

## Die Boltzmann-Gleichung

Die **Boltzmann-Gleichung** gibt an, auf welche Energiezustände sich einzelne Atome eines Gases der Temperatur  $T$  verteilen. Sie lautet

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{g_i}{g_0} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right),$$

wo  $E_i$  die Anregungsenergie des Zustandes  $i$  und  $g_i$  das statistische Gewicht des Zustandes  $i$  ist. Wird das Atom ionisiert, so entspricht  $E_i$  der Ionisationsenergie des Atoms und  $g_i = g'_i \cdot g_e$ , wo  $g_e$  das statistische Gewicht des freien Elektrons ist und  $g'_i$  das des ionisierten Zustandes. Neu taucht im Exponenten auch die kinetische Energie des Elektrons auf, die Boltzmann-Gleichung lautet nun

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{g'_i \cdot g_e}{g_0} \exp\left(-\frac{E_i + \frac{1}{2}m_e v_e^2}{k_B T}\right).$$

## Das statistische Gewicht eines freien Elektrons

Das statistische Gewicht des freien Elektrons ist proportional zur Anzahl Phasenraumvolumenelemente, die das Elektron einnehmen kann. Deren Volumen beträgt  $h^3$ , wo  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum ist. Wegen des Pauliprinzips haben höchstens zwei Elektronen darin Platz

$$g_e dp_e = 2 \cdot \frac{\Delta V \Delta p^3}{h^3} = 2 \cdot \frac{\Delta p^3}{n_e h^3}.$$

Mit

$$\Delta p^3 = dV_p = 4\pi p^2 dp \xrightarrow{p \rightarrow v} dV_v = 4\pi m_e^3 v_e^2 dv_e,$$

lautet das statistische Gewicht des Elektrons

$$g_e dv_e = \frac{2 \cdot 4\pi m_e^3 v_e^2}{n_e h^3} dv_e \quad \text{oder eben} \quad g_e = \frac{2 \cdot 4\pi m_e^3 v_e^2}{n_e h^3}.$$

## Die Sahagleichung

Wir können nun den Ionisationsgrad eines Plasmas im thermodynamischen Gleichgewicht berechnen. Wir setzen das statistische Gewicht des freien Elektrons in die Boltzmann-Gleichung für ein ionisiertes Gas ein,

$$\frac{n_i(v_e)}{n_0} = \frac{g'_i}{g_0} \cdot \frac{2 \cdot 4\pi m_e^3 v_e^2}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{E_i + \frac{1}{2}m_e v_e^2}{k_B T}\right).$$

Dieses Resultat ist noch von der Geschwindigkeit des Elektrons abhängig, wir müssen deshalb über alle möglichen Geschwindigkeiten integrieren. Mit

$$4\pi \int_0^\infty v_e^2 \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2k_B T}\right) dv_e = \left(\frac{2\pi k_B T}{m_e}\right)^{3/2}$$

erhalten wir die Sahagleichung, die 1920 vom indischen Astrophysiker Meghnad Saha gefunden wurde,

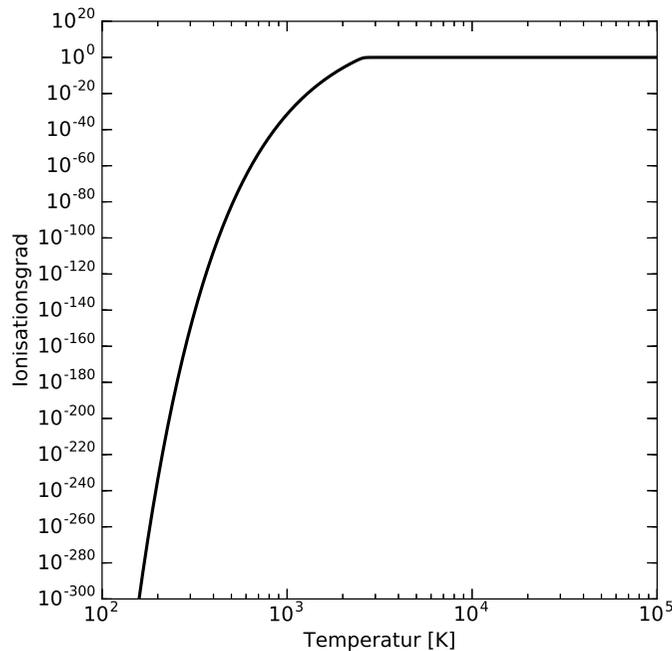
$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{g'_i}{g_0} \frac{2 (2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right),$$

die, anders als die Boltzmann-Gleichung, invers proportional zur Elektronendichte ist.

Zur Illustration setzen wir Zahlenwerte ein:  $h = 6.62606957 \cdot 10^{-34}$  Js,  $m_e = 9.10938291 \cdot 10^{-31}$  kg,  $k_B = 1.3806488 \cdot 10^{-23}$  J/K. Der konstante Vorfaktor ergibt wegen  $g'_i = 2$  und  $g_0 = 4$  einen Zahlenwert (in SI-Einheiten) von  $2.415 \cdot 10^{21}$ . Nun kann die Saha-Gleichung mnemonisch einfacher geschrieben werden als

$$\frac{n_i}{n_0} = 2.415 \cdot 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_e} \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right).$$

## Ionisationsgrad eines Plasmas



Um den Ionisationsgrad eines Gases zu bestimmen, müssen wir nun noch  $n_k/n_{\text{total}}$  bestimmen. Für ein höchstens einfach ionisiertes Gas gilt  $n_i = n_e$  und  $n = n_i + n_0$ . Mit diesen Zusatzbedingungen finden wir für den **Ionisationsgrad**  $x = n_i/n = n_i/(n_0 + n_i) = (n_i/n_0)/(1 + n_i/n_0)$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{g'_k}{g_0 n_e} \frac{2 (2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right).$$

Einsetzen von typischen Werten für die Ionisationsenergie (z.B.  $E_N = 14.5$  eV für Stickstoff), Temperatur (300 K) und Dichten ( $n_e \approx 3 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$  für Luft) zeigt, warum wir auf der Erde nur selten natürliche Plasmen beobachten. Siehe Abbildung oben links (Was ist an ihr irgendwie nicht richtig?).

# Plasmaeigenschaften

Plasmen haben Eigenschaften, die wir uns nicht gewohnt sind und deshalb hier kurz wiederholen. Eine kritische Rolle spielt die Coulombkraft, die zwischen Ionen und Elektronen wirkt und die Tatsache, dass Elektronen in der Regel viel mobiler sind als Ionen. Wegen ihrer geringen Masse wirkt auf sie eine viel größere Beschleunigung als auf die Ionen. Wir können deshalb die Ionen als 'in Ruhe' betrachten.

Ein positiver Ladungsüberschuss an einem Ort wird eine starke Coulombkraft auf die Elektronen im Plasma ausüben. Diese würden in Richtung Ion beschleunigt, wo sich aus diesem Grunde im Mittel mehr Elektronen aufhalten würden als im restlichen Plasma. Dadurch gleicht sich der Ladungsüberschuss aus und das Plasma ist **quasineutral**. Wegen der großen Reichweite der Coulombkraft zeigt ein Plasma auch **kollektives Verhalten**, welches sich qualitativ von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen unterscheidet.

## Debyelänge

Wegen seiner großen Masse ist ein Ion in einem Plasma nahezu unbeweglich. Es übt auf die umliegenden und viel mobileren Elektronen eine anziehende Kraft aus, Elektronen bewegen sich auf das Ion zu. Im Mittel ist darum die Dichte der Elektronen in der Umgebung des Ions höher als anderswo im Plasma. Die entsprechende Skalenlänge heisst **Debye-Länge**  $\lambda_D$ .

In der Umgebung des Ions wird die Quasineutralität verletzt und es baut sich ein elektrisches Potential  $\Phi(r)$  auf, welches die Poissongleichung erfüllen muss:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e),$$

wo  $n_i$  auch der ungestörten quasineutralen Dichte  $n_0$  des Plasmas entspricht. In einem Gleichgewicht zwischen der elektrostatischen Kraft und der thermischen

Bewegung der Elektronen sind diese Maxwellsch verteilt und gehorchen der Boltzmannverteilung.

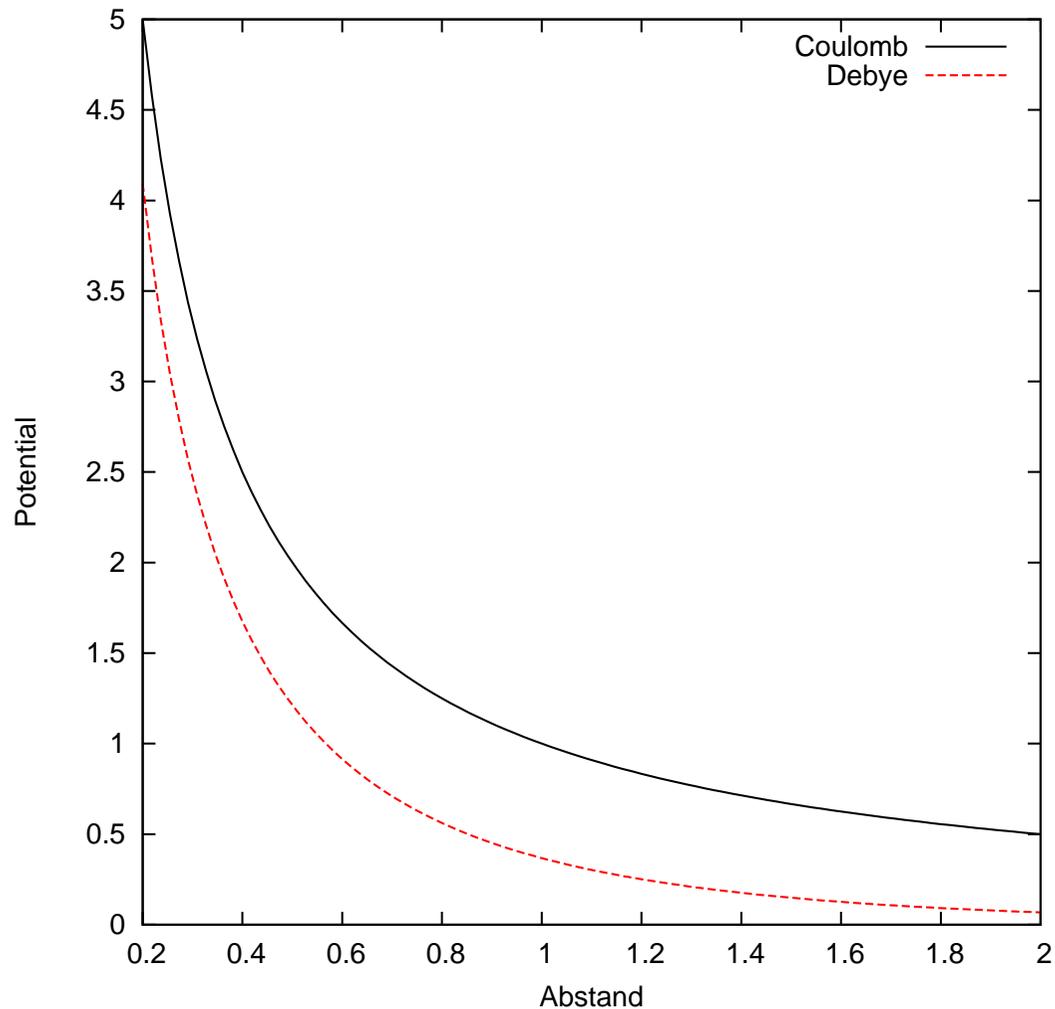
$$n_e(r) = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi(r)}{kT}\right) \approx n_0 \left(1 + \frac{e\Phi(r)}{kT}\right),$$

für schwache Potentiale. Einsetzen in die Poissongleichung ergibt

$$\nabla^2\Phi = \frac{e^2 n_0 \Phi}{\epsilon_0 kT}.$$

Die Lösung hat eine Skalenlänge, die sog. **Debye-Länge**,

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 kT}{n_0 e^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1.381 \cdot 10^{-23} T}{(1.602 \cdot 10^{-19})^2 n_0}\right)^{1/2} \approx 69 \sqrt{\frac{T}{n_0}}.$$



Die Abbildung links zeigt den Einfluss der zusätzlichen Abschirmung, eine erste Konsequenz des kollektiven Verhaltens eines Plasmas. Die Debye-Länge gibt an, wie groß der Einflussbereich einer Testladung im Plasma ist. Damit ein Plasma global quasineutral ist, muss seine Ausdehnung  $L$  wesentlich größer als eine Debye-Länge sein,  $L \gg \lambda_D$ . Man nennt dies oft **das erste Plasmakriterium**.

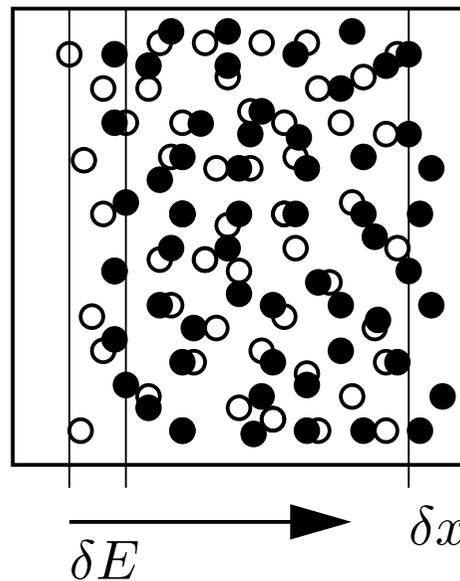
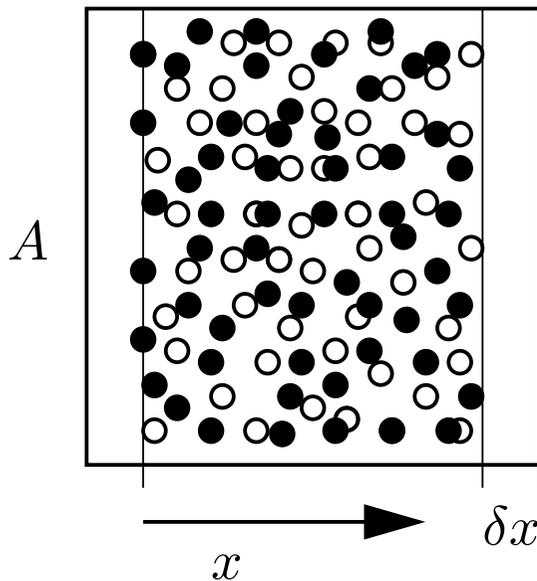
## Plasmaparameter und Plasmanäherung

Damit die Debye-Abschirmung funktionieren kann, müssen sich innerhalb einer **Debyekugel** genügend Teilchen befinden. Die Anzahl Teilchen ist  $(4\pi/3)n_e\lambda_D^3$ . Die Zahl  $\eta = n_e\lambda_D^3$  ist der sog. **Plasmaparameter** und ist proportional zur Anzahl Teilchen in einer Debyekugel. Für eine effektive Abschirmung muss  $\eta \gg 1$  gelten, das sog. **zweite Plasmakriterium** oder auch die **Plasmanäherung**. Damit die Plasmanäherung erfüllt ist, muss die Plasmadichte klein oder die Temperatur hoch sein, wie man durch Einsetzen der Debyelänge leicht sieht.

$$n_e \left( \frac{\varepsilon_0 kT}{n_e e^2} \right)^{3/2} \gg 1. \implies kT \gg \frac{e^2}{\varepsilon_0} n_e^{1/3} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 d}, \text{ wo } d = n_e^{-1/3}.$$

In diesem Fall ist auch die kinetische (thermische) Energie eines Teilchens groß gegenüber seiner potentiellen Energie im elektrostatischen Feld der Nachbarladungen.

## Plasmafrequenz



Wir lenken in Gedanken alle Elektronen um eine Distanz  $\delta x$  aus, was ein elektrisches Feld  $\delta E$  hervorruft, welches auf die Elektronen eine Kraft  $F = -e\delta E$  ausübt. Dabei wird das Feld nach Poisson bestimmt durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 = (e / \epsilon_0) (Zn_i - n_e),$$

wo  $\rho$  die Ladungsdichte und  $n_i$  und  $n_e$  die Ionen- und Elektronendichten sind. In diesem eindimensionalen Fall gilt

$$\partial E / \partial x = e / \epsilon_0 (Zn_i - n_e) \rightarrow \partial E = (e / \epsilon_0) (Zn_i - n_e) \partial x \rightarrow \delta E = (e / \epsilon_0) (Zn_i - n_e) \delta x.$$

Weil auf der einen Seite  $n_i = 0$  und auf der anderen  $n_e = 0$  und  $n_i = n_e$  ist die Bewegungsgleichung für die Elektronen

$$m_e \frac{\partial^2 \delta x}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0} \delta x,$$

was ja genau die eines harmonischen Oszillators ist! Die Kraft ist proportional zur Auslenkung und wir sehen sofort, dass wir eine Schwingung mit der sog. **Plasmafrequenz** erwarten

$$\omega_{pe} = \pm \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}} \approx \pm 2\pi \cdot 9 \cdot \sqrt{n_e} \text{ in SI Einheiten.}$$

(Wie weit kommt ein Elektron in  $\tau = \omega_{pe}^{-1}$ ?  $v \cdot \tau = (kT/m_e)^{1/2} \cdot \tau = \lambda_D \dots$ )

## Das dritte Plasmakriterium

Es gibt viele Plasmen, die nicht vollständig ionisiert sind, d.h. einen nicht-verschwindenden Anteil von neutralen Atomen haben. In diesen tritt eine dämpfende Reibungskraft als Folge von Stößen mit Neutralteilchen auf und das Medium verhält sich - wenn diese Stöße überwiegen - wie das Neutralgas.

Damit sich die Elektronen 'frei' - wie in einem Plasma - verhalten, also durch Stöße mit dem Neutralgas nicht wesentlich beeinflusst werden, muss die Zeit zwischen zwei Elektron-Neutral-Stößen größer sein als die inverse Plasmafrequenz,

$$\tau_n \gg \frac{1}{\omega_{pe}}.$$

Dies ist das **dritte Plasmakriterium**.

## Zusammenfassung: Ein Plasma ist, wenn. . .

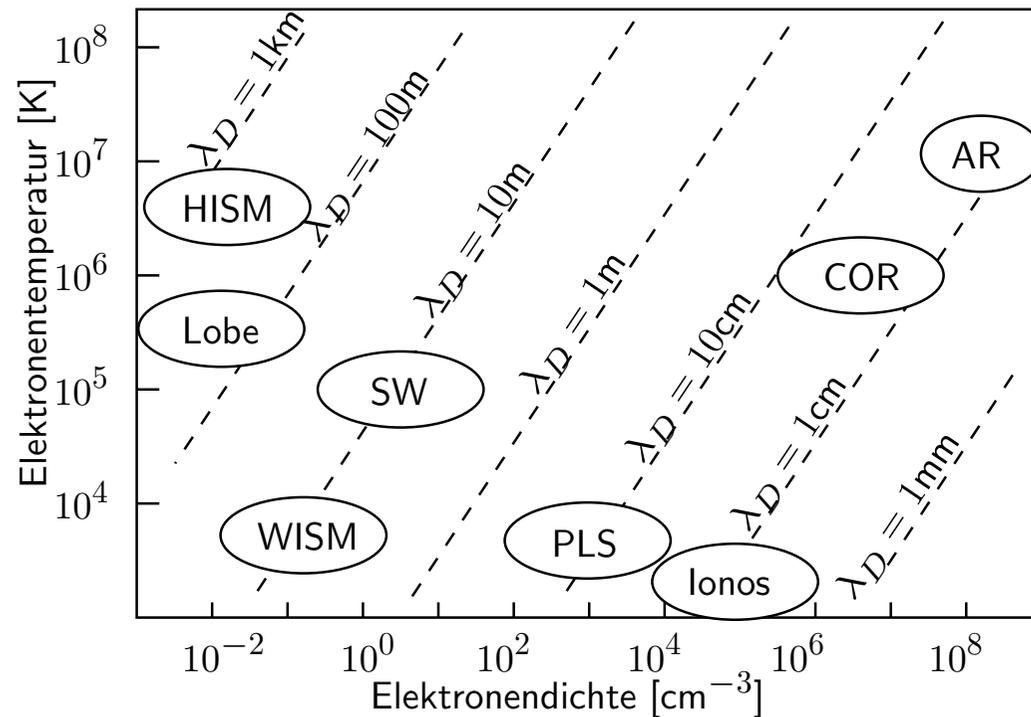
Ein Plasma ist also ein System, in welchem die drei Plasmakriterien erfüllt sind:

- I: Quasineutralität, bzw. System groß im Vergleich zur Debye-Länge:  $L \gg \lambda_D$
- II: In einer Debye-Kugel befinden sich viele Teilchen:  $\eta = n_e \lambda_D^3 \gg 1$ .
- III: Geladene Teilchen koppeln 'nicht' an neutrale:  $\tau_n \gg \frac{1}{\omega_{pe}}$ .

Damit befinden sich 99,9% der bekannten Materie im Plasmazustand.

Oder: Wir leben in einem ungewöhnlichen Zustand...

## Plasmaparameter II



In der Abbildung links sind natürlich vorkommende Plasmen eingezeichnet. Legende: HISM: Heißes interstellares Medium; Lobe: Region im Schweif der Magnetosphäre; WISM: Warmes interstellares Medium; SW: Sonnenwind; PLS: Plasmasphäre; Ionos: Ionosphäre; COR: Korona; AR: Aktive Region.

Übung: Zeichnen Sie die Linien für den Plasmaparameter  $\eta$  ein.

Übung: Wohin gehören irdische Plasmen? Künstliche?

## Der Phasenraum

Wollen wir ein Teilchen in einem Gas charakterisieren, so benennen wir neben Eigenschaften wie Masse, Ladung, Spezies, insbesondere seinen **Ort**,  $\vec{x}$  und seine Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , bzw. seinen **Impuls**,  $\vec{p}$ . Besteht ein Gas aus identischen Teilchen, so reichen die beiden letzten Angaben. Den Raum, der durch die Orts- und Impulskoordinaten aufgespannt wird, nennt man den **Phasenraum**. Alle Zustände des Gases können in ihm dargestellt werden. Allgemeiner entspricht jedem Freiheitsgrad des Systems eine Dimension im Phasenraum,

$$(\vec{x}, \vec{p}) = (x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3).$$

Beispiel: Ein mathematisches Pendel wird charakterisiert durch Auslenkung und Geschwindigkeit, sein Phasenraum ist - je nach Normierung - ein Kreis, bzw. eine Ellipse. Reibung führt zu einer Spirale. Der Phasenraum hat einen **Attraktor**.

**Übung 1.** *Zeigen Sie dies! In welchem Punkt liegt der Attraktor?*

## Die Phasenraumdichte

Wenn wir jedem Teilchen in einem Gas seinen Ort und Impuls zuweisen können, so können wir das Gas durch seine exakte **Phasenraumdichte** in jedem Moment beschreiben:

$$\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{p}, t) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}_i(t)).$$

Dabei wird die Bewegung eines jeden Teilchens durch seine Bewegungsgleichung beschrieben,

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_i(t) = q_i \left\{ \vec{E}_m(\vec{x}_i(t), t) + \frac{1}{m_i} \vec{p}_i(t) \times \vec{B}_m(\vec{x}_i(t), t) \right\},$$

wo  $\vec{E}_m$  und  $\vec{B}_m$  die im jeweiligen Moment und Ort auf das Teilchen wirkenden mikroskopisch exakten elektrischen und magnetischen Felder sind. Sie

werden erzeugt einerseits durch evtl. bereits vorhandene externe Felder sowie durch die momentanen Ladungs- und Stromdichteverteilungen und folgen den mikroskopischen Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_m(\vec{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_m(\vec{x}, t) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_m(\vec{x}, t) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_m(\vec{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_m(\vec{x}, t) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}_m(\vec{x}, t) = \mu_0 \vec{j}_m(\vec{x}, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_m(\vec{x}, t)$$

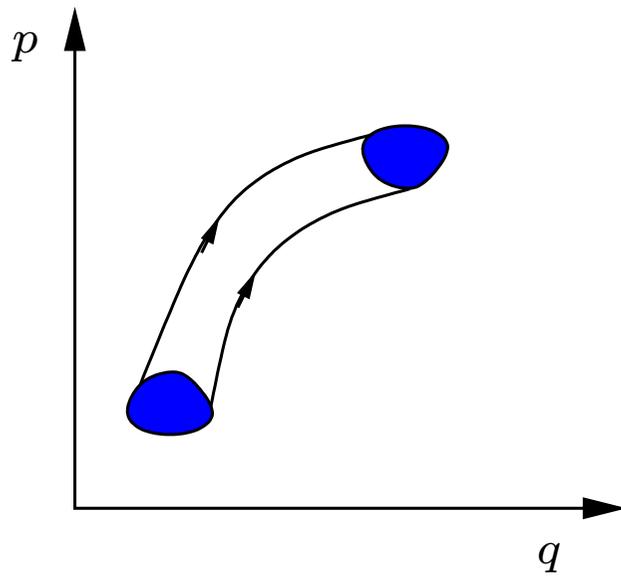
Jedes Teilchen ist über die Maxwellgleichungen an die anderen gekoppelt, denn seine Bewegung verursacht einen mikroskopischen Strom, seine bloße Anwesenheit trägt zur mikroskopischen Ladungsdichte bei,

$$\rho_m(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \int \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v, \quad \vec{j}_m(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \int \vec{v} \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v,$$

wo  $d^3v$  das differentielle Volumenelement im Geschwindigkeitsraum ist und die Summe sich über alle Teilchenspezies und deren exakte Phasenraumdichten  $\mathcal{F}_i$  erstreckt.

Die Bewegungsgleichung und die Maxwellgleichungen bestimmen das dynamische Verhalten des Plasmas vollständig. Im Prinzip können nun alle Plasmaphänomene aus diesem System von gekoppelten Differentialgleichungen berechnet werden. Analytisch ist dies natürlich etwas schwierig, numerisch auch...

Es wäre günstiger, man könnte direkt die Phasenraumdichte  $\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$  berechnen, diese muss ja schließlich eine erhaltene Größe sein, wenn keine Teilchen erzeugt oder vernichtet werden.



## Der Satz von Liouville

Der Satz von Liouville sagt im Wesentlichen, dass das im Phasenraum eingenommene Volumen, die Phasenraumdichte, erhalten bleibt. Man kann sich ein Gas im Phasenraum als inkompressible Flüssigkeit vorstellen. Dies ist intuitiv klar weil das Gas ja aus individuellen Teilchen besteht. So gesehen bedeutet der Satz von Liouville nichts anderes als die Erhaltung der Teilchenzahl. Noch anders ausgedrückt sagt der Satz von Liouville, dass die Phasenraumdichte  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{p})$  erhalten bleibt, bzw. dass für sie die **Kontinuitätsgleichung** im Phasenraum gilt,

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0.$$

## Die Klimontovich-Dupree-Gleichung

Nach dem Satz von Liouville muss also gelten, dass

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) = 0, \quad \text{wo}$$

$\vec{x}$  und  $\vec{v}$  auch von der Zeit  $t$  abhängen. Mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} f[g(t)] = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dt}.$$

kann die totale Zeitableitung (das totale Differential) im Phasenraum als Summe von partiellen Ableitungen geschrieben werden als

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}}.$$

Dies ist die aus der Hydrodynamik bekannte konvektive oder substantielle Ableitung und gibt die Änderung einer Größe entlang einer Trajektorie der Flüssigkeit. Mehr dazu später.

Wir ersetzen hier die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit mit der Bewegungsgleichung und erhalten die **Klimontovich-Dupree-Gleichung**, welche die Entwicklung der Phasenraumdicke  $\mathcal{F}$  zu jeder Zeit beschreibt.

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} \mathcal{F} + \frac{q}{m} \left( \vec{E}_m + \vec{v} \times \vec{B}_m \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \mathcal{F} = 0,$$

wo die Summen über die einzelnen Teilchenspezies implizit enthalten sind.

Auch diese Gleichungen sind in der Regel nicht mit sinnvollem Aufwand lösbar und man würde gerne wenigstens den Mittelwert (Erwartungswert) der relevanten Plasmagrößen berechnen können.

## Die kinetische Gleichung

Einen ersten Schritt in diese Richtung kann man machen, indem man eine gemittelte Phasenraumdichte  $f(\vec{x}, \vec{v}, t) \doteq \langle \mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \rangle$  definiert. Damit kann die exakte Phasenraumdichte wiederum ausgedrückt werden durch

$$\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) = f(\vec{x}, \vec{v}, t) + \delta\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t), \quad \text{wo die Fluktuationen } \langle \delta\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \rangle = 0.$$

Ähnlich kann man die exakten elektrischen und magnetischen Felder durch einen gemittelten und einen fluktuierenden Teil ausdrücken

$$\vec{E}_m(\vec{x}, \vec{v}, t) = \vec{E}(\vec{x}, \vec{v}, t) + \delta\vec{E}(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad \text{und} \quad \vec{B}_m(\vec{x}, \vec{v}, t) = \vec{B}(\vec{x}, \vec{v}, t) + \delta\vec{B}(\vec{x}, \vec{v}, t),$$

wo  $\langle \delta\vec{E} \rangle = \langle \delta\vec{B} \rangle = 0$ . Einsetzen in die exakte Klimontovich-Dupree-Gleichung

liefert die **kinetische Gleichung** für das Plasma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} f + \frac{q}{m} \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f = -\frac{q}{m} \left\langle \left( \delta \vec{E} + \vec{v} \times \delta \vec{B} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \delta \mathcal{F} \right\rangle \quad (1)$$

Diese Gleichung beschreibt die Entwicklung der gemittelten Phasenraumdicke  $f$ . Sie beschreibt nicht mehr die Verteilung einzelner Teilchen, sondern die mittlere Verteilung einzelner Teilchen, man kann sie - bis auf eine Normierung - als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auffassen, in einem bestimmten Phasenraumvolumen  $d\vec{x}d\vec{v}$  eine bestimmte Anzahl Teilchen zu finden. Dies hat den enormen Vorteil, dass man nicht mehr jedes einzelne Teilchen verfolgen muss und nur noch eine Abhängigkeit von  $\vec{x}, \vec{v}$  und  $t$  besteht.

Das Problem an der kinetischen Gleichung liegt nun auf der rechten Seite, der Term mit den fluktuierenden Größen ist sehr schwierig zu bestimmen weil er alle Korrelationen zwischen Teilchen und Feldern enthält.

## Die Boltzmann-Gleichung

Eine mögliche Vereinfachung besteht darin, die Korrelationen zwischen Feldern zu vernachlässigen. Man berücksichtigt nur noch Korrelationen unter Teilchen, die durch Stoßprozesse entstehen und kann dann die kinetische Gleichung schreiben als

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} f + \frac{q}{m} \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (2)$$

wo die rechte Seite nun die Änderung der Verteilungsfunktion  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  aufgrund von Stößen beschreibt. Man nennt diese Gleichung die **Boltzmann-Gleichung**, die rechte Seite heißt **Stoßintegral** und muss für die Auswertung bekannt sein. Boltzmann hat dazu den **Stoßzahl-Ansatz** entwickelt und das Stoßintegral in der folgenden Form geschrieben

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = \iint g(\vec{p}_1 - \vec{p}_2, \vec{q}) [f(\vec{x}, \vec{p}_1 + \vec{q}, t) f(\vec{x}, \vec{p}_2 - \vec{q}, t) - f(\vec{x}, \vec{p}_1, t) f(\vec{x}, \vec{p}_2, t)] d\vec{p}_2 d\vec{q},$$

wo  $\vec{p}_i$  die Impulse der zwei stoßenden Teilchen sind und  $\vec{q}$  der ausgetauschte Impuls ist und der Kern  $g(\vec{p}_1 - \vec{p}_2, \vec{q})$  die Zwei-Teilchenstöße beschreibt. Diese Vereinfachung hat eine paradoxe Folge: Im thermodynamischen Gleichgewicht finden 'keine Stöße mehr statt'! Genauer, das Stoßintegral verschwindet, weil in diesem Fall gleich viele Stöße einen Impulsübertrag in die eine Richtung bewirken, wie in die andere Richtung, netto ändert sich also nichts.

Eine einfachere Variante des Stoßintegrals ist der **Krooksche Stoßterm**,

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = \nu_n (f_n - f)$$

für Stöße zwischen einem neutralen Gas (durch  $f_n$  beschrieben) und geladenen Teilchen ( $f$ ). Dieses Stoßintegral ist für ein unvollständig ionisiertes Plasma zutreffend. Man sieht schön, wie sich die beiden Verteilungsfunktionen angleichen werden. Im Gleichgewicht verschwindet dann das Stoßintegral.

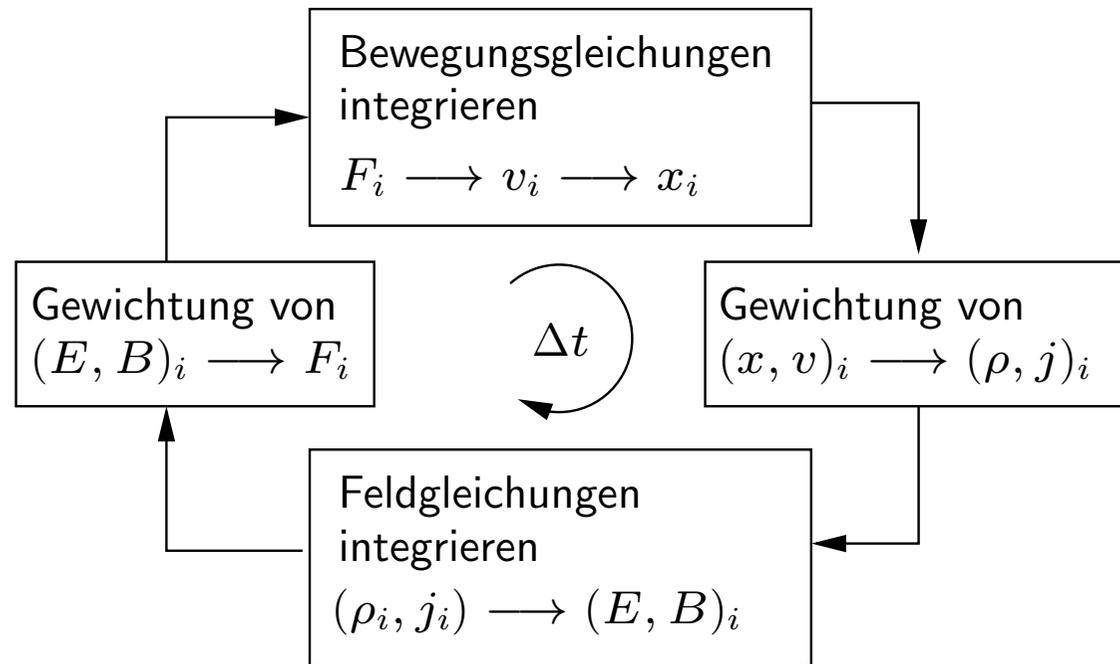
## Die Vlasovgleichung

Für stoßfreie Plasmen, wie - bis auf die Ionosphäre - die meisten Weltraumplasmen, kann das Stoßintegral in der Boltzmann-Gleichung vernachlässigt werden. Es folgt die einfachst mögliche kinetische Gleichung, die **Vlasovgleichung**,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} f + \frac{q}{m} \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f = 0. \quad (3)$$

Sie ist von der Struktur her wieder eine Kontinuitätsgleichung, was bedeutet, dass die Phasenraum-dichte zeitlich unverändert bleibt - eine Folge des Satzes von Liouville. Trotz ihrer scheinbar einfachen Struktur, ist die Vlasovgleichung immer noch unglaublich kompliziert. Sie beschreibt ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen im sechs-dimensionalen Phasenraum. Gekoppelt ist das System weil die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ihrerseits wieder über die Maxwellgleichungen durch die Ladungs- und Stromdichten  $\rho$  und  $\vec{j}$  beschrieben werden. Die Ladungs-

und Stromdichten sind wiederum Geschwindigkeitsintegrale (Momente) über die Phasenraumdichte  $f$ . Das Problem kann aber mit sog. Particle in Cell (PIC) Codes<sup>1</sup> numerisch simuliert werden.



Sind die Positionen  $x_i$  und Geschwindigkeiten  $v_i$  bekannt, können daraus die  $E$  und  $B$  Felder berechnet werden. Nach entsprechender Gewichtung können wiederum die Bewegungsgleichungen gelöst werden, woraus die aktualisierten Positionen und Geschwindigkeiten folgen... (Schema nach Birdsall und Langdon, 1991).

<sup>1</sup>Ein Beispiel: <https://medium.com/swlh/create-your-own-plasma-pic-simulation-with-python-39145c66578b>

## Eine Anwendung: Unmagnetisiertes, stromfreies Plasma

In einem unmagnetisierten, stromfreien Plasma gibt es keine magnetischen Felder und das elektrische Feld kann als Potentialfeld geschrieben werden,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}_x \Phi$  für ein Potential  $\Phi$ . Damit vereinfacht sich das System erheblich. Die Vlasovgleichung wird zu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} f - \frac{q}{m} \left( \vec{\nabla}_x \Phi \right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} f = 0$$

und die Maxwellgleichungen reduzieren sich auf die Poissongleichung

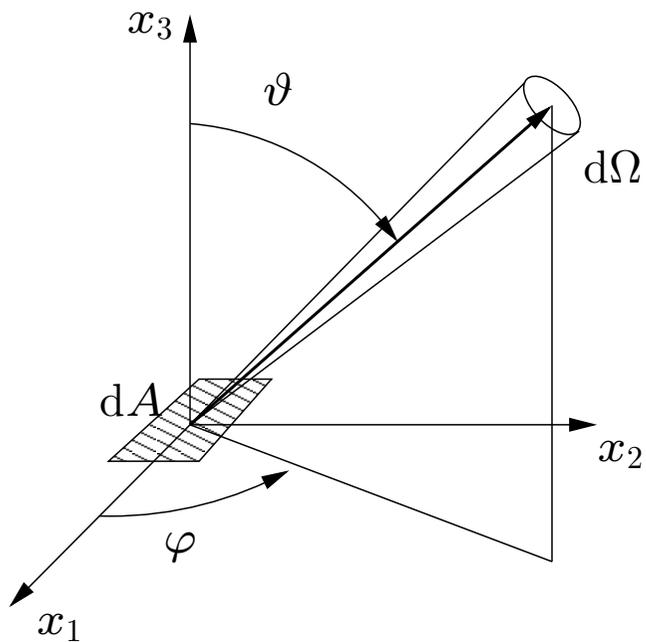
$$\vec{\nabla}_x^2 \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{e,i} q_{e,i} \int f_{e,i} d^3v.$$

Offensichtlich ist das System nicht-linear!  $f$  kommt im Ausdruck für das Potential vor und wird in der Vlasovgleichung mit seiner Geschwindigkeitsableitung

multipliziert. Es ist aber lösbar und führt zu einem neuartigen Phänomen bei Wellen, der sogenannten Landaudämpfung, deren exakte Behandlung aber über den Stoff dieser Vorlesung hinausgeht. Sie ist nicht eine Folge der Dämpfung durch Stöße von Teilchen untereinander, sondern von einer Wechselwirkung der Wellen mit den Teilchen. Dabei können Wellen Energie und Impuls an Teilchen abgeben und umgekehrt. Dabei verändert sich die Verteilungsfunktion  $f$ , was wiederum zu einer Änderung in den Strom- und Ladungsdichten führt, was die elektrischen und magnetischen Felder verändert, was wiederum, ... Sie verstehen...

Offensichtlich treten bei Berücksichtigung kinetischer Effekte neue Phänomene auf. Wir werden sie aber hier nicht behandeln, sondern, für Interessierte, erst in der MSc-Vorlesung et2.

## Der differentielle Fluss – Wie misst man $f$ ?



Detektoren im Weltraum (und anderswo) messen natürlich nicht die Phasenraumdicke selber, sondern eine richtungsabhängige differentielle Intensität,  $J(\vec{x}, E, \vartheta, \varphi, t)$  ( $[J] = (\text{m}^2 \text{ sr s eV})^{-1}$ ). Damit ist  $J \, dA \, d\Omega \, dE \, dt$  die Anzahl Teilchen, die aus einem Raumwinkelelement  $d\Omega \doteq \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  in einem Zeitintervall  $dt$  und im Energieintervall  $[E, E + dE]$  das Flächenelement  $dA$  durchdringen (siehe Abb. links). Diese Größe ist mit der Phasenraumdicke  $f(v)$  eng verknüpft, wie wir im Folgenden sehen werden.

Teilchen, die mit Energie  $[E, E + dE]$  aus dem Raumwinkel  $d\Omega$  um die Richtung  $(\vartheta, \varphi)$  auf die Fläche treffen, nehmen im Impulsraum ein Volumenelement

$p^2 dp d\Omega$  ein. Die Anzahl Teilchen, die innerhalb  $dt$  auf  $dA$  treffen, ist gerade die Teilchendichte im Ortsraum mal das durch  $dA v dt$  aufgespannte Volumen,

$$dn = J dA d\Omega dE dt \xleftrightarrow{\text{Teilchenzahlerhaltung}} dn = dA v dt f p^2 dp d\Omega.$$

Mit  $dE/dp = p/m$  erhalten wir

$$J dA d\Omega dE dt = dA v dt f p^2 dp d\Omega$$

$$J \frac{dE}{dp} dp = f p^2 v dp$$

$$J \frac{p}{m} dp = f p^2 \frac{p}{m} dp \xrightarrow{\text{also}} J = f p^2.$$

Mit einer Messung des Energiespektrums von Teilchen kann man also auch die Verteilungsfunktion, bzw. Phasenraumdichte messen.

Wir betrachten im Folgenden einen Detektor, der alle Teilchen aus dem Halbraum  $x_3 > 0$  misst und führen eine wichtige Größe, den sog. Geometriefaktor, ein. Die Verteilung der Einfallsrichtungen  $(\vartheta, \varphi)$  der Teilchen (z. B. Ionen oder Elektronen in einem Plasma) auf das Detektorelement  $dA$  sei dabei isotrop. Dann ist der **Geometriefaktor** gegeben durch

$$G \doteq \int_{\Omega} d\Omega \int_A d\vec{A} \cdot \hat{\vec{r}} = 2\pi A \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta = \pi A,$$

wo  $\hat{\vec{r}}$  der Einheitsvektor in Richtung  $(\vartheta, \varphi)$  sei. Die Projektion  $d\vec{A} \cdot \hat{\vec{r}}$  ist gegeben durch  $\cos \vartheta dA$ . Der Geometriefaktor folgt dann mit  $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$  und  $\int_A dA = A$ . Er ist also  $G = \pi A$ , seine Einheit ist  $\text{m}^2\text{sr}$ . Wegen der üblicherweise kleinen Geometriefaktoren wird in der Regel die Einheit  $\text{cm}^2\text{sr}$  verwendet. Eine Fläche  $A$  in einem isotropen Strahlungsfeld  $\Phi$  sieht also eine Zählrate  $C = G\Phi = \pi A\Phi$ .

## Beispiel: Der Sonnenwindsensor PAS auf Solar Orbiter

Das Proton-Alpha-System<sup>2</sup> auf der ESA-Raumsonde Solar Orbiter<sup>3</sup> misst die Protonen und  $\alpha$ -Teilchen im Sonnenwind mit einer Zeitauflösung von 4 Sekunden. Es hat einen Geometriefaktor von  $5 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \text{ sr}$ . Die Dichte des Sonnenwindes beträgt bei der Erde ca.  $10 \text{ cm}^{-3}$ , seine Geschwindigkeit ca. 400 km/s.

Der Fluss des Sonnenwindes bei einer astronomischen Einheit ist sehr variabel seine Größenordnung kann aber mit  $\Phi_{\text{sw}} \approx 10 \cdot 400 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  abgeschätzt werden. Für einen kalten Sonnenwind<sup>4</sup> erhalten wir nun die maximale Zählrate bei 1 au von  $Z = \Phi_{\text{sw}} \cdot G = 4 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ sr/s}$ , bzw. 2000 Teilchen pro Sekunde. Warum der Raumwinkel in der Zählrate hier noch stehen bleibt, werden wir bald erklären müssen.

---

<sup>2</sup><https://doi.org/10.1051/0004-6361/201937259>

<sup>3</sup><https://www.aanda.org/component/toc/?task=topic&id=1082>

<sup>4</sup> $v_{\text{therm}} \ll v_{\text{sw}}$

## Makroskopische Größen und Momente der Geschwindigkeitsverteilungsfunktion

Als  $i$ -tes Moment der Verteilungsfunktion wird das folgende Integral bezeichnet

$$M_i(\vec{x}, t) \doteq \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) (\vec{v})^i d^3v,$$

wo  $\vec{v}^i$  das  $i$ -fache dyadische Produkt bedeutet, ein Tensor mit Rang  $i$ . Nur die paar ersten Momente haben eine physikalische Relevanz, wir werden sie gleich betrachten.

Das nullte Moment ist die Teilchenzahldichte,

$$n \doteq \int f(\vec{v}) d^3v.$$

Die mittlere Geschwindigkeit, bzw. die Geschwindigkeit, mit der das Plasma an einem Beobachter vorbeifließt (engl. bulk velocity) ist das erste Moment,

$$\vec{u} \doteq \vec{v}_{\text{bulk}} = \frac{1}{n} \int \vec{v} f(\vec{v}) d^3v.$$

Mit diesen beiden Größen können wir auch die Ladungsdichte  $\rho$  und den Strom  $\vec{j}$  schreiben als

$$\rho \doteq \sum_{s=e,i} e_s \cdot n_s \quad \text{und} \quad \vec{j} = \sum_{s=e,i} e_s \cdot n_s \cdot \vec{v}_{\text{bulk},s}.$$

Komplizierter wird es ab dem zweiten Moment. Der Drucktensor in einem Plasma

entsteht durch die Fluktuationen um die mittlere Geschwindigkeit,

$$\Pi \doteq m \int (\vec{v} - \vec{v}_{\text{bulk}})(\vec{v} - \vec{v}_{\text{bulk}}) f(\vec{v}) d^3v$$

Der Drucktensor kann isotrop sein (z. B. wenn kein Magnetfeld vorhanden ist), er ist aber immer symmetrisch, d. h. in einem geeigneten Koordinatensystem kann er immer diagonalisiert werden,

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix},$$

wo senkrecht und parallel in der Regel immer zum Magnetfeld gemeint sind.

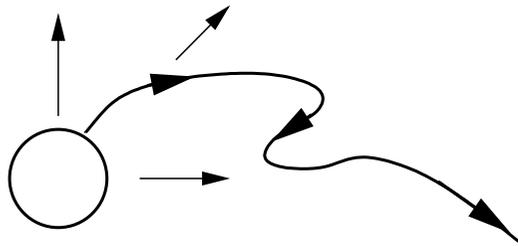
Manchmal ist auch das nächsthöhere Moment von Interesse,

$$\mathbf{Q} \doteq m \int (\vec{v} - \vec{v}_{\text{bulk}})(\vec{v} - \vec{v}_{\text{bulk}})(\vec{v} - \vec{v}_{\text{bulk}}) f(\vec{v}) d^3v,$$

ein Tensor mit Rang 3, der Wärmetensor. Während er selber nicht sehr nützlich ist, ist es seine Spur, der Vektor

$$\vec{q} = m \int (\vec{v} - \vec{v}_{\text{bulk}}) \cdot (\vec{v} - \vec{v}_{\text{bulk}})(\vec{v} - \vec{v}_{\text{bulk}}) f(\vec{v}) d^3v,$$

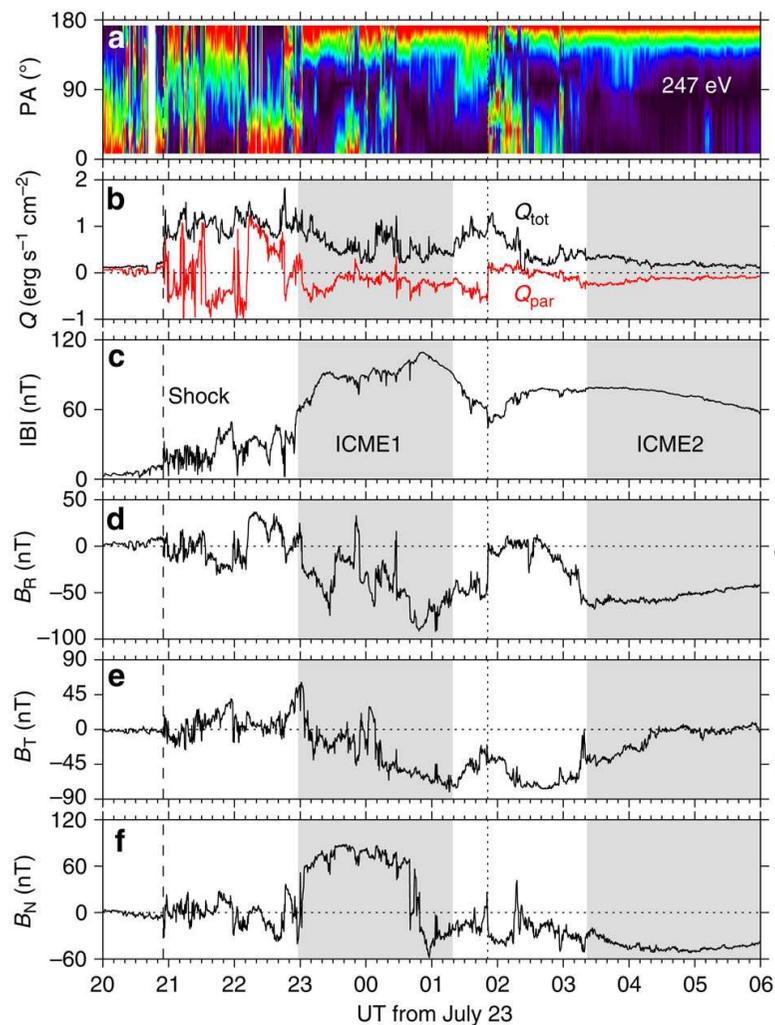
welcher den Wärmefluss in das Plasma beschreibt.



Die Richtung des Wärmeflusses stimmt nicht unbedingt mit der Richtung des mittleren Plasmaflusses überein. Im Sonnenwind zeigt der Wärmefluss manchmal auch in Richtung Sonne! Dies deutet dann darauf hin, dass die Feldlinie, auf der der Beobachter gerade sitzt, verbogen ist, einen 'Kinken' besitzt. Solche Situationen treten in komplizierten Magnetfeldkonfigurationen auf, wie z. B. in sog. koronalen Massenauswürfen. Ein Beispiel dafür ist auf Seite 40 gegeben<sup>5</sup> und zeigt in der zweiten Reihe den totalen Wärmefluss (schwarz) und den Wärmefluss parallel zum Magnetfeld während einer komplexen Wechselwirkung von zwei magnetischen Wolken/koronalen Massenauswürfen, die durch STEREO A beobachtet wurde. Hätte diese Region die Erde getroffen, wären mit großer Wahrscheinlichkeit Satelliten, Kommunikation & Navigation sowie Stromnetze stark betroffen gewesen.

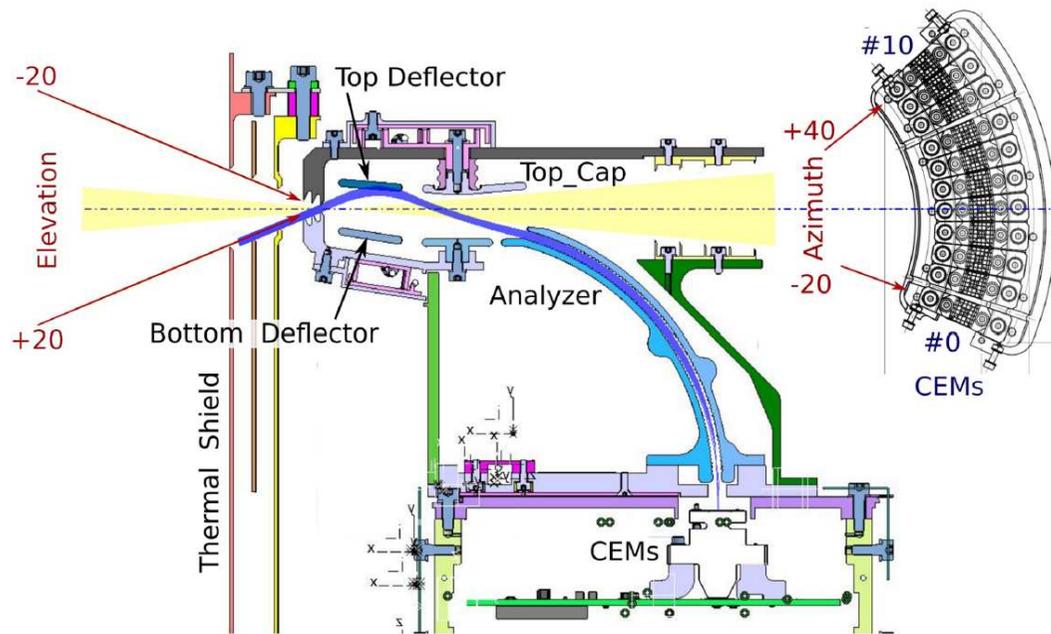
---

<sup>5</sup>Mit freundlicher Genehmigung von Nature Publishing Group (2014).



Die Abb. nebenan zeigt die Abfolge von zwei magnetischen Wolken (ICME1 und ICME2), die auch als Regionen mit einem sonnenwärts gerichtetem Wärmefluss zu sehen sind. Die Größe  $Q_{\text{par}}$  ist der parallele Wärmefluss, er hat während der Dauern der beiden ICMEs ein negatives Vorzeichen, deutet also auf Richtung Sonne. ICME ist eine Abkürzung und bedeutet Interplanetary Coronal Mass Ejection, ist also die interplanetare Folge eines koronalen Massenauswurfes von der Sonne. Mehr dazu später.

# Das Proton-Alpha System (PAS) Solar Orbiter



Der Sensor PAS auf Solar Orbiter (s. Seite 34) misst die 3D-Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen der Protonen und Alpha-Teilchen im Sonnenwind mit hoher Zeit-, Energie und Winkelauflösung. Der elektrostatische Analysator (Analzer) bestimmt in 96 Schritten das  $E/q$ -Spektrum der Teilchen. Die beiden elektrostatischen Ablenkplatten (Top und Bottom Deflector) bestimmen in 9 Schritten die polare Richtung des Sonnenwindes, die 11 Channel Electron Multipliers (CEMs) bestimmen die azimutale Einfallsrichtung.

bestimmen in 9 Schritten die polare Richtung des Sonnenwindes, die 11 Channel Electron Multipliers (CEMs) bestimmen die azimutale Einfallsrichtung.

Die Bestimmung des Höhen- und Breitenwinkels des Sonnenwindes nimmt bei Solar Orbiter eine besondere Stellung ein, weil die Raumsonde bis auf 0.28 au an die Sonne heranfliegen soll und diese auch von hohen heliographischen Breiten aus untersuchen soll. Die Sonde hat dabei eine hohe Bahngeschwindigkeit um die Sonne, wodurch Aberration auftritt, die bei der Bestimmung von  $v_{\text{SW}}$  berücksichtigt werden muss.

Die 96  $E/q$ -Schritte sind erforderlich um die hohe Variabilität der Sonnenwindgeschwindigkeit und die verschiedenen  $m/q$ -Verhältnisse von Protonen und Alphateilchen abzudecken.

**Übung:** Die Hochspannung an den Ablenkplatten von PAS wird zwischen 200 eV/e und 20 keV/e variiert. Welche Geschwindigkeiten von Protonen und Alphateilchen sind damit messbar?