

Statistik für das NFPP

Stephan I. Böttcher

Institut für Experimentelle und Angewandte Physik
Christian Albrechts Universität zu Kiel

Sommersemester 2021

Das Resultat der Messung einer physikalischen Größe ist eine Zufallszahl. Ziel der Messung ist, die Parameter oder die Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallszahlen zu bestimmen.

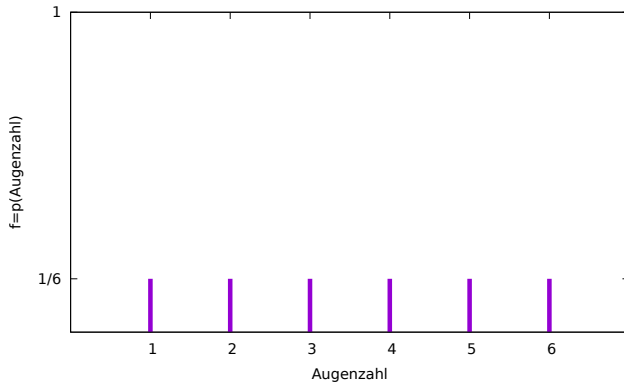
Meist wird eine Schätzung des Erwartungswertes und eine Schätzung der Standardabweichung (Quadratwurzel der Varianz) als Messgröße und Fehlerangabe angegeben.

Der zentrale Grenzwertsatz sagt uns, da eine Messung von vielen kleinen Fehlerquellen beeinflusst wird, daß die Messgrößen oft als normalverteilt angenommen werden können.

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(x)$ ist eine Funktion einer Zufallsvariablen x , die für jeden möglichen Wert von x angibt, wie wahrscheinlich es ist, daß dieser Wert eintritt.

Für diskrete Zufallsgrößen gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für jeden möglichen Wert von x die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß dieser Wert eintritt.

Beispiel: Würfel



Für kontinuierliche Zufallsgrößen ist $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{dp(x)}{dx}. \quad (1)$$

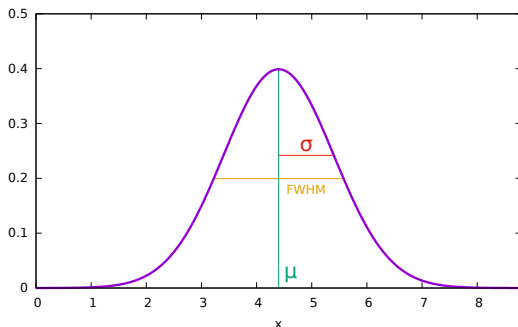
$p(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Wert kleiner oder gleich x eintritt. Die Wahrscheinlichkeit, daß x in einen gegebenen Bereich (x_1, x_2) fällt ist

$$p(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (2)$$

Die wichtigste Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Normalverteilung, auch Gaussverteilung.

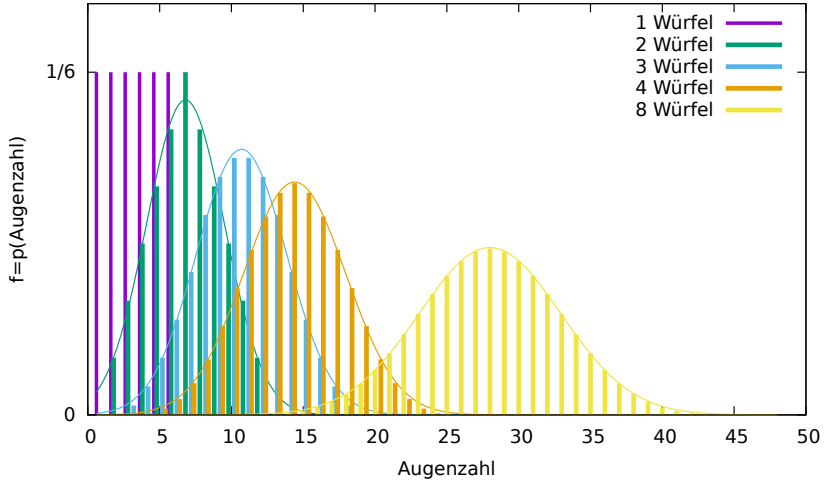
Mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ist die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$



Der zentrale Grenzwertsatz (central limit theorem) besagt etwa:

Wenn man die Summe von genügend vielen unabhängigen weitgehend beliebig verteilten Zufallszahlen bildet, dann erhält man eine annähernd normalverteilte Zufallszahl.



Wenn man unabhängige Zufallsereignisse zählt, dann erhält man eine Poisson verteilte Zufallszahl. Die Wahrscheinlichkeit bei der nächsten Zählung n Ereignisse zu zählen ist

$$P_{\lambda}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}. \quad (4)$$

Der Erwartungswert der Poissonverteilung ist λ . Die Varianz ist gleich dem Erwartungswert $\sigma^2 = \lambda$.

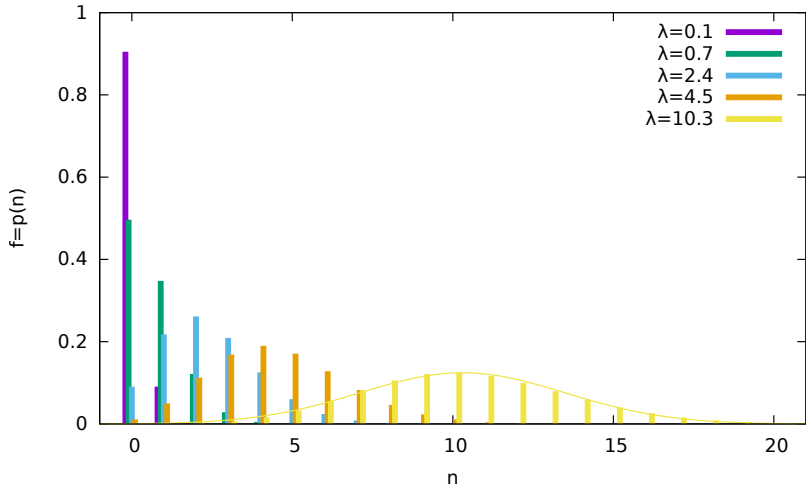
Die Standardabweichung einer Zählung unabhängiger Ereignisse ist immer die Wurzel der Anzahl der gezählten Ereignisse

$$\sigma = \sqrt{\lambda}. \quad (5)$$

Die Summe von poissonverteilten Zufallsgrößen ist poissonverteilt. Wenn Zählungen addiert werden ist das equivalent einer längeren Zählung.

Nach dem zentralen Grenzwertsatz sind Poissonverteilungen für große λ annähernd normal verteilt.

Possionverteilung



Die Bildung eines Mittelwertes erlaubt eine einfache Schätzung des Erwartungswertes und der Varianz einer Messmethode. Durch Wiederholung der Messung werden n Messwerte a_i , $i = 1 \dots n$ gewonnen, die der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegen. Wir nehmen natürlich an, daß die Messwerte normalverteilt sind. Der Mittelwert

$$\bar{a} = \frac{\sum a_i}{n} \quad (6)$$

ist ein Schätzwert des Erwartungswertes dieser Verteilung.

Die Varianz der Verteilung der Messwerte könnte mit

$$\sigma_a^2 = \frac{\sum (a_i - \mu_a)^2}{n} \quad (7)$$

abgeschätzt werden, wenn wir den Erwartungswert μ_a kennen würden. Statt dessen müssen wir den Mittelwert $\bar{a}$ nehmen. Dabei geht uns ein Freiheitsgrad im Zähler des Bruchs verloren

$$\sigma_a^2 = \frac{\sum (a_i - \bar{a})^2}{n - 1}. \quad (8)$$

Der Mittelwert $\bar{a}$ ist eine Summe normalverteilter Größen, und damit auch normalverteilt, mit Erwartungswert μ_a und Varianz

$$\sigma_{\bar{a}}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial a_i} \right)^2 \sigma_{a_i}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_a^2}{n^2} = \frac{\sigma_a^2}{n} \quad (9)$$

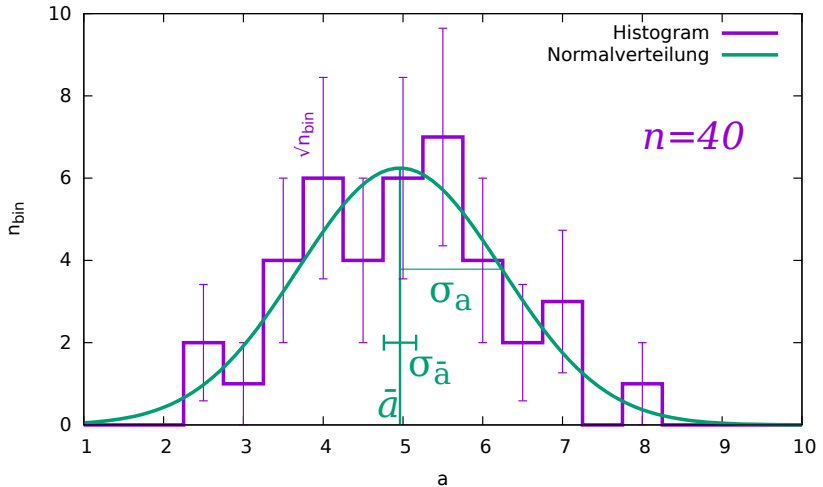
Mit dem Schätzwert für die Varianz σ_a^2

$$\sigma_{\bar{a}}^2 = \frac{\sum (a - \bar{a})^2}{n(n-1)}. \quad (10)$$

Das Messergebnis wird angegeben als

$$a = \bar{a} \pm \sqrt{\sigma_{\bar{a}}^2}. \quad (11)$$

Standardabweichung des Mittelwerts



Fehlerquellen, die man durch wiederholen der Messung und Mittelwertbildung reduzieren kann sind statistische Fehler. Solche Fehlerquellen sind Rauschen, Zählstatistik und andere nicht-reproduzierbare Einflüsse, wie z.B. Ableseblickwinkel.

Systematische Fehler können durch Mittelwertbildung nicht reduziert werden. Diese resultieren aus unvollständiger Kenntnis der Messanordnung. Wenn die Skala des verwendeten Zollstocks ungenau ist, dann nützt es nichts, die Messung mit dem selben Zollstock zu wiederholen.

Man kann die Messung mit verschiedenen Zollstöcken verschiedener Hersteller wiederholen. Dann wird aus dem systematischen Fehler ein statistischer. Zumindest wenn weitere Korrelationen der Fehler ausgeschlossen werden können.

Den relative Fehler erhält man, wenn man den absoluten Fehler durch den Messwert teilt. Fehlerfortpflanzung ist besonders einfach mit relativen Fehlern, wenn die Funktion $M(a, b, \dots)$ proportional zu Potenzen der eingesetzten Messwerte ist

$$M(a, b) = ka^n b^m. \quad (12)$$

Der absoluter Fehler ist

$$\sigma_M = \sqrt{(nka^{n-1}b^m)^2 \sigma_a^2 + (mka^n b^{m-1})^2 \sigma_b^2}. \quad (13)$$

Der relative Fehler ist

$$\frac{\sigma_M}{M} = \sqrt{n^2 \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + m^2 \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2}. \quad (14)$$

Beliebige Funktionen $M(a, b, \dots)$ von unabhängigen normalverteilten Zufallszahlen ergeben im Allgemeinen keine normalverteilten Werte. Wenn die Fehler nicht zu groß sind, dann können wir die Funktion in den Fehlern linearisieren, indem wir die normalverteilten Funktionsargumente $a, b, \dots$ durch die Abweichung vom Erwartungswert ersetzen

$$a = \mu_a + \Delta a, \quad b = \mu_b + \Delta b, \quad \dots \quad (15)$$

Die Zufallszahlen $\Delta a, \Delta b, \dots$ haben die gleiche Varianz wie die ursprünglichen Messgrößen und Erwartungswert 0.

$$M(a, b, \dots) = M(\mu_a, \mu_b, \dots) + \frac{\partial M}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial M}{\partial b} \Delta b + \dots \quad (16)$$

Der erste Term ist der Erwartungswert von M , und die Varianz ist

$$\sigma_M^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \dots \quad (17)$$

Fehlerfortpflanzung

