Spezielle Relativitätstheorie

In der Teilchenphysik finden viele der Streuexperimente und der Zerfälle bei kinetischen Energien, bzw. bei Geschwindigkeiten statt, die eine relativistische Beschreibung erfordern. Auch in der Kernphysik spielen relativistische Korrekturen eine wichtige Rolle, will man die Physik richtig verstehen (und die richtigen Zahlenwerte erhalten). Wir wiederholen darum hier einige aus der Physik I hoffentlich noch bekannte relativistische Beziehungen und werden anschließend einige neue Resultate und eine neue Schreibweise (Vierervektoren) diskutieren.

Der speziellen Relativitätstheorie liegen die **Einsteinschen Postulate** zu Grunde:

1) Die Form der physikalischen Gesetze ist in allen Inertialsystemen dieselbe.

2) Licht bewegt sich für alle Beobachter mit derselben Geschwindigkeit c.

Die Lorentztransformation

Wir betrachten ein Teilchen mit Masse m in einem Inertialsystem S mit Koordinaten $(t,\vec{r}) = (t,x,y,z)$ und Geschwindigkeit $u = |\vec{u}|$. Aus einem anderen Inertialsystem S′ beobachtet seien seine Koordinaten $(t',\vec{r}') = (t',x',y',z')$ und Geschwindigkeit $u' = |\vec{u}'|$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass zu einem Zeitpunkt $t = 0$ S und S′ am selben Ort starten und dass S′ sich relativ zu S mit Geschwindigkeit v in z-Richtung bewege. Dann ist die Lorentztransformation zwischen den beiden Systemen S und S′ gegeben durch

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(v)(t - \frac{vz}{c^2}), \\ x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \gamma(v)(z - vt), \end{aligned}$$

wo $\gamma(v) = \gamma(v/c) = \gamma(\beta) = (1-\beta^2)^{-1/2}$ der **Lorentz-Faktor** ist und $\beta \doteq v/c$.

Die Geschwindigkeit transformiert sich gemäß

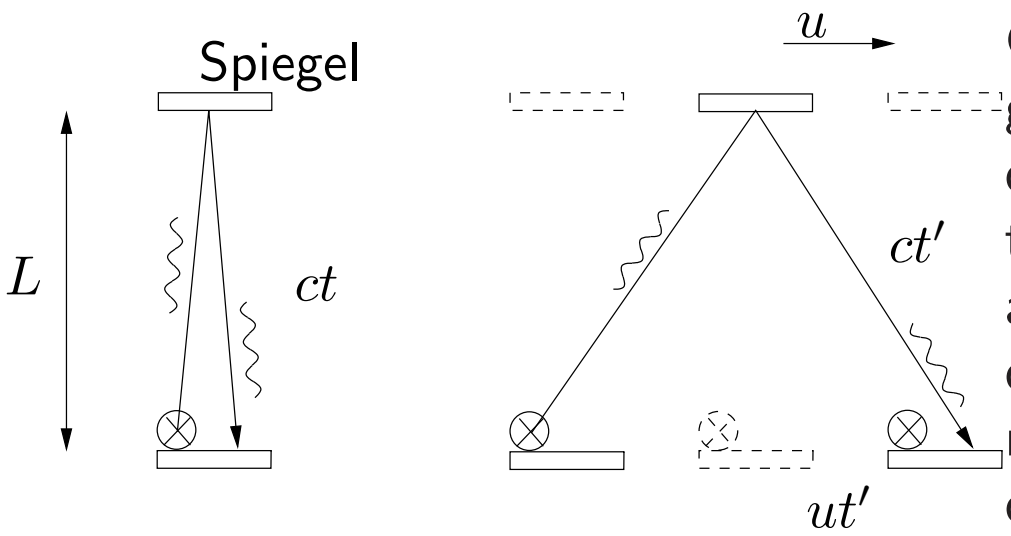
$$u' = \frac{u - v}{1 - (uv)/c^2}$$

und durch Einsetzen findet man

$$\gamma(u') = \left(1 - (u'/c)^2\right)^{-1/2} = \gamma(u)\gamma(v)\left(1 - uv/c^2\right).$$

Diese Lorentztransformationen gehen für $v \longrightarrow 0$ in die gewöhnlichen Galilei-Transformationen über. (Übung: Zeigen Sie dies!)

Der Lorentz-Faktor $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$



$$c^2t^2 = c^2t'^2 - u^2t'^2$$

$$t' = t/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Der Lorentz-Faktor γ kann mit dem Gedankenxperiment links einfach hergeleitet werden. Man findet dabei, dass die Zeit im schneller bewegten Bezugssystem langsamer vergeht als im stillstehenden. Dieser Effekt der Zeitdilatation wird bei energiereichen Myonen (Reaktionsprodukte der Wechselwirkung der galaktischen kosmischen Strahlung mit der Erdatmosphäre) gemessen. Diese sind in niedriger Höhe viel häufiger, als man nach ihrer Lebensdauer und Geschwindigkeit klassisch erwarten würde.

Herleitung der Lorentztransformation

Nach dem 1. Einsteinschen Postulat bewegt sich ein freier Körper in jedem Inertialsystem linear (gleichförmig gleichmäßig, Newton I). Deshalb muss sich der Ort z von $S \longrightarrow S'$ linear transformieren:

$$z' = Az + Bt; \qquad t' = Cz + Dt. \tag{1}$$

Nun müssen die Größen A, B, C und D in drei Schritten bestimmt werden.

1) Der Ursprung von S' bewegt sich relativ zu S mit v. Also gilt $z' = 0$ und $z = vt$. Folglich nach Glg.1

$$0 = Avt \; + \; Bt \quad \Longrightarrow \quad B = -Av. \tag{2}$$

2) Der Ursprung von S bewegt sich relativ zu S' mit $-v$. Also gilt $z = 0$ und $z' = -vt'$. Folglich nach Glg.1

$$-vt' = Bt \quad \text{und} \quad Dt = t' \Longrightarrow \quad -vDt = Bt; \quad D = -B/v \tag{3}$$

und mit Glg. 2 folgt

$$\underline{D = A.} \tag{4}$$

3) Nun schicken wir im Ursprung von S′ und S je einen Lichtblitz los. Nach Einstein 2 gilt $z' = ct'$ und $z = ct$:

$$z' = ct' \Longrightarrow ct' = cCz + Act = Cc^2t + Act, \tag{5}$$

aber auch

$$z' = Az - Avt = Act - Avt \quad = \quad Cc^2t + Act$$

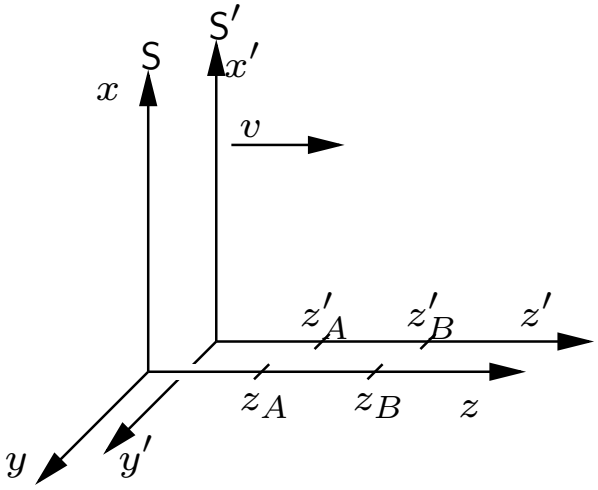
$$\begin{aligned} -Avt &= Cc^2t \\ C &= -\frac{Av}{c^2} \end{aligned} \tag{6}$$

Damit lautet Glg. 1 nun

$$z' = A\,(z - vt)\,; \qquad t' = A\left(-\frac{v}{c^2}z + t\right) \tag{7}$$

und die Lorentztransformation ist vollständig bestimmt, sobald wir A kennen. Übung: Bestimmen Sie A aus der Überlegung, dass sich S' gegenüber S mit v bewegt und S sich gegenüber S' mit $-v$. Resultat: $A = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$

Konsequenz: Relativität der Gleichzeitigkeit

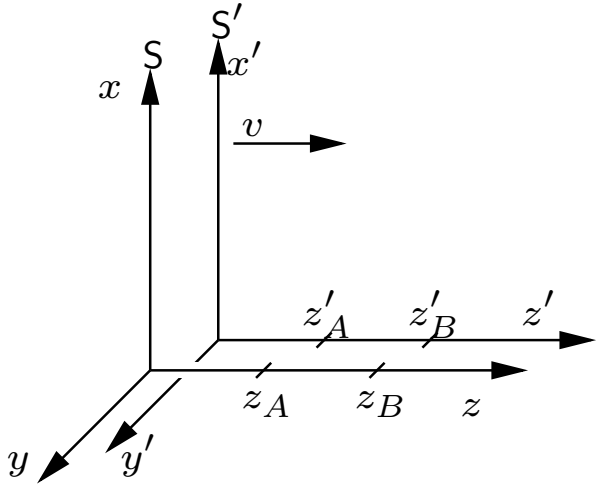


Zwei Ereignisse, die sich in S an verschiedenen Orten z_A und z_B gleichzeitig ereignen, erscheinen in S′ **nicht** gleichzeitig!

$$
\begin{aligned}
t'_A &= \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}z_A\right), \\
t'_B &= \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}z_B\right), \\
t'_A - t'_B &= \gamma\left(t_A - t_B + \frac{v}{c^2}z_B - \frac{v}{c^2}z_A\right), \\
t'_A &= t'_B + \frac{\gamma v}{c^2}\left(z_B - z_A\right).
\end{aligned}
$$

“Gleichzeitig” hängt vom Bezugssystem ab!

Konsequenz: Längen- oder Lorentzkontraktion[1]



Wir betrachten aus S den Abstand $L' = z'_B - z'_A$ (z. B. einen Zollstock) im bewegten S′. Dazu messen wir gleichzeitig (in S) zu $t = 0$ die entsprechenden Orte z_B und z_A.

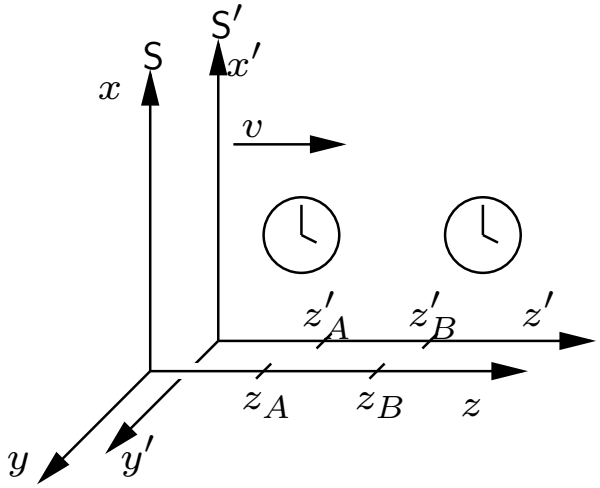
$$L' = z'_B - z'_A = \gamma z_B - \gamma z_A \Longrightarrow L = z_B - z_A = \frac{(z'_B - z'_A)}{\gamma}$$

Körper erscheinen entlang ihrer Bewegung verkürzt!

Übung: Wie sieht eine Kugel in S für einen Beobachter in S′ aus? Was passiert, wenn v sich immer mehr c nähert?

[1] Diese heißt manchmal auch Lorentz-Fitzgerald-Kontraktion.

Konsequenz: Zeitdilatation



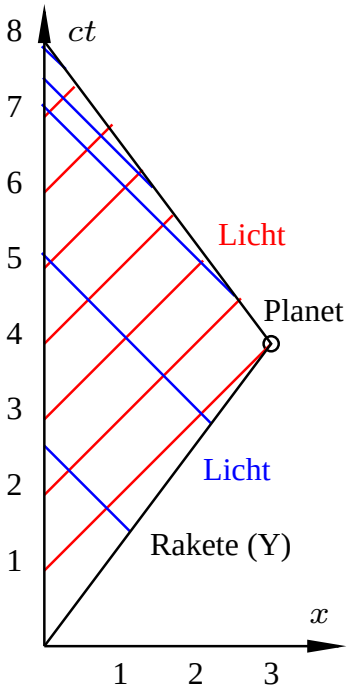
Die Uhren in S′ seien alle synchronisiert, ihr Stundenzeiger bewege sich jede Stunde. Ein Beobachter in S synchronisiert beim Vorbeiflug der ersten Uhr seine Uhr. Nach einer Stunde stellt er fest, dass in S′ noch keine Stunde vergangen ist, dass die Uhren in S′ langsamer gehen als seine Uhr!

$$t'_0 = 0, \qquad t'_1 = T'$$

$$t_0 = 0, \qquad t_1 = \gamma T'$$

Bewegte Uhren gehen langsamer!

Anwendung: Das Zwillingsparadoxon



X bleibt auf der Erde zurück, während Y in einer sehr schnellen (z. B. $\beta \approx 3/4$) Rakete zu einem fernen (z. B. 3 Lichtjahre) Planeten fliegt und wieder zurückkehrt. Bei Ankunft ist Y weniger gealtert, als X. Dies kann man mit Hilfe der Abbildung links gut verstehen. An ihrem Geburtstag senden beide einander jedes Jahr eine Botschaft per Licht (oder Radio). Die Botschaften von X sind rot eingezeichnet, die von Y blau.

Übung: Wie lange erscheint die Reise X, wie lange erscheint sie Y? Wie weit ist der Planet für X, wie weit ist er für Y?

Nach 4 Jahren in der Zeitrechnung von X erreicht Y den Planeten. In der Rakete sind für Y aber nur $4/\gamma(3/4c) \approx 4/1.5 = 2\ 2/3$ Jahre vergangen. Nach weiteren 4 X-Jahren ($2\ 2/3$ Y-Jahren) erreicht Y wieder die Erde. Für Y sind $5\ 1/3$ Jahre vergangen, für X 8 Jahre.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Wer gut aufgepasst hat, hat gesehen, dass in diesen Rechnungen die Lichtgeschwindigkeit nie transformiert wurde, d. h. als konstant in allen Bezugssystemen betrachtet werden musste. In der Tat folgt die spezielle Relativitätstheorie aus dieser Beobachtung: Unter Annahme einer konstanten Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen folgen die Gleichungen für die Lorentz-Transformationen.

Die Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ergibt sich als Phasengeschwindigkeit der Wellengleichung, die man aus den Maxwellgleichungen erhält.

Interessanterweise sind die Gleichungen der Elektrodynamik (2. Semester, Maxwellgleichungen) "invariant" gegenüber Lorentz-Transformationen. Sie sind es nicht gegenüber den "intuitiv einleuchtenden" Galilei-Transformationen (S. 2). Genaueres Betrachten zeigt aber, dass die Galilei-Transformationen für kleine Geschwindigkeiten ($v/c \ll 1$) aus den Lorentztransformationen hervorgehen, also in diesen als "Spezialfall" enthalten sind.

Vierer-Vektoren

Die Lorentztransformationen (Seite 2) "vermischen" Orts- und Zeitkomponenten (die z und t Komponenten). Wir müssen Raum und Zeit als Einheit auffassen (Raumzeit). Die Lorentztransformationen können mit sog. **Vierervektoren** besonders einfach beschrieben werden. Vierervektoren haben die allgemeine Form $(a_0,a_1,a_2,a_3) = (a_0,\vec{a})$. Ein Beispiel für einen Vierervektor ist der Raum-Zeit Vierervektor $x = (x^0,x^1,x^2,x^3) = (ct,\vec{x})$. Achtung: x^2 heißt nicht "x hoch zwei" sondern hier wird gerade der Index oben geschrieben! In solchen Vierervektoren ausgedrückt lauten die soeben repetierten Lorentztransformationen

$$x^{0\prime} = \gamma(x^0 - \beta x^3); \quad x^{1\prime} = x^1; \quad x^{2\prime} = x^2; \quad x^{3\prime} = \gamma(x^3 - \beta x^0).$$

Man beachte das Vertauschen von x^0 und x^3!

Die Lorentztransformation kann auch kompakter geschrieben werden als:

$$x^{\mu\prime} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

womit auch klar ersichtlich ist, was passiert, wenn die Bewegung nicht parallel zur z-Achse verläuft. Im letzten Schritt haben wir die sog. Einsteinsche Summenkonvention angewendet, laut der über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Wie genau der Index heißt, über den summiert wird, ist egal - er verschwindet am Ende, die Gleichung oben könnte genausogut $x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha}$ lauten.

Der Raum, oder die Raumzeit, der durch die Vierervektoren definiert ist, heißt Minkowsky-Raum. Ein Abstand oder die Länge eines Vierevektors wird, wie

gewohnt, mit dem Skalarprodukt bestimmt, nur lautet der Ausdruck für das Skalarprodukt von zwei Vierervektoren a und b im Minkowsky-Raum

$$ab \doteq a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{oder} \quad l^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

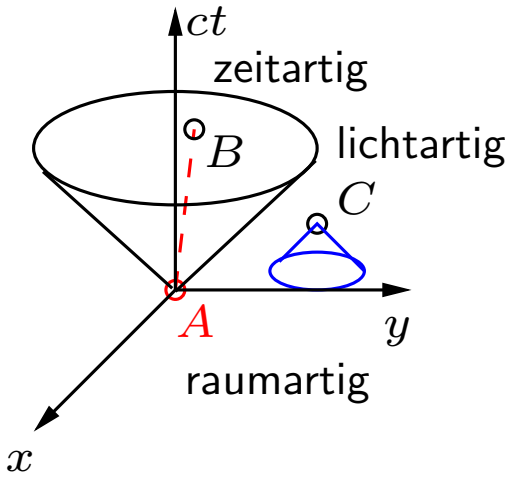
Dieses Skalarprodukt ist **invariant** unter Lorentztransformationen[2]. Die Invarianz des Skalarproduktes $x \cdot x$ kann man sich vorstellen wie die Invarianz des Radius einer drei-dimensionalen Kugel unter Rotationen im dreidimensionalen (euklidischen) Raum. Man muss im Minkowsky-Raum nur eine andere **Metrik** verwenden als im euklidischen Raum:

$$\text{nicht} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \ \text{sondern} \quad l^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Im Minkowsky-Raum muss l^2 nicht zwingend nicht-negativ sein: Ist $l^2 > 0$ heißt x^μ **zeitartig**, ist $l^2 < 0$ heißt x^μ **raumartig**, ist $l^2 = 0$ heißt x^μ **lichtartig**.

[2] Vergleichen und lösen Sie Übung 4.14 im Demtröder!

Was bedeutet zeit-, licht- und raumartig?



In der Skizze links ist die Bedeutung von zeitartig, lichtartig und raumartig für einen um eine Dimension reduzierten Minkowskyraum angedeutet. Die rot gestrichelte **Weltlinie** verbindet die zwei Punkte A und B. Für sie gilt

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 > 0,$$

A und B sind also **zeitartig** verbunden. Ein Ereignis in A kann B kausal beeinflussen. Alle Punkte auf dem angedeuteten Kegel sind **lichtartig** mit A verbunden. Alle Punkte innerhalb des Kegels sind (wie B) zeitartig mit A verbunden. Alle Punkte außerhalb des Kegels sind **raumartig** mit A verbunden und können durch ein Ereignis in A nicht kausal beeinflusst werden. Ein Punkt C kann nur durch Punkte, die innerhalb seines in der Vergangenheit liegenden **Lichtkegels** (blau) liegen, beeinflusst werden.

Die Metrik $g_{\mu\nu}$ im Minkowsky-Raum

Ein Abstand im euklidischen Raum wird nach Pythagoras bestimmt,

$$r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2,$$

im Minkowsky-Raum lautet der Ausdruck für den Abstand

$$l^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \doteq x_\mu x^\mu, \text{ wo } x_\mu \doteq g_{\mu\nu} x^\nu.$$

x_μ heißt **kovarianter** und x^μ **kontravarianter** Vierervektor.

Der Viererimpuls $p^\mu \doteq m_0 u^\mu$

Der Viererimpuls ist durch eine der klassischen Definition sehr ähnliche gegeben, $p^\mu = m_0 u^\mu$. Dabei ist die Masse m_0 die **Ruhemasse** des Teilchens und u^μ die **Vierergeschwindigkeit**, deren Komponenten durch $u^\mu = \gamma(u)(c,\vec{v})$ gegeben sind, wo $\vec{v}$ die normale "Dreier"-Geschwindigkeit ist. Man kann den Viererimpuls auch durch die totale Energie E und den Dreierimpuls $\vec{p}$ ausdrücken,

$$p^\mu = m_0 u^\mu \quad \text{oder auch} \quad p^\mu = (E/c,\vec{p}).$$

Die Invarianz unter Lorentztransformationen bedeutet

$$p_{1\mu} p_2^\mu = E_1 E_2/c^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = \text{const.}$$

Für $p_1 = p_2 = p$ bedeutet dies

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = \text{const.}$$

Einsetzen von $p^\mu = m_0 u^\mu$ liefert aber auch

$$p^2 = (m_0 u)^2 = m_0^2 \gamma^2 (c,\vec{v})^2 = m_0^2 \gamma^2 (c^2 - v^2) = m_0^2 \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} = m_0^2 c^2.$$

Der Betrag des Viererimpulses $|p| = \sqrt{p^2}$ ist also proportional zur Ruheenergie oder Ruhemasse des Teilchens, $|p| = (1/c) m_0 c^2$. Mit $p^2 = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2$ erhalten wir den folgenden Ausdruck für die totale Energie des Teilchens,

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad \text{die relativistische } \textbf{Energie-Impuls-Beziehung}.$$

Die bekannte Energie- und Impulserhaltung in elastischen Stößen kann mit Vierervektoren elegant ausgedrückt werden: **In jedem Stoß bleibt der Viererimpuls des Systems erhalten.**
Übung: Zeigen Sie, dass $u_\mu u^\mu$ invariant und gleich c^2 ist!

Mit diesen Kenntnissen können wir durch Komponentenvergleich die bekannten relativistischen Ausdrücke für Energie und Impuls angeben:

$$p = m_0 u \;=\; m_0 \gamma(v)(c,\vec{v}) \;=\; (E/c,\vec{p}), \;\text{ also}$$

$$\begin{aligned} E &= \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \\ \vec{p} &= m_0 \gamma \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \\ \vec{v} &= \frac{\vec{p}}{m_0 \gamma} = \vec{p}\frac{c^2}{E}. \end{aligned}$$

Offensichtlich geht der Ausdruck für den relativistischen Impuls für kleine Geschwindigkeiten ($v \ll c$) in den klassischen Ausdruck über. Dies gilt aber nicht

für die Energie! Wir entwickeln den Ausdruck in eine Taylorreihe

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Der **erste** Term $(m_0 c^2)$ ist die **Ruheenergie** des Teilchens, der **zweite** gibt den **klassischen Ausdruck** für die **kinetische Energie** an. Für schnelle Teilchen ist die kinetische Energie gegeben durch

$$T = m_0 c^2 \left(\gamma - 1\right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Die Energie eines Teilchens ist die Summe aus Ruheenergie und kinetischer Energie. Sie ist nicht gleich der kinetischen Energie!

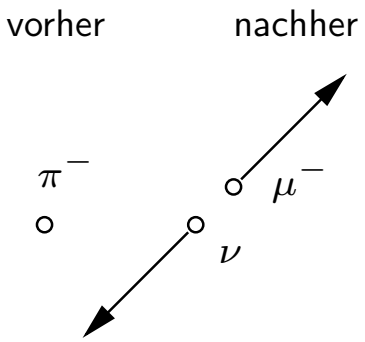
Gibt es masselose Teilchen?

Nach der Newtonschen Mechanik gibt es keine masselosen Teilchen. Diese hätten keinen Impuls ($mv = 0$) und keine kinetische Energie ($\frac{1}{2}mv^2 = 0$). Wegen $F = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ $(= m \cdot a)$ würde keine Kraft auf sie wirken und wegen Newton III würden sie auch auf keine anderen Teilchen eine Kraft ausüben können. Sie wären "dynamische Geister". Ja, man könnte sie nicht einmal nachweisen! Wie denn?

Mit der speziellen Relativitätstheorie darf es masselose Teilchen geben, wenn sie sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Dann sind die Ausdrücke für $\vec{p}$ und E von Seite 20 einfach undefiniert weil gleich $0/0$. Für $v = c$ lautet $p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = 0$, also hat ein Photon die Energie $E = |\vec{p}|c$. Dies löst das Problem, dass ein Photon zwar Energie hat, aber eben keine Masse[3].

[3] In einigen exotischen Theorien, die insbesondere ganz kleine Distanzen in ganz großen Gravitationsfeldern beschreiben, ist es nicht unmöglich, dass das Photon eine Masse hat. Je nach Theorie findet man obere Grenzen für die Masse des Photons von 10^{-60} bzw. 10^{-50} kg. Das ist 10^{-30} bzw. 10^{-20} mal leichter als ein Elektron. Alle gängigen Theorien behandeln das Photon als masselos.

Anwendung I: Zerfall des Pions



Ein sich in Ruhe befindendes π^- zerfalle in ein μ^- und ein masseloses Neutrino ν. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Myons?
Dazu verwenden wir Energie und Impulserhaltung mit Vierervektoren:

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu \quad \text{bzw.} \quad p_\nu = p_\pi - p_\mu \quad \text{bzw.} \quad p_\mu = p_\pi - p_\nu.$$

Quadrieren von $p_\nu = p_\pi - p_\mu$ ergibt wegen $\vec{p_\pi} = \vec{0}$ (das π^- sei ja in Ruhe)

$$0 = p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi p_\mu = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2\frac{E_\pi}{c}\frac{E_\mu}{c} = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu,$$

woraus E_μ folgt. Ähnlich verfahren wir mit $p_\mu = p_\pi - p_\nu$. Quadriert ist das

$$m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi E_\nu = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi |\vec{p}_\nu| c = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi |\vec{p}_\mu| c,$$

woraus wir $|\vec{p}_\mu|$ erhalten

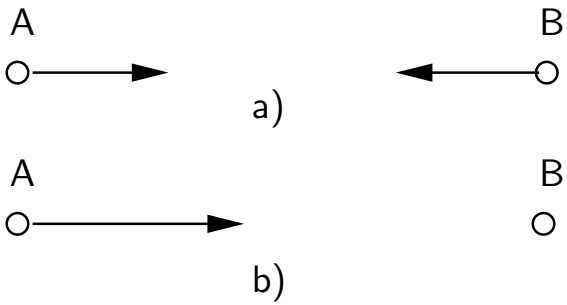
$$2m_\pi |\vec{p}_\mu| = (m_\pi^2 - m_\mu^2)c, \text{ also } |\vec{p}_\mu| = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{2m_\pi}.$$

Mit $\vec{v} = \vec{p}c^2/E$ (s. Seite 20) erhalten wir schließlich die gesuchte Geschwindigkeit

$$|\vec{v}_\mu| = \frac{|\vec{p}_\mu| c^2}{E_\mu} = \frac{\frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c^3}{2m_\pi}}{\frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c.$$

Die Richtung kann zu Recht nicht bestimmt werden, jede ist erlaubt. Nur der Totalimpuls muss verschwinden. Um den Betrag zu bestimmen, setzt man die Ruhemasse des Pions und des Myons ein: $m_\pi = 139{,}6\text{MeV}/c^2$ und $m_\mu = 105{,}7\text{MeV}/c^2$. Man erhält so $\beta = v/c = 0{,}271$.

Anwendung II: Elektron-Positron Beschleuniger



Erbauer von Teilchenbeschleunigern müssen sich fragen, ob sie Teilchen auf gegenläufige Teilchen (Fall a) oder ein festes Target (Fall b) schießen wollen. Was ist besser, wenn möglichst hohe Energien erreicht werden sollen? Wir nehmen an, dass beide Teilchen gleich schwer seien.

Fall b) ist einfach zu lösen. Die Energie von Teilchen A im Ruhesystem von Teilchen B ist gerade gleich der Energie von A im Laborsystem, $T' = T$.
Im Fall a) berechnen wir die totale kinetische Energie von Teilchen A und B im Schwerpunktsystem und im Ruhesystem von Teilchen B. Dazu schreiben wir den totalen Viererimpuls in beiden Systemen auf:

$$p^{\mu}_{\mathrm{tot}} = \left(\frac{E_A + E_B}{c}, \vec{0}\right) = \left(\frac{2E}{c}, \vec{0}\right), \quad p^{\mu\prime}_{\mathrm{tot}} = \left(\frac{E'_A + m_B c^2}{c}, \vec{p}'\right)$$

und setzen das Quadrat beider Ausdrücke gleich, weil ja $p_\mu p^\mu = p'_\mu p'^\mu$ gilt.

$$\left(\frac{2E}{c}\right)^2 = \left(\frac{E' + mc^2}{c}\right)^2 - (\vec{p}')^2 = \frac{E'^2}{c^2} + \frac{2}{c^2}E'mc^2 + m^2c^2 - (\vec{p}')^2.$$

Mit $E'^2 - \vec{p}^2c^2 = m^2c^4$ (Seite 19) erhalten wir

$$2E^2 = mc^2\left(E' + mc^2\right).$$

Durch Auflösen nach E' und Einsetzen von $T = E - mc^2$ und $T' = E' - mc^2$ erhalten wir die kinetische Energie von Teilchen A im Bezugssystem des bewegten Teilchens B

$$T' = 4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right).$$

Es lohnt sich also, Teilchen gegenläufig aufeinander zu schießen.

Der Ausdruck

$$T' = 4T\left(1 + \frac{T}{2mc^2}\right).$$

geht im klassischen Fall ($T \ll mc^2$) in den erwarteten Ausdruck $T' = 4T$ über. Wir sehen aber auch, dass die relative Energie zwischen relativistischen Teilchen wesentlich größer ist, als klassisch erwartet. Für Elektronen und Positronen von 1 GeV (ca. 2000 mal die Ruhemasse des Elektrons) erhalten wir

$$T' = 4T\left(1 + \frac{2000}{2}\right) \approx 4000T.$$

Eigenzeit und -geschwindigkeit

Ich habe in der Diskussion des Vierimpulses auf Seite 18 die Vierergeschwindigkeit $u = \gamma(c,\vec{v})$ nur oberflächlich eingeführt. Warum kommt da ein Lorentz-Faktor drin vor? Um dies zu beantworten, ist es sinnvoll zu untersuchen, wie die Zeit in einem bewegten Bezugssystem vergeht. Ein Reisender bewege sich mit großer Geschwindigkeit durch das Planetensystem. Wegen der Zeitdilatation geht seine Uhr langsamer, als die im Planetensystem synchronisierten Uhren. Während im Planetensystem eine Zeit $\mathrm{d}t$ vergeht, vergeht bei ihm nur eine Zeit $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma$ (Zeitdilatation). **Bewegte Uhren gehen langsamer.** Man nennt die Zeit τ **Eigenzeit**. Sie ist die im Bezugssystem laufende Zeit. Weil jeder Beobachter die Eigenzeit eines Teilchens (Bezugsystems) im Prinzip ablesen kann, ist dies eine invariante Größe. (Ja, so einfach ist das! Eine Größe, die jedem Beobachter als gleich erkennbar ist, ist invariant. So z.B. die Halbwertszeit von Myonen. Die ist invariant.) Die **Eigengeschwindigkeit** ist nun die **Ableitung des Ortes nach der Eigenzeit**.

Die **Eigengeschwindigkeit** des Systems ist also definiert durch

$$\vec{u} \doteq \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \gamma\vec{v}.$$

Man kann sich jetzt fragen, ob es eine gute Idee war, zwei Größen aus zwei Bezugssystemen zu mischen. Aber was soll man denn sonst tun? $\vec{u}$ ist im mitbewegten System per Definition null! Sauberer kann man dies nun mit dem **Geschwindigkeitsvierervektor** geschrieben,

$$u^\mu \doteq \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau},$$

dessen nullte Komponente $u^0 = \mathrm{d}x^0/\mathrm{d}\tau = \gamma \mathrm{d}(ct)/\mathrm{d}t = \gamma c$ ist. Deshalb gilt, wie bereits eingeführt, $u = \gamma(c,\vec{v})$. Die Eigengeschwindigkeit ist invariant, $u_\mu u^\mu = c^2$.

Anwendung III: Interplanetare Reise

Eine Rakete beschleunigt konstant mit $1g$ auf ihrer Reise zum Saturn, auf halbem Wege dreht sie sich um und bremst mit derselben Beschleunigung ab. Wie sieht ihre Bahn aus? Der Einfachheit halber soll sie sich geradlinig bewegen und wir setzen $c = 1$ (Dies ist eine beliebte Vereinfachung der Rechnungen).

Der Geschwindigkeitsvierervektor lautet dann (mit $c = 1$) $u = (\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau,\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau,0,0)$ und seine Ableitung nach der Eigenzeit gibt die Beschleunigung, die in der Rakete gefühlt wird (und die $1g$ betragen soll),

$$a = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = (\mathrm{d}^2t/\mathrm{d}\tau^2,\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}\tau^2,0,0),$$

wo $t = t(\tau)$ und $x = x(\tau)$ zu bestimmende Funktionen der Eigenzeit τ sind.

Wegen der Invarianz der Vierergeschwindigkeit gilt

$$\begin{aligned} u_\mu u^\mu &= (\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau)^2 - (\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau)^2 = c^2 = 1, \text{ ferner muss gelten} \\ a_\mu a^\mu &= (\mathrm{d}^2t/\mathrm{d}\tau^2)^2 - (\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}\tau^2)^2 = 0 - g^2. \end{aligned}$$

Dies ist ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen, die Lösung ist

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \frac{1}{g}\,\sinh(g\tau), \\ x(\tau) &= \frac{1}{g}\,\cosh(g\tau) - \frac{1}{g}, \end{aligned}$$

wo der letzte Term die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ widerspiegelt. Einsetzen des

Ausdrucks für die Eigenzeit, $\tau(t) = (1/g) \cdot \sinh^{-1}(gt)$ liefert nach etwas Rechnen

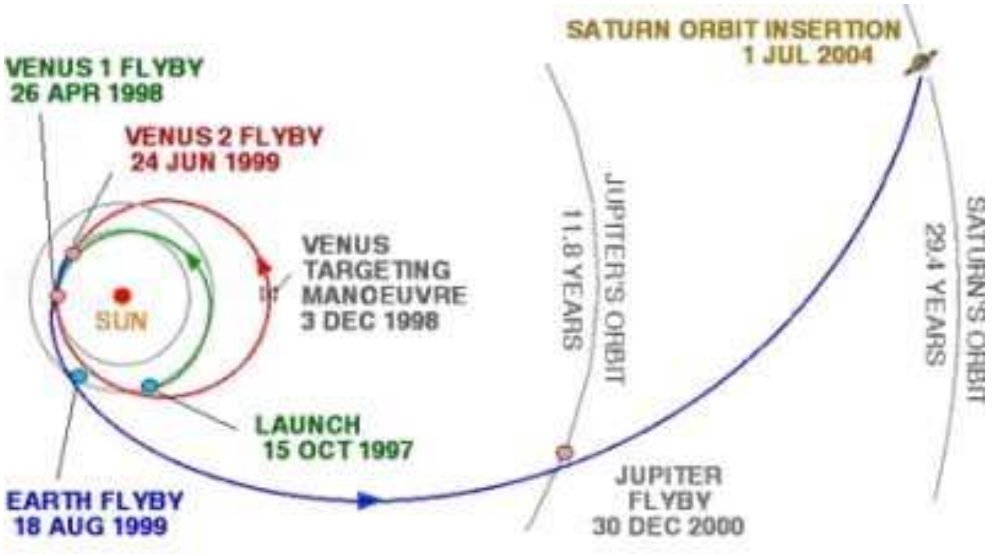
$$x(t) = \frac{1}{g}\left(\sqrt{1 + (gt)^2} - 1\right).$$

Hier muss man nun noch cs einfügen damit die Einheiten stimmen[4], also

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1 + (gt/c)^2} - 1\right).$$

Invertieren nach der Zeit ergibt die Zeit, die eine Rakete mit konstanter Beschleunigung g brauchen würde, um zu einem Abstand x zu gelangen.

[4]Dieser Prozess ist eindeutig! Deshalb macht es nichts, wenn man am Anfang $c = 1$ setzt und c in den Rechnungen weglässt.



Zum Vergleich: Die NASA/ESA Raumsonde Cassini wurde am 15. Oktober 1997 zum Saturn gestartet und ist dort am 1. Juli 2004 in die Umlaufbahn eingetreten. Cassini hat also 2269 Tage oder 6,21 Jahre gebraucht, um dorthin zu kommen. Die soeben besprochene (ziemlich unrealistische) Raketenreise würde nur wenig länger als eine Woche dauern, nämlich 8,4 Tage. Die Reise von Cassini war natürlich auch nicht einfach eine geradlinige, wie man nebenan sehr gut sieht. Die Webseite der ESA gibt mehr Auskünfte über Cassini[5].

[5] `http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Cassini-Huygens/The_mission`

Relativistische Beschleunigung und Kraft

Wir definieren die Beschleunigung wie im Beispiel der interplanetaren Reise

$$a \doteq \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\left(\gamma(c,\vec{v})\right)}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}\left(\gamma(c,\vec{v})\right)}{\mathrm{d}t} = \gamma \left(c\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\vec{v} + \gamma \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \right).$$

Die Kraft ist nach wie vor die Impulsänderung pro Zeit - pro Eigenzeit:

$$F \doteq \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \right) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}m_0 u}{\mathrm{d}\tau} = m_0 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = m_0 a.$$

Wir erhalten das Newtonsche Resultat $F = m_0 a$, nur eben als Vierervektor geschrieben! Hübsch, nicht?

Oder doch nicht? Betrachten wir den räumlichen Anteil der Kraft,

$$\vec{F} = m_0\gamma\left(\dot{\gamma}\vec{v} + \gamma\dot{\vec{v}}\right),$$

so sehen wir, dass er nicht mehr zwingend parallel zur Beschleunigung sein muss! Im nicht-relativistischen Fall gilt $\gamma = 1 =$ const. Damit geht der Ausdruck in die bekannte Formel $\vec{F} = m_0\vec{a}$ über.

Die Energie oder Arbeit, klassisch durch Kraft mal Weg, $E = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, gegeben, verallgemeinern wir zu $F \cdot \mathrm{d}x = F \cdot u\mathrm{d}\tau$. Wir multiplizieren noch mit m_0

$$m_0\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} \cdot u\mathrm{d}\tau = m_0 u \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau = p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(p \cdot p)\mathrm{d}\tau = 0$$

weil der Viererimpuls ja invariant ist! Er wird lediglich im Minkowskyraum "gedreht", seine Länge $p^2 = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = m_0^2c^2$ bleibt dabei erhalten.

Die Schwarzkörperstrahlung I

Die Wärmestrahlung eines Körpers ist nicht bei jeder Wellenlänge gleich intensiv. Gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts wurde fieberhaft nach einem allgemein gültigen Gesetz für die funktionale Abhängigkeit gesucht. Mit Erfolg hatte man für den langwelligen (niedrigfrequenten) Bereich der Strahlung die Formel

$$I(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \mathrm{d}\nu \tag{8}$$

gefunden, das sog. Rayleigh-Jeanssche Strahlungsgesetz. Dies besagt, dass wir für jede Temperatur starke Ultraviolett- und sehr, sehr viel Röntgenstrahlung haben müssten, was unserer Erfahrung widerspricht. Dies war absurd, und die Leute wussten es, konnten aber keine bessere Erklärung finden!

Planck gelang es empirisch einen Zusammenhang zu finden, der auch das

Wiensche Verschiebungsgesetz erklärte,

$$\lambda_{\max} = b/T, \text{ wo } b = 2.8978 \cdot 10^{-3}\mathrm{mK}.$$

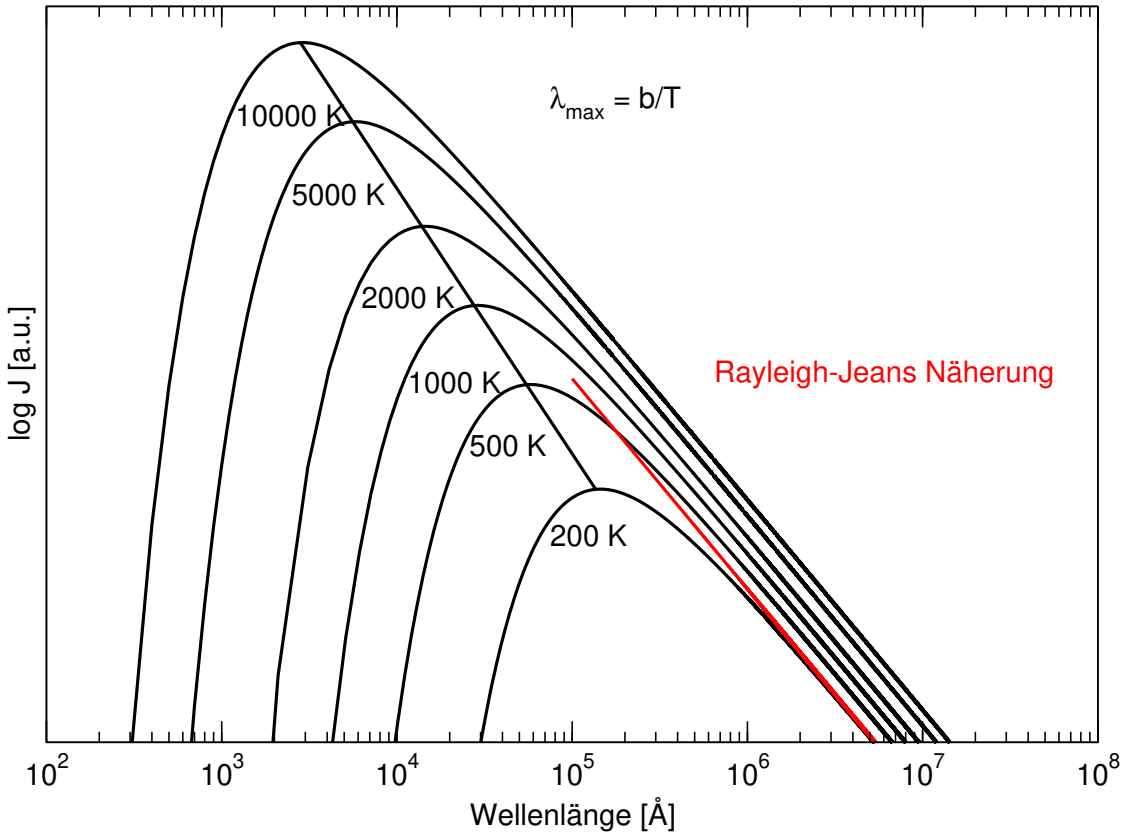
Zwei Monate später hatte er durch das Einführen des berühmten Wirkungsquantums h, welches die Strahlung quantisierte, die korrekte Formel gefunden:

$$I(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

bzw. in Abhängigkeit von der Wellenlänge

$$I(\lambda) = \frac{2c^2h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$

Das Wiensche Verschiebungsgesetz



Die Schwarzkörperstrahlung II

Die Idee, wie sich die spektrale Form der Schwarzkörperstrahlung herleiten lässt, folgt aus der Quantenmechanik. Wir stellen uns einen Ofen aus lauter Oszillatoren bestehend vor. Davon sind einige im Grundzustand, andere in einem ersten angeregten Zustand, etc. Aus der Quantenmechanik wissen wir, dass sich die Zustände jeweils um eine Energie $E = h\nu = \hbar\omega$ unterscheiden. Uns interessiert nun die über alle Oszillatoren gemittelte Energie - die mittlere Energie des Körpers bzw. der damit im thermischen Gleichgewicht stehenden Strahlung. Wir bezeichnen mit N_0 die Anzahl Oszillatoren im Grundzustand, mit N_1 die Anzahl im ersten angeregten Zustand, etc.

Aus der Quantenmechanik wissen wir, dass die Wahrscheinlichkeit, die Energie $E = jh\nu$ aufzuweisen auch von der Form $\exp(-\text{Energie}/kT)$ ist, nämlich $p_j \propto \exp(-jh\nu/kT)$. Damit ist $N_1 = N_0 \exp(-h\nu/kT)$, und allg. $N_j = N_0 \exp(-jh\nu/kT)$. Wir definieren $x \doteq \exp(-h\nu/kT)$.

Die totale Energie des Systems stammt aus der Summe der Energien aller Oszillatoren. Vom Grundzustand kommt kein Beitrag, vom ersten angeregten Zustand kommt $N_1 h\nu = N_0 h\nu x$, vom zweiten $N_2 2h\nu = 2N_0 h\nu x^2$, . . . ,$N_j jh\nu = jN_0 h\nu x^j$. Die mittlere Energie des Systems ist die totale Energie geteilt durch die Anzahl Oszillatoren

$$\langle E\rangle = \frac{E_{\mathrm{tot}}}{N_{\mathrm{tot}}} = \frac{N_0 h\nu\left(0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots\right)}{N_0\left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right)} = h\nu\frac{\sum_{j=0}^{\infty} jx^j}{\sum_{j=0}^{\infty} x^j}$$

Die auftretenden Summen können einfach berechnet werden. Im Zähler steht x mal die Ableitung nach x vom Nenner. Die Ableitung ist eine lineare Operation und kann vor die Summe gezogen werden. Die Summe

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, \quad \text{womit man} \quad \langle E\rangle = h\nu\frac{x}{1-x} \quad \text{erhält.}$$

Einsetzen von $x = \exp(-h\nu/kT)$ ergibt $\langle E \rangle = h\nu \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}$, der statt kT in das Rayleigh-Jeanssche Strahlungsgesetz (Glg. 8) gehört. Damit war, wie Einstein bemerkt hat, die Ultraviolettkatstrophe behoben und das Plancksche Strahlungsgesetz für die Schwarzköperstrahlung hergeleitet:

$$I(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \mathrm{d}\nu \longrightarrow I(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{\mathrm{d}\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Planck hat die Quantisierung von Licht sehr wohl verstanden, aber nicht weiter physikalisch interpretiert. Er nahm an, dass der Emissionsprozess Licht in kleinen Einheiten abgibt. A. Einstein hat dann 1905 die radikale Ansicht vertreten, dass diese Quantisierung nicht dem Emissionsprozess zuzuschreiben ist, sondern eine Eigenschaft des elektromagnetischen Feldes selber ist. Er nutzte die Quantisierung um den photoelektrischen Effekt zu erklären. Trifft ein Lichtquant auf die Oberfläche eines Metalls, so kann es, wenn es genug Energie hat, ein Elektron aus seiner Bindung lösen (ionisieren). Das Elektron verlässt die

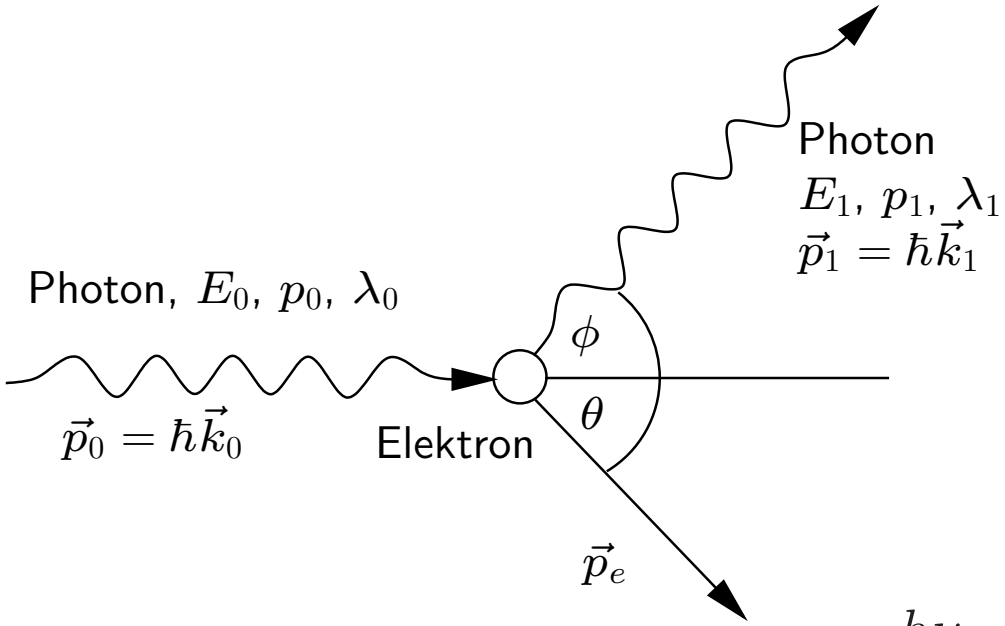
Oberfläche mit einem bestimmten Energieverlust (die Austrittsarbeit) und hat anschließend die Energie

$$E \leq h\nu - W.$$

Experimentell wird der Photoeffekt mit verschiedenen schmalbandigen Filtern und einer verstellbaren Verzögerungsspannung zwischen Metall und einem Elektronendetektor durchgeführt. Aus der Verzögerungsspannung erhält man die Energie der Elektronen, aus den Filtereigenschaften die Wellenlänge oder Frequenz des Lichtes.
Diese Ansicht, dass Licht aus Teilchen bestehen würde, war gar nicht salonfähig..., schließlich war eine der großen Errungenschaften der Physik des 19-Jahrhunderts gewesen, zu zeigen, dass Licht durch Wellen beschrieben wird (Beugung, Interferenz). Millikan, der den Photoeffekt[6] sehr genau untersucht hatte, anerkannte, dass Einsteins Idee zwar die Experimente sehr genau voraussagen konnte, verneinte anfangs die Haltbarkeit dieser "semi-korpuskularen Theorie".

[6] Siehe seine Nobel-Lecture:`https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1923/ceremony-speech/`

Der Comptoneffekt



A. Compton hat 1923 experimentell gefunden, dass Licht an einem ruhenden Teilchen gestreut wird und dabei seine Wellenlänge verändert. Streut ein Photon an einem Elektron und überträgt Impuls und Energie, so bleiben dabei natürlich beide Größen erhalten, was wir wieder mit dem Vierimpuls schreiben:

$$p_\gamma + p_e = p'_\gamma + p'_e, \quad \text{wo mit} \quad \frac{h\nu}{c} = \frac{hc}{c\lambda} = \frac{h}{\lambda} \quad \text{und} \quad \hbar k = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$p_\gamma = \left(\frac{h\nu_0}{c}, \hbar k_0, 0, 0\right) = \left(\frac{h}{\lambda_0}, \frac{h}{\lambda_0}, 0, 0\right); \quad p_e = \left(\frac{E_e}{c}, 0, 0, 0\right)$$

$$p'_\gamma \quad = \quad \left(\frac{h}{\lambda_1},\frac{h}{\lambda_1}\cos\phi,\frac{h}{\lambda_1}\sin\phi,0\right); \quad p'_e = p'_e$$

Wir lösen nach p'_e auf und quadrieren

$$\begin{aligned}
\left(p_\gamma + p_e - p'_\gamma\right)^2 &= \left(p'_e\right)^2, \\
p_\gamma^2 + p_e^2 + p_\gamma'^2 + 2p_e\left(p_\gamma - p'_\gamma\right) - 2p_\gamma p'_\gamma &= \left(p'_e\right)^2, \\
0 + m_e^2c^2 + 0 + 2m_ec\left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda_1}\right) - 2\frac{h}{\lambda_0}\frac{h}{\lambda_1}\left(1-\cos\phi\right) &= m_e^2c^2,
\end{aligned}$$

Anmultiplizieren von $(\lambda_0 \cdot \lambda_1)/(2hm_ec)$ ergibt die Comptonsche Streuformel

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c\left(1-\cos\phi\right),$$

wo $\lambda_c = h/(m_e c)$ die Compton-Wellenlänge des Elektrons ist. Sie ist eine quantenmechanische Größe der Elektrons. Anmultiplizieren von $1/\lambda_0 = \nu_0/c$ zeigt

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda_c}{\lambda_0}\left(1 - \cos\phi\right) = \frac{h\nu_0}{m_e c^2}\left(1 - \cos\phi\right),$$

was besagt, dass Photonen für die Comptonstreuung eine große Energie haben müssen, idealerweise vergleichbar mit der Ruheenergie des Elektrons.

Compton hat auch bemerkt, dass einige Photonen gestreut wurden, ohne ein Elektron aus dem Zielmaterial auszulösen. Diese Photonen hatten mit dem Kern oder dem ganzen Atom gestreut, dessen Comptonwellenlänge wesentlich kleiner ist ($m \gg m_e$) und damit die Verschiebung der Wellenlänge oder der Energie des Photons nicht mehr messbar war.

Damit war Einsteins Quantenhypothese für Photonen etabliert.

Das Photon[7]

Was hat die Quantennatur von Licht für Folgen? In der klassischen Elektrodynamik wird die Coulombkraft durch das Coulombfeld vermittelt. Ein Elektron trägt zum Feld bei und spürt auch das Feld. Nach Einstein ist dieses elektromagnetische Feld nun aber in Photonen quantisiert! Man stellt sich die Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen jetzt so vor, dass zwischen diesen Ladungen laufend Photonen ausgetauscht werden. Jede Ladung emittiert Photonen und absorbiert Photonen.

Dies ist der Usprung der Quantenfeldtheorie![8]

Diese Vorstellung gilt heute nicht nur für die elektromagnetische Kraft, sondern auch für die starke und die schwache Wechselwirkung, ja sogar für die Gravitation. Die Austauschteilchen sind Gluonen, W- und Z-Bosonen und das Graviton.

[7] Der Name Photon wurde 1926 durch den Chemiker Gilbert Lewis vorgeschlagen.

[8] bzw. der Quantenelektrodynamik (QED)