Der pendelnde Besenstiel

Stephan I. Böttcher

Institut für Experimentelle und Angewandte Physik
Christian Albrechts Universität zu Kiel

Sommersemester 2020

Das 2. Newtonsche Axiom. Die Kraft $\vec{F}$ ist das was man braucht, um einen Impulse $\vec{p}$ zu ändern,

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \dot{m}\vec{v} + m\vec{a}. \tag{1}$$

Das 3. Newtonsche Axion ist die Impulserhaltung.

Lineare und Rotationskinematik.

$$\vec{x}, m, \vec{p}, \vec{F} \qquad \varphi, J, L, M \tag{2}$$

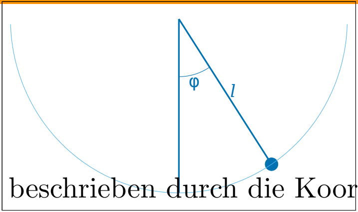
$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \qquad \omega = \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad = \vec{x} \times \vec{v} \tag{3}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad L = J\omega \tag{5}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad M = J\dot{\omega} \quad = \vec{x} \times \vec{F} \tag{6}$$

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \qquad E = \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{7}$$



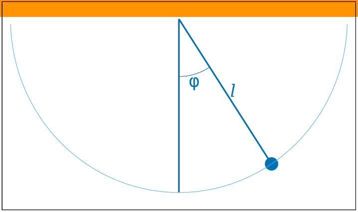
Ein Freiheitsgrad, beschrieben durch die Koordinate φ. Zwei Kräfte, Gravitation und Faden,

$$\vec{F}_G = mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

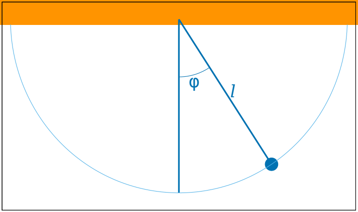
$$\vec{F}_F = F_F \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Kinematisch,

$$\vec{F}_G + \vec{F}_F = m\vec{a} = ml\ddot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}. \quad (10)$$



$$
\begin{aligned}
J\dot{\omega} &= M && (11)\\
ml^2\ddot{\varphi} &= -mg\,l\sin\varphi, && (12)\\
\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi &= 0, && (13)\\
\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi &= 0, && (14)\\
2\pi f &= \sqrt{\frac{g}{l}}. && (15)
\end{aligned}
$$



$$E = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2}J\omega^2 - mgh \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mg\,l\cos\varphi, \tag{18}$$

$$\dot{E} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}ml^2\ddot{\varphi}2\dot{\varphi} + mg\,l\dot{\varphi}\sin\varphi = 0, \tag{19}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{20}$$

Wir suchen eine Funktion, die proportional zu ihrer zweiten Ableitung ist.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi. \tag{21}$$

Lösung:

$$\varphi = a\cos(2\pi f t) + b\sin(2\pi f t), \tag{22}$$

mit

$$2\pi f = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{23}$$

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, der an einer Drehachse aufgehängt ist. Von den sechs Freiheitsgraden des starren Körpers sind also fünf durch die Achse eingeschränkt. Die Bewegungsgleichung und Winkelfrequenz ist

$$J\ddot{\varphi} = -mgs\sin\varphi, \tag{24}$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{mgs}{J}}. \tag{25}$$

mit dem Tragheitsmoment J und den Abstand des Schwerpunktes zur Drehachse s.

$$\varrho = \frac{m}{l}, \tag{26}$$

$$M_0 = m = \int\limits_0^l \mathrm{d}x\,\varrho, \tag{27}$$

$$\frac{M_1}{M_0} = s = \frac{1}{m}\int\limits_0^l \mathrm{d}x\,x\varrho = \frac{l}{2}, \tag{28}$$

$$M_2 = J = \int\limits_0^l \mathrm{d}x\,x^2\varrho = \frac{1}{3}ml^2. \tag{29}$$

Laut Wikipedia, mit $r \ll l$, $s = l/2$ und Anwendung des Satzes von Steiner

$$\begin{aligned} J_S &= \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m r^2 = \frac{1}{12} m l^2, && (30) \\ J &= J_S + m s^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2. && (31) \end{aligned}$$

Damit ist die Bewegungsgleichung des Besenstiels

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{J}\varphi = \ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\varphi = 0, \tag{32}$$

und die Winkelfrequenz ist

$$2\pi f = \sqrt{\frac{3g}{2l}}. \tag{33}$$

Der Aufhängepunkt sei um die Strecke b vom Ende des Stabs versetzt, $|b| \ll l$. Damit reduziert sich sowohl das Drehmoment, als auch das Trägheitsmoment. Für eine Aufhängeschlaufe gilt $b < 0$. Für ein Loch im Stiel ist $b > 0$.

$$s = \frac{l}{2} - b = \frac{l}{2}\left(1 - 2\frac{b}{l}\right), \tag{34}$$

$$J = \frac{1}{12}ml^2 - ms^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml - mlb + mb^2 \tag{35}$$

$$= \frac{1}{3}ml^2\left(1 - 3\frac{b}{l}\right), \tag{36}$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{mgs}{J}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}\sqrt{\frac{1-2\frac{b}{l}}{1-3\frac{b}{l}}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}\left(1 + \frac{b}{2l}\right), \tag{37}$$

in erster Ordnung von $b/l \ll 1$.

$$J = \frac{m}{V}\int_{-r}^{r} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \mathrm{d}z \int_{0}^{l} \mathrm{d}x \; (x^2+y^2) \tag{38}$$

$$= \frac{m}{V}\int_{-r}^{r} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \mathrm{d}z \; \left(\frac{l^3}{3}+ly^2\right) \tag{39}$$

$$= \frac{m}{V}\int_{-r}^{r} \mathrm{d}y \; 2\sqrt{r^2-y^2}\left(\frac{l^3}{3}+ly^2\right) \tag{40}$$

$$= \frac{m}{V}\left(\frac{l^3\pi r^2}{3}+\frac{l\pi r^4}{4}\right) \tag{41}$$

$$= \frac{m}{\pi r^2 l}\left(\frac{l^3\pi r^2}{3}+\frac{l\pi r^4}{4}\right) = m\frac{l^2}{3}+m\frac{r^2}{4}. \tag{42}$$

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{m}{V}\int_0^r \mathrm{d}y \int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}\phi \int_0^l \mathrm{d}x\ (x^2 + y^2\sin^2\phi) && (43)\\
&= \frac{m}{V}\int_0^r \mathrm{d}y \int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}\phi \left(\frac{l^3}{3} + ly^2\sin^2\phi\right) && (44)\\
&= \frac{m}{V}\int_0^r \mathrm{d}y \left(\frac{2\pi y l^3}{3} + \pi y^3 l\right) && (45)\\
&= \frac{m}{V}\left(\frac{l^3\pi r^2}{3} + \frac{l\pi r^4}{4}\right) && (46)\\
&= m\frac{l^2}{3} + m\frac{r^2}{4}. && (47)
\end{aligned}
$$