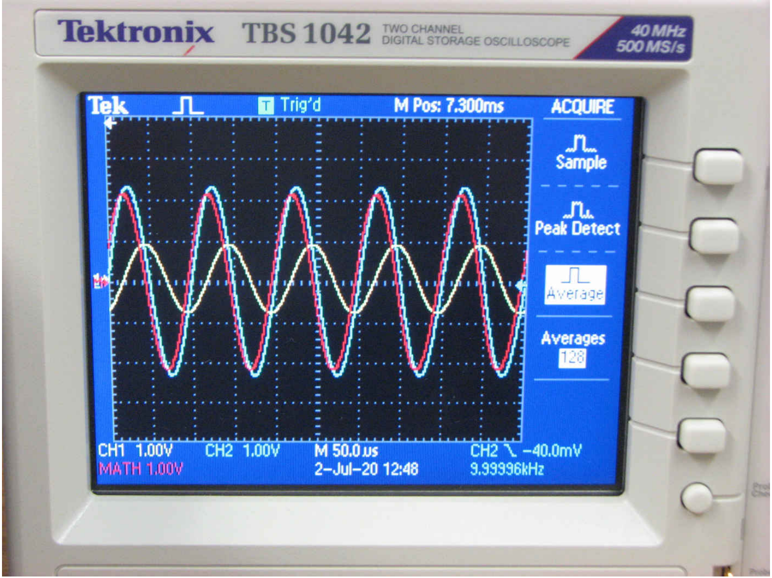
Math-Funktion



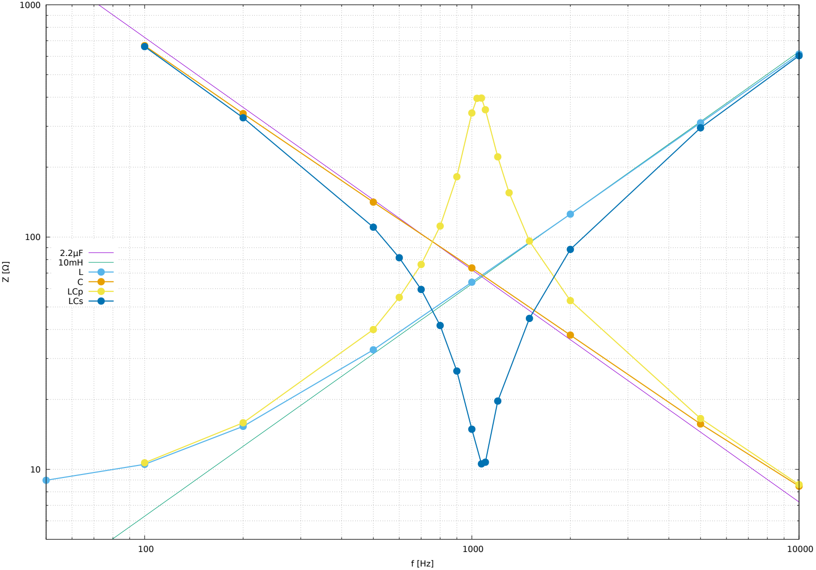
Measure-Funktion



Acquire-Funktion *Average*



Ergebnisse



- Parallelschwingkreis
- $f = 500\,\mathrm{Hz}$
- Trigger: Normal
- Trigger level knapp unter den Amplitudenwert.
- Acquire: Samples

Den roten Stecher schnell vom Signalgenerator abziehen. Wieder einstecken und wiederholen, bis der Ausschwingvorgang schön zu sehen ist.

Ausschwingen