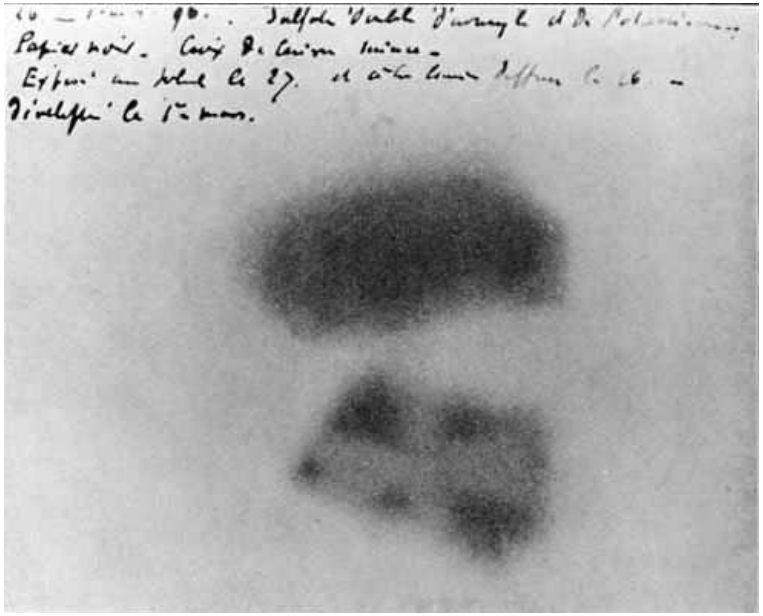
Chemische Elemente und Isotope

Um 1900 war das Periodensystem der Elemente bekannt, 1897 fand Thomson das Elektron (Kathodenstrahlen) und die Rutherfordschen Streuexperimente zeigten wenig später die heute geläufige Struktur des Atoms. Die unbefriedigende Situation, dass Helium mit zwei Elektronen nicht doppelt so schwer ist, wie Wasserstoff mit einem, wurde 1932 durch Chadwicks Entdeckung des Neutrons beseitigt. Für das verbleibende Jahr 1932 war dann alle Materie auf die einfachst mögliche Art aufgebaut, durch Protonen, Neutronen und Elektronen.

$$ {}^{1}_{1}\mathrm{H},\quad {}^{2}_{1}\mathrm{H},\quad {}^{3}_{2}\mathrm{He},\quad {}^{4}_{2}\mathrm{He},\quad {}^{12}_{6}\mathrm{C},\quad {}^{14}_{7}\mathrm{N},\ \ldots\ {}^{A}_{Z}\mathrm{Element}. $$

Oben wird die Massenzahl A (Protonen plus Neutronen) und unten die Kernladung (Anzahl Protonen) angegeben. Eigentlich ist durch die Angabe der Kernladungszahl Z das Element bereits bestimmt, es wird aber trotzdem angegeben.

Radioaktivität



Gegen Ende des vorletzten Jahrhunderts, um 1896, haben Henri Becquerel und andere fluoreszierende Erscheinungen untersucht, die bei Bestrahlung mit Röntgenstrahlung auftrat. Dabei haben sie einige Elemente gefunden, die die Fluoreszenz von selber anregten. Becquerel fand zudem, dass Uransalz auch Photoplatten schwärzt und dies auch durch schwarzes Papier hindurch - es war also kein chemischer Prozess. Brachte er ein Stück Metall dazwischen, so konnte dieses den Effekt verhindern. In dieser Abbildung einer Originalaufnahme Becquerels ist oben die Schwärzung durch Uransalz zu sehen, unten hatte Becquerel ein Malteser-Kreuz dazwischengelegt.[1]

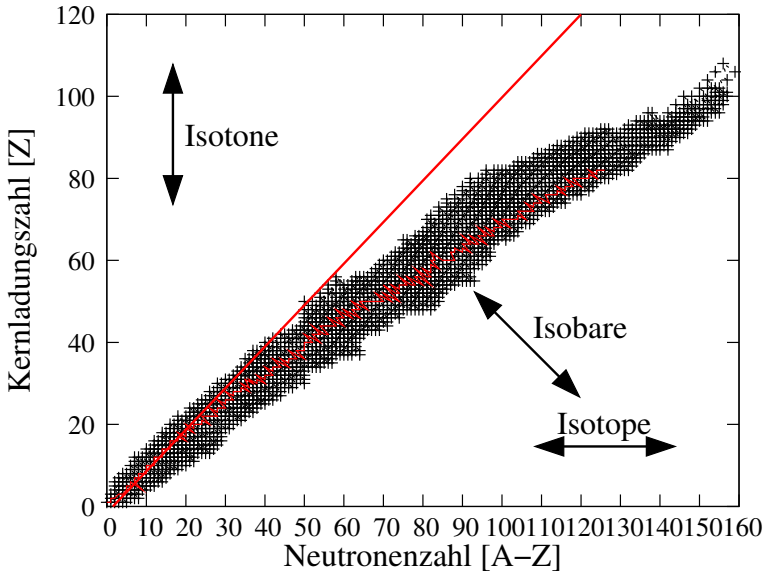
[1] Wo nicht anders vermerkt, stammen Abbildungen von Wikipedia oder wurden von mir angefertigt.

Marie Curie

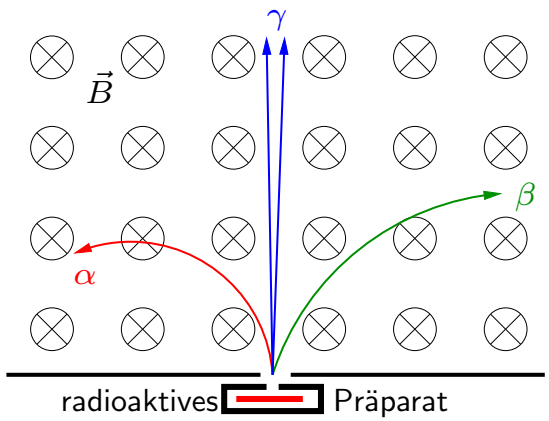
Marie Curie (geb. Sklodowska) fand, dass Uransalze die umgebende Luft leitfähig machten und dass ihre Aktivität strikt proportional zur Uranmenge war. Es handelte sich bei dem Effekt also nicht um eine Wechselwirkung zwischen Molekülen aufgrund chemischer Bindungen, sondern musste aus dem Atom selber stammen. Sie fand auch, dass Pechblende vier mal aktiver war als Uran und schloss daraus, dass Pechblende ein weiteres Element beinhalten musste, welches aktiver als Uran war. Im Juli und Dezember 1898 verkündeten die Curies dann die Existenz von "Polonium"[2] und Radium. Sie erfanden zu diesem Zeitpunkt auch das Wort "Radioaktivität".

[2] Zu Ehren von Marie Curies Heimatland, Polen.

Natürliche Radioaktivität



Es gibt also Elemente, die "von sich aus" radioaktiv sind, wir nennen das "natürliche Radioaktivität". Sie geht auf die Existenz instabiler Kerne zurück. Diese können im Grundzustand instabil sein oder auch in einem angeregten Zustand, wovon sie dann durch elektromagnetische Wechselwirkung in den Grundzustand übergehen können. In der Nuklidkarte links sind alle instabilen Kerne schwarz und die stabilen Kerne rot eingezeichnet. Die meisten Kerne sind also instabil (und damit radioaktiv), zerfallen aber so schnell, dass sie in der Natur nicht vorkommen. Natürlich radioaktive Kerne sind langlebig oder Glied in einer Zerfallskette eines langlebigen Kerns. Früher verwendete man häufig die sog. **Karlsruher Nuklidkarte**, in der stabile Kerne schwarz eingezeichnet sind.



Untersuchungen von Rutherford unmittelbar nach der Entdeckung der Radioaktivität zeigten, dass diese aus zwei verschiedenen Arten von Strahlung besteht, die er α- und β-Strahlung nannte. Diese werden in einem Magnetfeld in unterschiedliche Richtungen abgelenkt, weshalb es sich um positiv und negativ geladene Teilchen handeln musste. Wenig später entdeckte Villard eine dritte Komponente, die γ-Strahlung, die durch ein Magnetfeld nicht beeinflusst wird und deshalb elektrisch neutral sein musste. Erst 1914 konnten von Laue und Mitarbeiter dann durch Beugungsexperimente an Kristallen zeigen, dass γ-Strahlung elektromagnetischer Natur ist, wie Licht und Röntgenstrahlung, nur mit größerem Durchdringungsvermögen (und Energie).

Eine interaktive Nuklidkarte mit vielen nützlichen Informationen finden Sie hier: `https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/`

Das Zerfallsgesetz

Kernzerfälle sind stochastisch. Die Anzahl Zerfälle pro Zeiteinheit, die sog. **Aktivität** A, ist proportional zur Anzahl Kerne, die zerfallen können,

$$A = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N, \quad \text{wo} \quad \lambda = |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2$$

Dabei ist die **Übergangswahrscheinlichkeit** λ nur von Naturkonstanten abhängig, nicht aber von Umgebungsgrößen wie Temperatur, Druck, etc. Integration der Zerfallsgleichung liefert das exponentielle Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t), \quad \text{wo} \quad N_0 = N(t = 0).$$

Die **mittlere Lebensdauer** τ ist gegeben durch die inverse Übergangswahrscheinlichkeit, $\tau = 1/\lambda$, und gibt die Zeit an, in der die Aktivität auf $1/e \approx 0.36788$

abgeklungen ist. In einer **Halbwertszeit** $t_{1/2}$ nimmt die Aktivität um die Hälfte ab, $t_{1/2} = \ln(2)/\lambda \approx 0.69315/\lambda$.

Gibt es für einen gegebenen Anfangs- und Endzustand verschiedene alternative Zerfallsmöglichkeiten, so addieren sich die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$, wie sich auch die Aktivitäten addieren.

Wir haben die Übergangswahrscheinlichkeit $\lambda = |\langle\psi_f|\psi_i\rangle|^2$ in der **Dirac**-Notation geschrieben. Dabei ist $|\psi_i\rangle$ ein Anfangszustand, der durch seine Quantenzahlen bestimmt ist und $\langle\psi_f|$ ein entsprechender Endzustand. Diese Notation wird oft auch "bra" $\langle\psi|$ und "ket" $|\psi\rangle$ Notation genannt und versteckt die Mathematik.

$$\langle\psi_f|\psi_i\rangle = \int \psi(n, l, \ldots, \vec{x})^*_f \psi(n, l, \ldots, \vec{x})_i \mathrm{d}\vec{x} \quad \text{(im Ortsraum)}.$$

Linienbreite des Übergangs

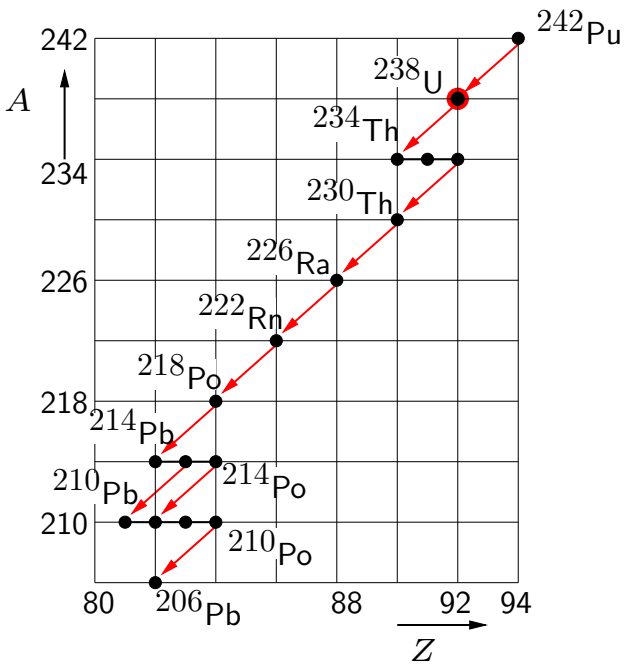
Wir betrachten den Übergang eines Kernes aus einem Zustand ψ_i in einen Zustand ψ_f mit Übergangswahrscheinlichkeit $\lambda = |\langle\psi_f|\psi_i\rangle|^2$ und mittlerer Lebensdauer $\tau = 1/\lambda$.
Ähnlich wie die Unschärferelation für Ort und Impuls, gibt es diese auch für die beiden konjugierten Größen Energie und Zeit,

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad \longrightarrow \quad \Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t},$$

wo wir für die Zeit die mittlere Lebensdauer eingesetzt haben. Der Übergang $\psi_i \longrightarrow \psi_f$ hat eine endliche Linienbreite, ΔE.

Übung: Bestimmen Sie die Energieunschärfe für den Übergang ^{14}C nach ^{14}N. ^{14}C hat eine mittlere Lebensdauer von 8267 Jahren.

Zerfallsketten



Viele radioaktive Stoffe treten als Glied einer Zerfallskette auf. Links ist die sog. Uran-Radium-Kette abgebildet. Die roten Pfeile zeigen α-Zerfälle, die schwarzen Linien gehen nach rechts und zeigen β-Zerfälle. Die Beschreibung solcher Zerfallsketten

$$N_1 \overset{\lambda_1}{\to} N_2 \overset{\lambda_2}{\to} N_3 \overset{\lambda_3}{\to} N_4 \ldots$$

mit Übergangswahrscheinlichkeiten λ_i geschieht mit einem System von gekoppelten Differentialgleichungen,

$$\dot{N}_i = \lambda_{i-1} N_{i-1} - \lambda_i N_i,$$

wo der erste Term der Quellterm für Zustand i und der zweite der Verlustterm sind. Weil keine Kerne verlorengehen, muss ferner auch gelten, dass $N_1 + N_2 + \ldots + N_i + \ldots = N$.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir $N_1 \to N_2 \to N_3$, wo $|3\rangle$ stabil sei. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= -\lambda_1 N_1, \\
\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= +\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \\
\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} &= +\lambda_2 N_2.
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die mittlere Glg. mit $\exp(\lambda_2 t)$ und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}e^{\lambda_2 t} + \lambda_2 N_2 e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 N_{10} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t},$$

wo wir auf den ersten Zustand $|1\rangle$ das Zerfallsgesetz angewendet haben.

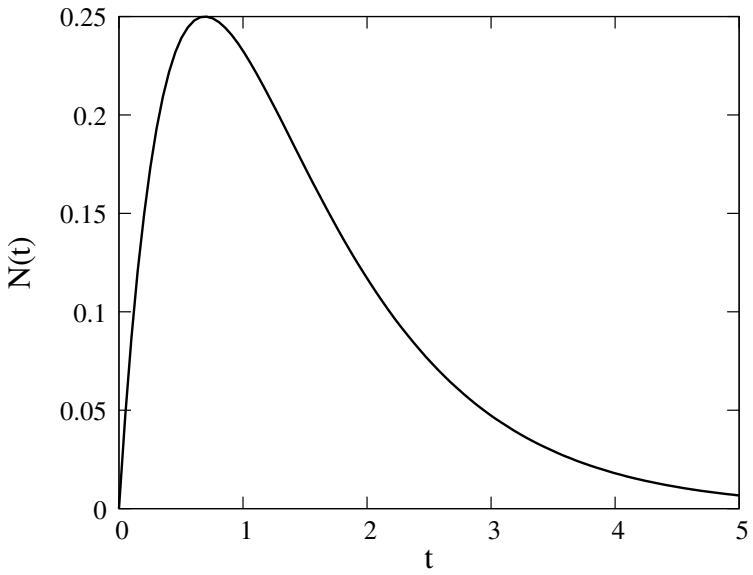
Links steht nichts anderes als $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(N_2 \cdot \exp(\lambda_2 t))$, also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(N_2 e^{\lambda_2 t}\right) = \lambda_1 N_{10} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}.$$

Integration liefert

$$N_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + C,$$

wo die Integrationskonstante durch $N_2(t=0) = 0$ zu $C = -N_{10}\lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1)$ bestimmt ist.



Nach Division durch $\exp(\lambda_2 t)$ erhalten wir

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 \cdot N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) .$$

Das Verhalten von $N_2(t)$ ist in der Abb. links gezeigt.

Übung: Zeigen Sie, dass für $N_3(t)$ gilt

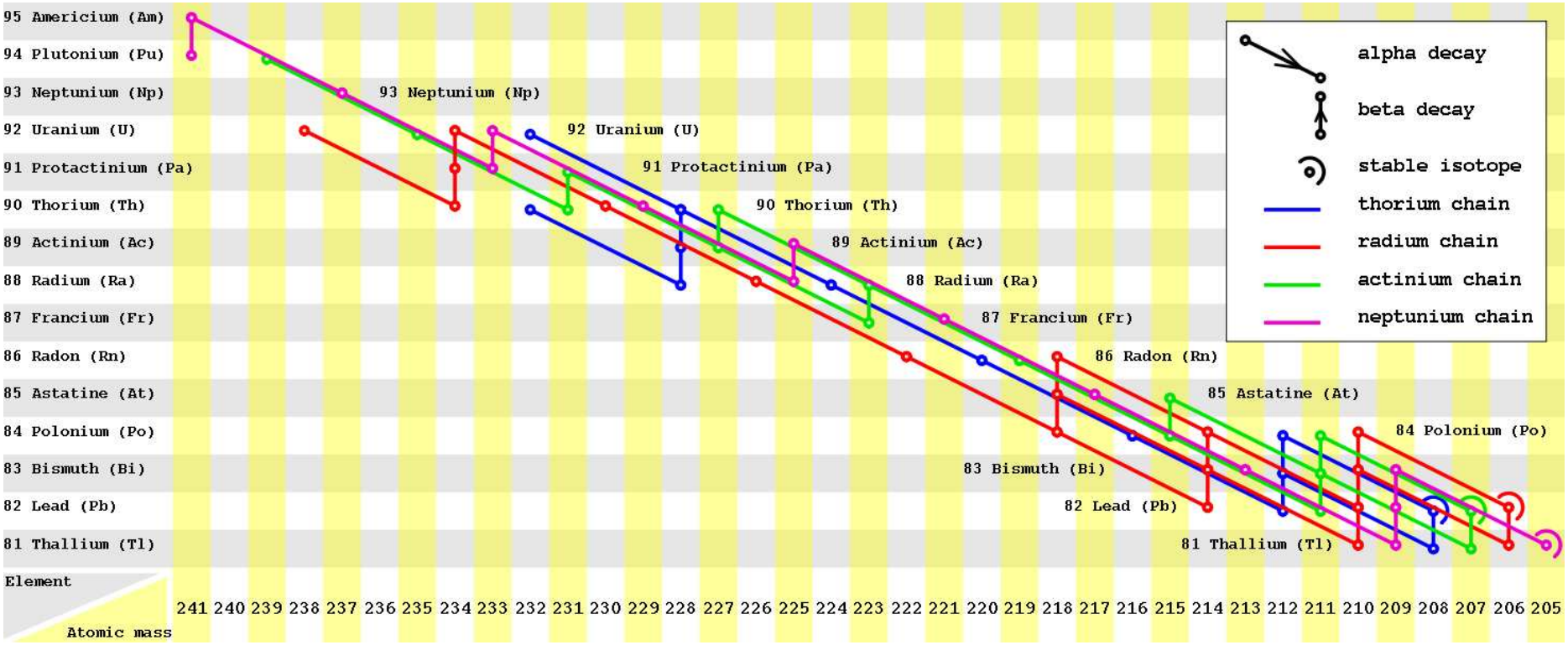
$$N_3(t) = N_{10} \left[1 - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} \right) \right] .$$

Gibt es in einer Zerfallskette einen Kern mit einer besonders langen Lebensdauer, so sind die Aktivitäten der folgenden Zerfallsprodukte durch den Zuwachs aus dem Zerfall des Mutterkerns begrenzt und etwa gleich groß wie die der Muttersubstanz.

Zerfallsketten II

A	Reihe	Mutterkern	Endprodukt	$t_{1/2}$ [a]	Zerfälle
$4n$	Thorium	^{232}Th	^{208}Pb	$1.4 \cdot 10^{10}$	$6\alpha + 4\beta$
$4n+1$	Neptunium	^{237}Np	^{205}Tl	$2.14 \cdot 10^{6}$	$8\alpha + 4\beta$
$4n+2$	Uran	^{238}U	^{206}Pb	$4.47 \cdot 10^{9}$	$8\alpha + 6\beta$
$4n+3$	Aktinium	^{235}U	^{207}Pb	$7.04 \cdot 10^{8}$	$7\alpha + 4\beta$

Weil sich die Nukleonenzahl bei einem α-Zerfall um 4 ändert und bei einem β-Zerfall gar nicht, muss für alle Kerne einer bestimmten Zerfallsreihe gelten, dass $A = 4n + S$, wo n ganzzahlig ist und $S = 0, 1, 2, 3$ die betreffende Zerfallsreihe ist. Weil die Zerfallsreihen für $S = 0$ und $S = 4$ identisch wären, kann es nur vier Zerfallsreihen geben. Es sind dies die in der obenstehenden Tabelle aufgeführten. Die angegebenen Halbwertszeiten gelten für die Gesamtsysteme.


95 Americium (Am)
94 Plutonium (Pu)
93 Neptunium (Np)
92 Uranium (U)
91 Protactinium (Pa)
90 Thorium (Th)
89 Actinium (Ac)
88 Radium (Ra)
87 Francium (Fr)
86 Radon (Rn)
85 Astatine (At)
84 Polonium (Po)
83 Bismuth (Bi)
82 Lead (Pb)
81 Thallium (Tl)
Element
Atomic mass
241 240 239 238 237 236 235 234 233 232 231 230 229 228 227 226 225 224 223 222 221 220 219 218 217 216 215 214 213 212 211 210 209 208 207 206 205
alpha decay
beta decay
stable isotope
thorium chain
radium chain
actinium chain
neptunium chain

Das Alter der Erde I

Gegen Ende des 19-ten Jahrhunderts gab es viele Gelehrte, unter anderem Lord Kelvin, die das Alter der Erde mit "zwischen 20 und 40 Millionen Jahre, eher näher an 20 Millionen Jahre" angaben. Sie hatten das Alter bestimmt durch Überlegungen, wie lange die Erde brauchen würde um eine feste Kruste zu formen, wenn sie als vollständig geschmolzenes Objekt entstanden war. Ohne die Konvektion im Erdinneren zu berücksichtigen, erhielt Thomson (der später Lord Kelvin wurde), einen Wert zwischen 20 und 400 Millionen Jahren. Dieses kleine Erdalter war z. B. für Darwin schwierig, weil es sehr wenig Zeit ließ, um die Evolution der Arten zu ermöglichen[3]. Die Geschichte wurde nicht vereinfacht durch Rechnungen von Helmholtz und Newcomb, die die Zeit berechneten, welche die Sonne brauchen würde um durch Gravitation auf ihren heutigen Radius zu schrumpfen. Sie erhielten 22 und 18 Millionen Jahre.

[3]Heute datieren Molekulargenetiker die letzten gemeinsamen Vorfahren aller lebender Organismen auf Erden auf nicht später als vor 3,5 - 3,8 Milliarden Jahren.

Einfluss der Radioaktivität

Die Entdeckung der Radioaktivität eröffnete eine weitere Energiequelle als Erklärung, warum die Erde nicht so schnell abgekühlt war. Rutherford bestimmte das Alter von Steinen aus deren Heliumgehalt und erhielt 40 Millionen Jahre. Beim Vorstellen seiner Resultate war auch Kelvin dabei. Rutherford erzählte später[4]:

"I came into the room, which was half dark, and presently spotted Lord Kelvin in the audience and realized that I was in trouble at the last part of my speech dealing with the age of the earth, where my views conflicted with his. To my relief, Kelvin fell fast asleep, but as I came to the important point, I saw the old bird sit up, open an eye, and cock a baleful glance at me! Then a sudden inspiration came, and I said, 'Lord Kelvin had limited the age of the earth, provided no new source was discovered. That prophetic utterance refers to what we are now considering tonight, radium!' Behold! the old boy beamed upon me."

[4] Eve, A. S., (1939). "Rutherford: Being the life and letters of the Rt. Hon. Lord Rutherford", Cambridge Univ. Press

Datierungsmethoden

Aus den Häufigkeiten der Endprodukte $D(t)$ von Zerfallsketten kann man Alter bestimmen. Mit dem Zerfallsgesetz der Muttersubstanz M (mit Zerfallskonstante λ_M) erhält man für die Häufigkeit des Tochterisotops $D(t)$

$$D(t) = D_0 + M_0 \left(1 - e^{-\lambda_M \cdot t}\right) \; = \; D_0 + M(t) \cdot \left(e^{\lambda_M \cdot t} - 1\right).$$

Messbar sind jeweils $D(t)$ und $M(t)$ und man muss einen guten Schätzwert für D_0 haben. In der Regel werden diese Häufigkeiten durch ein Referenzisotop R geteilt damit man Häufigkeitsverhältnisse in der Gleichung hat.

$$\frac{D(t)}{R} = \left(\frac{D}{R}\right)_0 + \left(e^{\lambda_M \cdot t} - 1\right) \cdot \frac{M(t)}{R}, \tag{1}$$

wo das Referenzisotop nicht Teil einer Zerfallskette ist und sich chemisch möglichst ähnlich verhält wie D (z.B. ein anderes stabiles Isotop des Elementes D ist.).

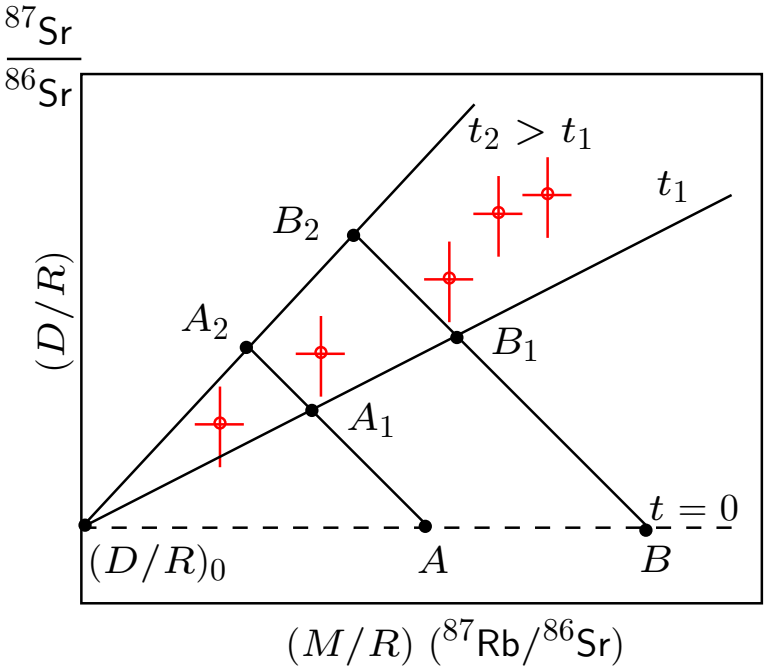
Für eine Datierung macht man die Annahmen, dass

1. das Ereignis, welches datiert werden soll, alle schon vorhandenen Tochterisotope entfernt hat oder D_0 irgendwie bestimmbar ist und

2. das System ab dem zu datierenden Ereignis bis zum Zeitpunkt der Messung abgeschlossen bleibt, d.h. kein Austausch von Mutter- oder Tochterkernen mit der Umwelt stattfindet.

Beide Bedingungen sind nur höchst selten zu 100% erfüllt[5]. Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass verschiedene Fraktionen des Materials (wie z.B. veschiedene Mineralien in einem Gestein) verschiedene Verhältnisse M/D haben können.

[5] Darum steht auch ein $(D/R)_0$ in der Gleichung 1



Trägt man nun D/R gegen M/R auf, so entspricht Gleichung 1 einer Geradengleichung. Die Steigung ist durch $(\exp(\lambda_M t) - 1)$ gegeben und ist eine streng monoton steigende Funktion des Alters. Der y-Achsenabschnitt ist $(D/R)_0$. Die Lage einer bestimmten Komponente (Fraktionen A und B) der Probe auf der sog. **Isochrone** hängt vom Verhältnis (M/R) ab. Links sind schematisch die Isochronen für $t = 0$, $t = t_1$ und $t = t_2 > t_1$ im Rb-Sr System gezeichnet ($\tau_{1/2\ ^{87}\mathrm{Rb}} = 4.97 \cdot 10^{10}$ Jahre).

Durch Anpassung des Parameters Zeit (t) in Gleichung 1 an die Messpunkte (rot) kann nun das Alter der Probe bestimmt werden. Zuverläßiger kann man das Alter aber bestimmen, wenn man zwei verschiedene Zerfallsreihen benutzt.

Pb-Pb-Datierung und das Erdalter

Nier und andere[6] haben 1941 diese Datierungsmethode entwickelt, die zwei Zerfallsketten benutzt. Dividiert man Gleichung 1 für den Mutterkern ^{235}U durch dieselbe Gleichung für Mutterkern ^{238}U und nimmt als Referenzisotop ^{204}Pb, welches nicht Teil einer Zerfallskette ist, so erhält man

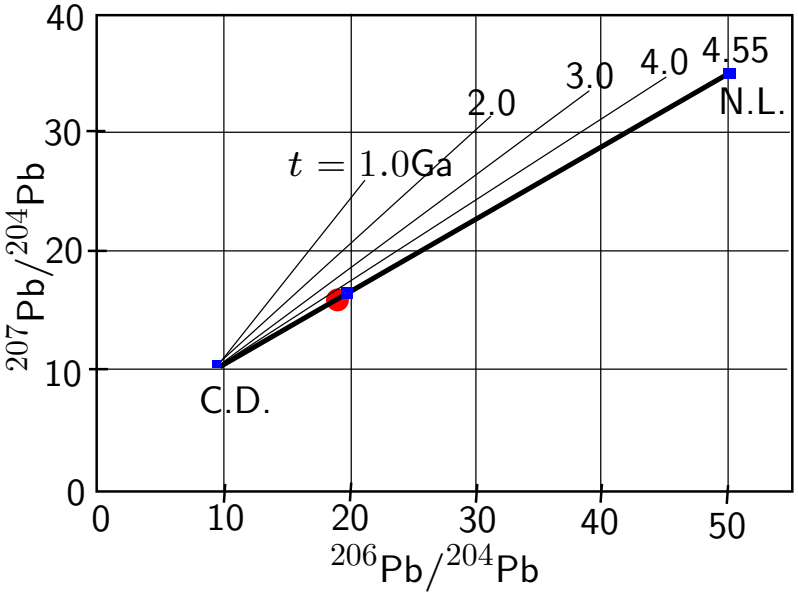
$$\left(\frac{\left(\frac{^{207}\mathrm{Pb}}{^{204}\mathrm{Pb}}\right)(t) - \left(\frac{^{207}\mathrm{Pb}}{^{204}\mathrm{Pb}}\right)_0}{\left(\frac{^{206}\mathrm{Pb}}{^{204}\mathrm{Pb}}\right)(t) - \left(\frac{^{206}\mathrm{Pb}}{^{204}\mathrm{Pb}}\right)_0} \right) = \left(\frac{1}{137,88}\right) \frac{e^{\lambda_{235}\cdot t} - 1}{e^{\lambda_{238}\cdot t} - 1},$$

wo $1/137,88 = (^{235}\mathrm{U}/^{238}\mathrm{U})(t)$ und daraus die Geradengleichung

$$\left(\frac{^{207}\mathrm{Pb}}{^{204}\mathrm{Pb}}\right)(t) = \left(\frac{1}{137,88}\right) \frac{e^{\lambda_{235}\cdot t} - 1}{e^{\lambda_{238}\cdot t} - 1} \cdot \left(\left(\frac{^{206}\mathrm{Pb}}{^{204}\mathrm{Pb}}\right)(t) - \left(\frac{^{206}\mathrm{Pb}}{^{204}\mathrm{Pb}}\right)_0 \right) + \left(\frac{^{207}\mathrm{Pb}}{^{204}\mathrm{Pb}}\right)_0 .$$

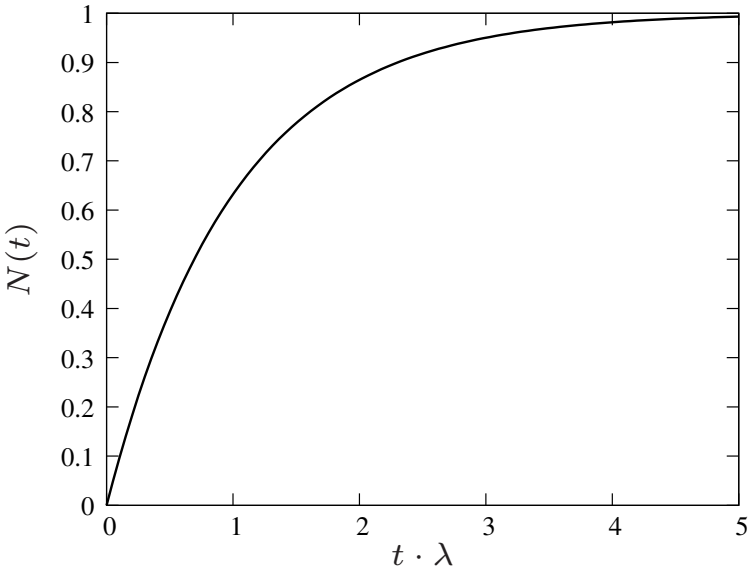
[6] Nier et al., Phys. Rev., **60**, 112 - 116, (1941) oder DOI:http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.60.112

Pb-Pb-Datierung von Meteoriten und der Erde



Patterson hat 1956 das heute allgemein akzeptierte Erdalter publiziert und dafür die Pb-Pb-Methode verwendet. Dazu musste er einen Wert für $(\frac{^{207}\mathrm{Pb}}{^{204}\mathrm{Pb}})_0$ und $(\frac{^{206}\mathrm{Pb}}{^{204}\mathrm{Pb}})_0$ finden. Von allen bekannten Meteoriten hatte der Eisenmeteorit Canyon Diablo die niedrigsten Werte (10,34 und 9,46) und der steinerne Meteorit Nuevo Laredo die höchsten (34,86 und 50,28), was die beiden Extrema (blau) der Isochrone links markiert. Andere Meteorite hatten Werte um 16 und 20 (ebenfalls blau). Ozeansedimente sind wohl die am besten durchmischten Proben von der Erde und liegen auf derselben Isochrone (roter Kreis). Deshalb hat Patterson angenommen, dass die Erde gleich alt ist wie die Meteorite und schloss daraus auf das Erdalter von 4,55 Milliarden Jahren.

Aktivierung



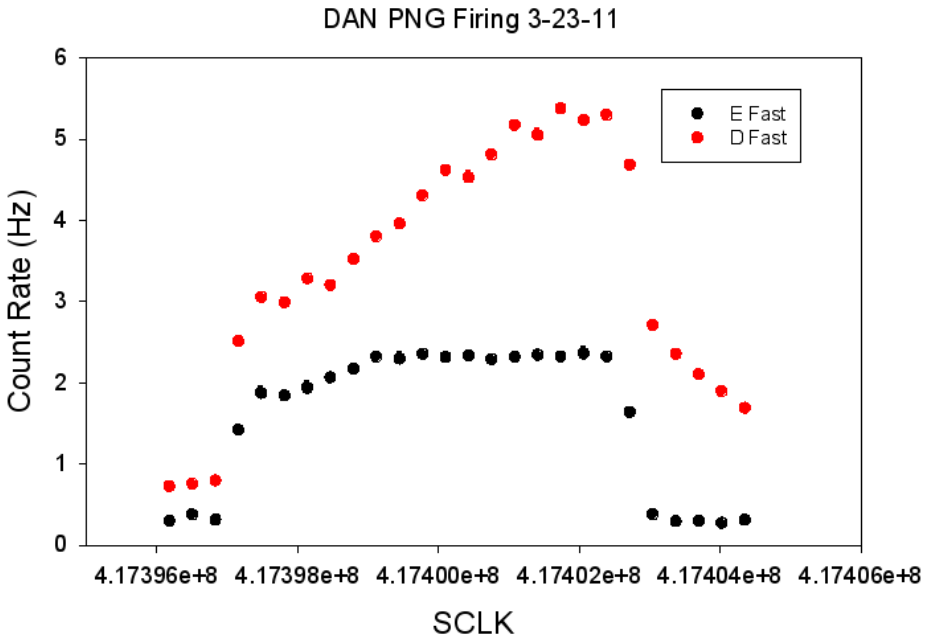
Oft werden heute radioaktive Präparate durch Bestrahlung oder an Beschleunigern künstlich hergestellt. Dabei werden mit einer Produktionsrate P neue instabile Kerne erzeugt. Dann muss gelten $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = P - \lambda \cdot N$. Die Aktivität einer solchen Probe beträgt dann[7]

$$A(t) = \lambda N(t) = P\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Nach $t = 3/\lambda$ hat dann das Präparat bereits ca. 97% seiner möglichen Aktivität erreicht. Die meisten radioaktiven Präparate für Medizin, Forschung und Lehre werden so hergestellt.

[7] Anmultiplizieren von $\exp(\lambda t)$ wie auf Seite 11 und Integration. Anfangsbedingung $N(0) = 0$.

Beispiel von Neutronenaktivierung: MSL/RAD



Unser Sensor 'Radiation Assessment Detector' (RAD) für die NASA Mars Science Laboratory Mission (MSL) wurde im März 2011 gleichzeitig mit dem russischen 'Dynamic Albedo of Neutrons' (DAN) Instrument getestet. Dieses emittiert Neutronen der Energie 14 MeV, welche das Aluminium des Rovers aktivieren.

$$^{27}\mathrm{Al}(\mathrm{n},\mathrm{p})^{27}\mathrm{Mg}$$

Das ^{27}Al fängt ein Neutron ein und emittiert prompt ein Proton, womit es in ein ^{27}Mg verwandelt wird. Das ^{27}Mg macht mit einer Halbwertszeit von

9,458 Minuten einen β^--Zerfall zu ^{27}Al. Der angeregte ^{27}Al-Kern zerfällt innert Picosekunden unter Aussendung von Gamma-Strahlung von 843.7 keV (71%, 35 ps) und 1.014 MeV (29%, 1,49 ps), welche durch RAD gemessen werden.

Einheiten der Aktivität

Heute wird die Aktivität in Einheiten von Becquerel[8] gemessen,

$$1\text{Becquerel} = 1\text{Bq} = 1\text{Zerfall pro Sekunde.}$$

Die Wirkung radioaktiver Strahlung wird in zwei (drei) Einheiten gemessen. Die Ionisation wird definiert als die entstehende Ladung pro kg und hat die SI-Einheit C/kg. Oft wird sie noch in (veralteten) Röntgen gemessen, wobei ein Röntgen diejenige Strahlungsmenge an γ-Strahlung ist, die $2 \cdot 10^9$ Ionenpaare pro Mililiter Luft erzeugt, oder, in anderen Worten,

$$1\text{Röntgen} = 1\text{R} = 2.58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{kg}} (\text{Luft}).$$

[8] Oft findet man noch die Einheit Curie: $1\text{Ci} = 3.7 \cdot 10^9 \text{Bq}$.

Oft ist die abgegebene Energiemenge pro Masse, die sog. **Dosis**, interessanter, sie wird in Gray gemessen,

$$1\text{Gray} = 1\text{Gy} = 1\frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

Ist die biologische Wirksamkeit gefragt, wird die Dosis mit einem Qualitätsfaktor Q multipliziert, die sog. **Äquivalentdosis** wird in Sievert gemessen,

$$1\text{Sievert} = 1\text{Sv} = Q \cdot \text{Gy}.$$

Die Qualitätsfaktoren werden durch die "International Commission on Radiological Protection" (ICRP) definiert. Mehr dazu später in dieser Vorlesung.

Zerfallsarten

- Der α-Zerfall: Emission eines α-Teilchens (eines ${}^4_2$He-Kernes) aus einem Mutterkern ${}^A_Z$X. Dieser geht dabei über in einen Kern ${}^{A-4}_{Z-2}$X:

$$ {}^A_Z\mathrm{X} \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y}. $$

- Der β-Zerfall: Emission eines β-Teilchens, also eines Elektrons (β^-) oder eines Positrons (β^+) aus einem Kern

$$ {}^A_Z\mathrm{X} \xrightarrow{\beta^\pm} {}^{A}_{Z\mp1}\mathrm{Y}, $$

in dem dabei ein Neutron (Proton) in ein Proton (Neutron) umgewandelt wird. Die Kernladungszahl wird um eins erhöht (erniedrigt), die Massenzahl bleibt erhalten.

- Der γ-Zerfall: Emission eines γ-Teilchens (γ-Quant) der Energie $h \cdot \nu$ aus einem angeregten Kern. Dieser geht dabei in einen energetisch günstigeren Zustand über, behält aber sowohl Masse und Kernladung

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X}^{*} \xrightarrow{\gamma} {}^{A}_{Z}\mathrm{X}. $$

Die hauptsächliche Art des Zerfalls eines Kerns ist in der Karlsruher Nuklidkarte farblich gekennzeichnet. α-Zerfall gelb, β^{-}-Zerfall blau, β^{+}-Zerfall rot, Spontanspaltung grün. Beim NNDC sind rot und blau vertauscht. . . Weil der γ-Zerfall bei allen angeregten Kernen auftreten kann, wird er nicht besonders gekennzeichnet.

Wir werden im Folgenden diese drei Zerfallsarten genauer untersuchen.

Sie werden gemerkt haben, dass die Masse nicht wirklich erhalten sein kann. Weil die Energie der γ und β-Strahlung aber im Vergleich zur Ruheenergie der Kerne klein ist, spricht man doch von Massenzahlerhaltung.

Der α-Zerfall

Rutherford und Geiger haben 1908 die Natur der α-Teilchen als $^4_2$He-Kerne erklären können indem sie eine geringe Menge $_{86}$Rn in ein sehr dünnwandiges Glasröhrchen einschmolzen. Dieses wiederum wurde in ein weiteres abgeschlossenes und teilweise evakuiertes Gefäß gebracht, in welchem eine Gasentladung erzeugt werden konnte. Nach einiger Zeit konnten darin Spektralinien von Helium beobachtet werden[9].

Natürliche α-Strahlung hat nur eine geringe Reichweite, ein 5.3 MeV α-Teilchen aus dem Zerfall von ^{210}Po hat eine Reichweite von nur 3.84 cm in Luft. So fanden Geiger und Nuttall 1911 einen wichtigen Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante λ des Mutterkerns und der Reichweite R_α der α-Teilchen:

$$\log \lambda = A + B \cdot \log R_\alpha,$$

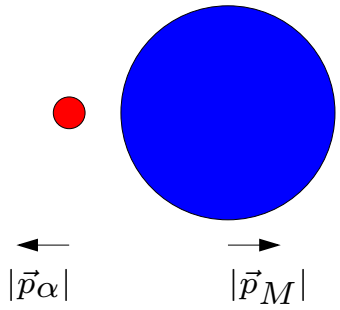
[9]Das Element Helium kommt auf der Erde nur als Endprodukt des radioaktiven Zerfalls vor. Es wurde erstmals spektroskopisch in der Sonnenatmosphäre nachgewiesen, daher der Name.

wo die Konstanten A und B für alle Kerne einer Zerfallsreihe gleich sind[10].
Die Reichweiten von α-Teilchen eines spezifischen Präparates sind in der Regel immer dieselben, die α-Teilchen haben damit dieselbe Energie.
Bei vielen α-Strahlern gibt es aber auch Gruppen von α-Teilchen mit verschiedenen aber diskreten Energien. Die Energie der α-Teilchen muss aus der Massendifferenz von Mutter- und Tochterkern kommen, korrigiert noch um eine mögliche Anregungsenergie der Kerne, als * markiert. Insgesamt steht die Energie

$$E_\alpha = \left[E\left({}^{A}_{Z}\mathrm{X}^{(*)}\right) - E\left({}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y}^{(*)}\right)\right] - m(\alpha)c^2$$ zur Verfügung.

Die Bindungsenergie der Nukleonen im obersten besetzten Energieniveau von schweren Kernen beträgt ca. 5.5 - 6 MeV, die eines α-Teilchens 28.3 MeV. Deshalb haben α-Strahlen oft eine Energie von 4.3 - 6.3 MeV.

[10] Dies obwohl die mittleren Lebensdauern $\tau = 1/\lambda$ um über 20 Größenordnungen verschieden sind. Vergewissern Sie sich mit einem Blick in die Nuklidkarte!

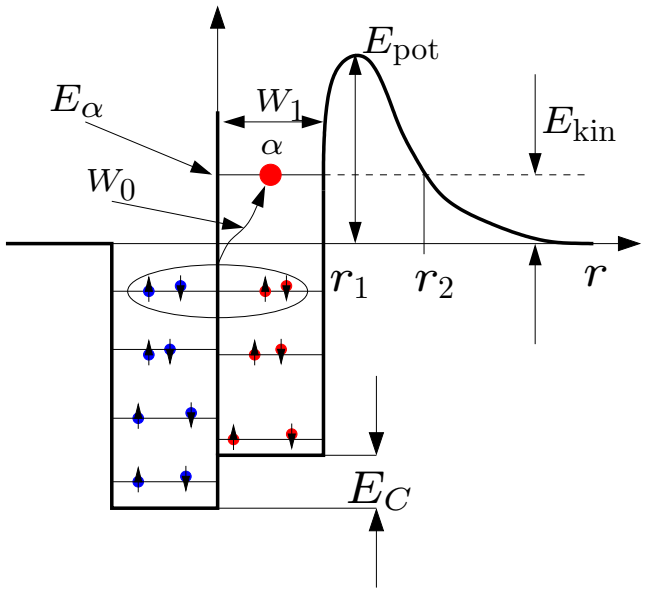


Wegen Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung, die beim α-Zerfall sehr gut verifiziert sind, muss für einen zerfallenden aber ursprünglich ruhenden Kern die Energie E auf das α-Teilchen und den Kern (Rückstoß) aufgeteilt werden,

$$E_{\mathrm{kin}}(\alpha) = \frac{M}{M+m} \cdot E; \quad \text{und} \quad E_{\mathrm{kin}}\left({}^{A-2}_{Z-2}Y\right) = \frac{m}{M+m} \cdot E.$$

Weil die Masse M der α-instabilen schweren Kerne in der Regel wesentlich größer ist als die Masse m der α-Kerne, ist die kinetische Energie der α-Kerne ungefähr gleich der oben erwähnten Energie E_α von zwischen 4.3 und 6.3 MeV.

Erklärung des α-Zerfalls



Gamow, Condon und Henry haben den α-Zerfall 1928 quantitativ erklärt. Ein Kern kann mit einer Wahrscheinlichkeit W_0 in seinem Inneren ein α-Teilchen bilden, welches eine besonders große Bindungsenergie hat und so eine Weile im Kern überleben kann. Wegen der freigewordenen Bindungsenergie befindet es sich in einem angeregten gebundenen Zustand. Es kommt mit einer Wahrscheinlichkeit W_1 in die Nähe der Coulomb-Barriere und kann mit einer Transmissionswahrscheinlichkeit T durch den Potentialwall tunneln. Die Wahrscheinlichkeit für einen α-Zerfall beträgt dann $\lambda = W_0 W_1 T$. Die Reichweite der Kernkräfte ist $r_0 \cdot A^{1/3}$, weshalb das Maximum des Potentials bei $r_1 = r_0((A-4)^{1/3} + m(\alpha)^{1/3})$ und $E_{\text{pot}} = Z_1 Z_2 e^2/(4\pi\varepsilon_0 r_1)$ hoch liegt.

Der Tunneleffekt

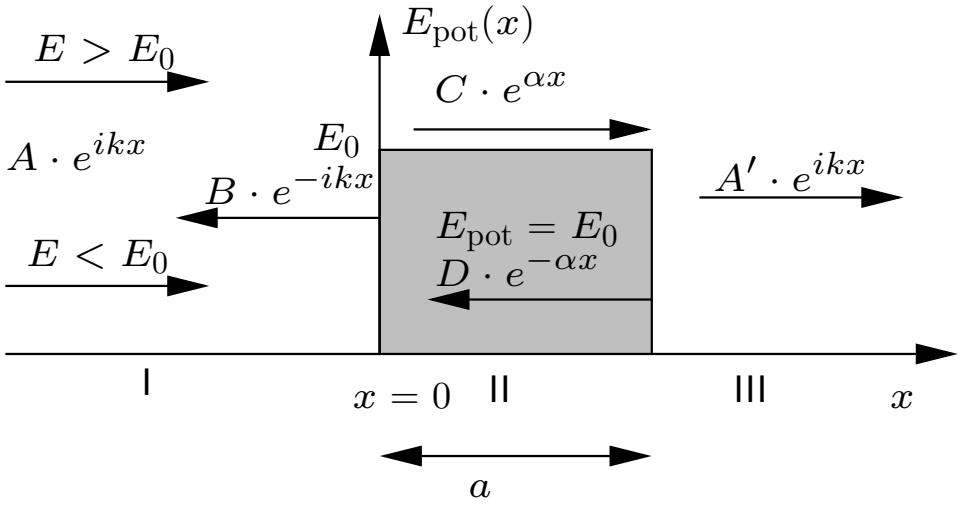
Die Eigenzustände eines quasi-gebundenen Zustandes mit $E > 0$ lassen eine Transmission durch die Coulombbarriere zu, weshalb die Amplituden der innen hin und her reflektierten Welle wegen Interferenz langsam abnimmt. Sie haben auch keine scharfe Energie mehr, sondern, wie schon erwähnt, eine Energiebreite $\Gamma = \hbar/\tau$. Der **Transmissionskoeffizient** T einer Barriere wird definiert als

$$T = \frac{\text{Fluss austretender Teilchen, } \quad j_a}{\text{Fluss einfallender Teilchen, } \quad j_e}.$$

Der Fluss (oder die Stromdichte) von Teilchen, die durch ihre Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ beschrieben werden, ist $j = |\psi|^2 v$. Dann gilt

$$T = \frac{j_a}{j_e} = \frac{|\psi_a|^2 v_a}{|\psi_e|^2 v_e} = \frac{|\psi_a|^2 k_a}{|\psi_e|^2 k_e}, \quad \text{wo} \quad p = mv = \hbar k$$

für nicht-relativistische Teilchen.
Wir nehmen das Potential im Kern kugelsymmetrisch an, weshalb es genügt, nur den radialen Anteil der Schrödingergleichung zu lösen[11].



$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right]\psi = 0.$$

Als nächstes betrachten wir eine "endliche" Potentialstufe $V(r) = E_0 = V_0$ und unterteilen das Gebiet in drei Gebiete I, II und III mit Wellenfunktionen ψ_I, ψ_{II} und ψ_{III}. Im Gebiet II herrsche ein endliches Potential $E_{\mathrm{pot}} = E_0$, während in Gebieten I und III

[11] Streng genommen muss noch der Drehimpuls und deshalb die Zentrifugalbarriere, $V_l = l(l+1)\hbar^2/(2mr^2)$ als Korrektur zum Potentialterm berücksichtigt werden.

$E_{\mathrm{pot}} = 0$ gilt. Die Lösungen der Schrödingergleichung in diesen Gebieten sind

$$\begin{aligned}
\psi_I(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad \text{wo} \quad k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} \quad \text{ist,} \\
\psi_{II}(x) &= Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}, \quad \text{wo} \quad \alpha = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V-E)} \quad \text{ist und} \\
\psi_{III}(x) &= A'e^{ikx}.
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke mit negativen Exponenten beziehen sich auf die reflektierten Wellen. Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned}
\psi_I(x=0) = \psi_{II}(x=0) \qquad &\text{und} \qquad \psi_{II}(x=a) = \psi_{III}(x=a), \\
\frac{\mathrm{d}\psi_I}{\mathrm{d}x}\,|_{x=0} = \frac{\mathrm{d}\psi_{II}}{\mathrm{d}x}\,|_{x=0} \qquad &\text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}\psi_{II}}{\mathrm{d}x}\,|_{x=a} = \frac{\mathrm{d}\psi_{III}}{\mathrm{d}x}\,|_{x=a}
\end{aligned}$$

und liefern vier Bedingungen für die fünf Amplituden. Einsetzen und Rechnen[12] ergibt dann für die Transmission

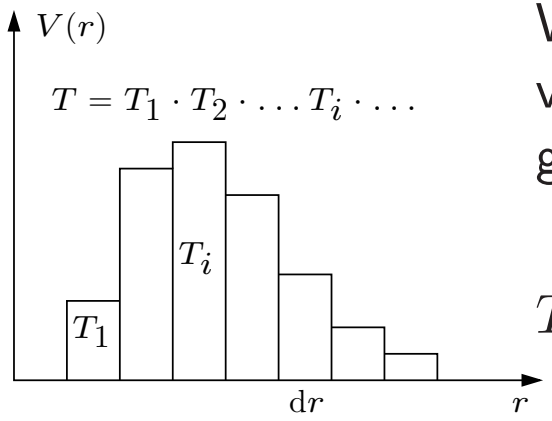
$$T = \frac{|A'|^2}{|A|^2} = \frac{1 - E/E_0}{(1 - E/E_0) + (E_0/4E) \cdot \sinh^2(\alpha a)},$$

wo $\alpha = \sqrt{2m(E_0 - E)}/\hbar$. Für große Breiten der Barriere (also für niedrige Transmission) lässt sich $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2 \approx e^x/2$ schreiben und in der Transmission überwiegt der exponentielle Term,

$$T \approx \frac{16E}{E_0^2}(E_0 - E)e^{-2\alpha a} \quad \text{für große } a.$$

Die Näherung der geringen Transmission ist einleuchtend - schließlich ist der α-Zerfall ein seltenes Ereignis.

[12] Aus der Experimentalphysik III / Physik der Materie I bekannt.



Wir nähern nun die Coulombbarriere durch eine Reihe von Rechteckspotentialen, die Gesamttransmission ist also gleich

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{tot}} &\approx T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots = T_0 e^{-\frac{2}{\hbar}\sum\sqrt{2m(V(r)-E)}\Delta r} \\ &= T_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2m(V(r)-E)}\mathrm{d}r\right) = T_0 e^{-G}, \end{aligned}$$

wo der Exponent

$$G = \frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - E\right)}\mathrm{d}r$$

der sog. **Gamow-Faktor** ist. Das Integral kann analytisch gelöst werden und man

erhält

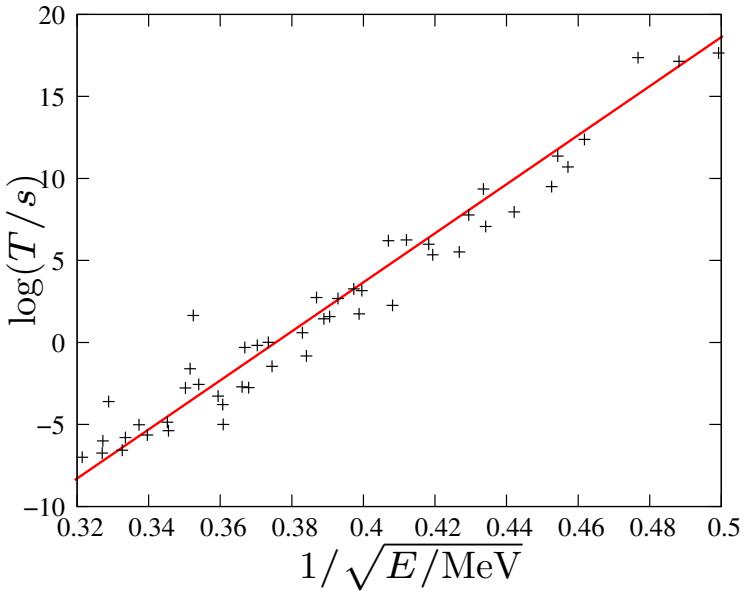
$$G = \frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\arccos\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\right) - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)}\right], \quad \text{wo} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{E}{E(r_1)}.$$

Weil beim α-Zerfall $Z_2 = 2$ ist, gilt $Z_1 = Z - 2$ und folglich haben wir

$$G \propto \frac{(Z-2)}{\sqrt{E}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen α-Zerfall ist also nun gegeben durch $\lambda = W_0 \cdot W_1 \cdot T$. Weil die mittlere Lebensdauer $\tau = 1/\lambda$ oder auch $t_{1/2} = \tau \ln(2)$ haben wir

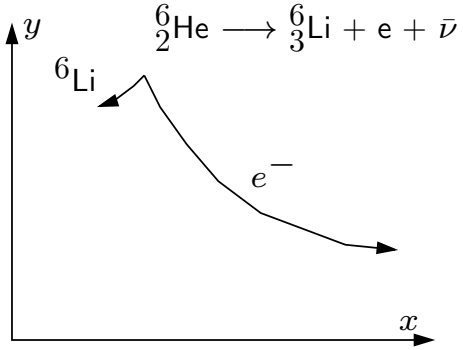
$$\ln t_{1/2} \propto G \propto \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}.$$



Dieser Zusammenhang ist in nebenstehender Abb. dargestellt. Dazu habe ich aus der Nuklidkarte Halbwertszeiten und Energien der α-Teilchen von vielen Isotopen von Uran, Thorium, Radium, Radon und Polonium verwendet. Wie man sieht, stimmt der allgemeine Trend recht gut, besonders wenn man bedenkt, wie einfach die hier verwendeten Näherungen waren. Die rote "Ausgleichsgerade" ist nur von Auge gelegt, also keine eigentliche Ausgleichsgerade. Man beachte aber, dass sie fast 25 Dekaden in der Halbwertszeit abdeckt!

Wir haben nun den α-Zerfall im Detail untersucht - nun liegen noch β und γ-Strahlung vor uns!

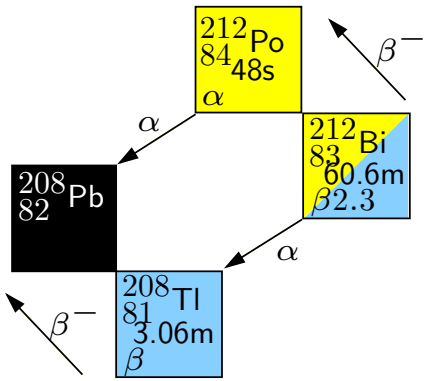
Der β-Zerfall



Neben den in der Nuklidkarte gelb eingezeichneten α-Strahlern, gibt es genauso prominent[13] auch die β-Strahler (blau eingezeichnet). β-Strahlung unterscheidet sich in mehreren Hinsichten von der α-Strahlung. Der wichtigste Unterschied ist der folgende. Die β-Strahlung zeigt (fast) immer eine kontinuierliche Energieverteilung. Die maximale Energie hängt dabei vom Kern ab und liegt zwischen keV und MeV. Eine weitere unverständliche Beobachtung ist in dieser Abbildung gezeigt. Ein sich in Ruhe befindlicher $^6_2$He-Kern zerfällt, und die sichtbaren Zerfallsprodukte $^6_3$Li und e^- bewegen sich scheinbar ohne den Impulssatz zu beachten in dieselbe Raumhälfte!
Es scheint, als ob der β-Zerfall weder Energie- noch Impulserhaltung gehorchen würde!

[13] Eigentlich etwa doppelt so viele!

Der β-Zerfall II



Wenn wir uns die Endglieder der Uran-Zerfallskette anschauen, so finden wir die links abgebildete Situation. ^{212}Bi zerfällt in 36.2% aller Fälle via α-Zerfall in ^{208}Tl und in 63.8% aller Fälle via β-Zerfall in ^{212}Po. Dieses zerfällt via α-Zerfall in das stabile ^{208}Pb, ^{208}Tl zerfällt via β-Zerfall auch in das stabile ^{208}Pb. Obwohl sich die Energieverteilungen der beiden β-Spektren deutlich unterscheiden, wird für die maximale Energie der Elektronen gefunden, dass

$$E_{\max}(\beta) + E_{\mathrm{kin}}(\alpha) = 11.20\mathrm{MeV} = \left[M\left({}^{212}_{83}\mathrm{Bi}\right) - M\left({}^{208}_{82}\mathrm{Pb}\right) - m_\alpha - m_e\right] \cdot c^2.$$

Andererseits ist die kontinuierliche Energieverteilung der β-Strahlung nicht verträglich mit einem Zweikörper-Zerfall. Er widerspricht der Impuls- und Energieerhaltung. Wie wir bereits beim α-Zerfall gesehen haben, muss die Energie des

emittierten Teilchens genau gleich $E_2 = m_2/(m_1 + m_2)E$ sein (s. Seite 31). Impuls- und Energieerhaltung lassen keinen Spielraum für "solche Mätzchen"!

Des Weiteren kommt beim β-Zerfall folgendes dazu. Bei einem Kern mit ungeradem A und halbzahligem Spin müsste aus einem Kern mit einer ungeraden Anzahl Neutronen und geraden Anzahl Protonen (ein sog. u-g Kern, siehe PdM_II V3) ein g-u Kern mit ganzzahligem Spin entstehen, weil ja das Elektron Spin $\hbar/2$ hat und den Kern verlässt. Alle beobachteten g-u-Kerne haben aber einen halbzahligen Spin.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, dass der β-Zerfall die Erhaltungssätze von Energie, Impuls und Spin (oder Drehimpuls) zu verletzen scheint. Es besteht jetzt die Wahl diese liebgewonnenen Erhaltungssätze über Bord zu werfen, oder etwas anderes zu tun. Nur was?

Die Neutrino-Hypothese

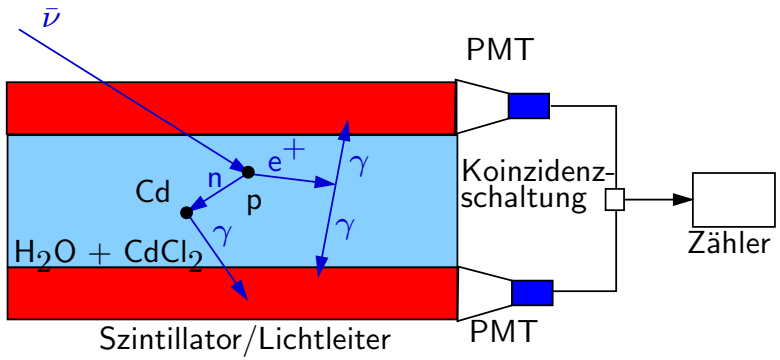
Ein Ausweg aus dieser vertrackten Situation wurde 1930 von Wolfgang Pauli in einem Brief an die "Lieben Radioaktiven Damen und Herren" an der Physikertagung in Tübingen vorgeschlagen[14]. Er schlug vor, dass es ein bisher unentdecktes elektrisch neutrales Teilchen mit Spin $\hbar/2$ geben müsse, welches beim β-Zerfall ebenfalls emittiert werden müsste. Er nannte dieses Teilchen vorläufig "Neutron". Dieser Name blieb ihm bis 1932, als Chadwick das ("richtige") Neutron entdeckte und seine Masse $m_n \approx m_p$ festgestellt wurde. Dies konnte nicht sein, die Massen der Bruchstücke waren zu groß. Das hypothetische Pauli-Teilchen wurde daraufhin durch Enrico Fermi **Neutrino**, ν, genannt (für kleines Neutron).

Obwohl diese Interpretation äußerst umstritten war[15], legte sie zusammen mit Diracs Hypothese von Antiteilchen (dazu kommen wir noch) 1930 den Keim für weitere Probleme oder Entdeckungen in der Teilchenphysik.

[14] `http://neutrino.ethz.ch/Group_Rubbia/Neutrino.html`

[15] Bohr wollte lieber die Energieerhaltung opfern.

Der Nachweis des Neutrinos 1955



Der Nachweis von Neutrinos ist nicht einfach (Cowan und Reines, 1955). Sie haben nur einen sehr kleinen Wirkungsquerschnitt mit normaler Materie. Erst mit den in Reaktoren entstehenden hohen Flüssen konnten sie nachgewiesen werden. Dazu wurde die Reaktion

$$\bar{\nu} + p \longrightarrow n + e^+.$$

ausgenutzt. Das Positron annihiliert mit einem Elektron in einer benachbarten Atomhülle, dabei werden zwei γ-Quanten der Energie 511 keV ausgesendet. Wegen der Impulserhaltung fliegen diese in entgegengesetzte Richtungen. Eine Detektion sollte sie also in Koinzidenz sehen. Das dabei entstehende Neutron

wechselwirkt mit dem im Wasser gelösten Cd, welches über

$$^{113}\mathrm{Cd} + n \longrightarrow ^{114}\mathrm{Cd}^* \longrightarrow ^{114}\mathrm{Cd} + \gamma$$

ein γ-Quant der Energie $E_\gamma = 9.1$ MeV aussendet. Dies geschieht mit einer auflösbaren Zeitdifferenz.
Mit dem Neutrino und seinem Antiteilchen kann der β^--Zerfall dargestellt werden durch

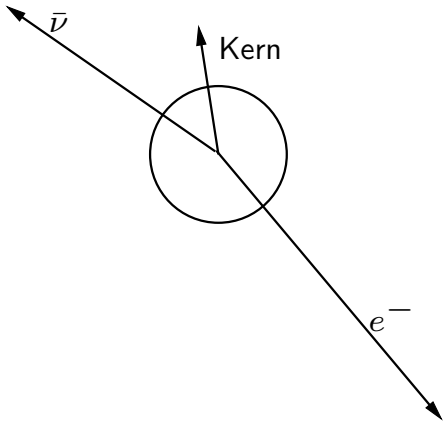
$$^A_Z X \longrightarrow ^A_{Z+1} Y + e + \bar{\nu}$$

und der β^+-Zerfall (Positronenemission) durch

$$^A_Z X \longrightarrow ^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu.$$

Ein freies Neutron ist etwas schwerer als ein stabiles Proton ($\tau > 10^{32}$ Jahre) und zerfällt wegen der schwachen Wechselwirkung spontan nach einer mittleren Lebensdauer von $\tau = 879.6 \pm 0.8$ s (`http://pdg.lbl.gov`).

β-Zerfall und die Masse des Neutrinos



Beim β-Zerfall tritt eine neue Grundkraft der Natur auf, die schwache Wechselwirkung. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim β-Zerfall ein Elektron im Impulsintervall $[p_e, p_e + \mathrm{d}p_e]$ ausgesandt wird, beträgt nach Fermis Goldener Regel

$$W(p_e)\mathrm{d}|\vec{p}_e| = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|\mathbf{H}|i\rangle|^2 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E_0},$$

wo E_0 die Gesamtenergie des Übergangs und $\mathrm{d}n/\mathrm{d}E_0$ die Zustandsdichte der Endzustände sei. $|\langle f|\mathbf{H}|i\rangle|^2$ ist nicht bekannt und wird durch die schwache Wechselwirkung beschrieben. Weil der Kern viel schwerer als Elektron und Antineutrino ist, teilt sich E_0 auf Elektron und Antineutrino auf, $E_0 = E_e + E_\nu$, die Rückstoßenergie ist vernachläßigbar. Wir bestimmen nun die Anzahl Elektronen, die zu einem

Energieintervall $\mathrm{d}E_0$ gehören. Dazu nehmen wir vorerst an, dass das Neutrino masselos sei. Dann gilt $p_\nu = (E_\nu/c, -E_\nu/c, 0, 0) = ((E_0 - E_e)/c, -(E_0 - E_e)/c, 0, 0)$ und damit $\mathrm{d}|\vec{p}_\nu|/\mathrm{d}E_\nu = 1/c$.
Wegen des Rückstoßes des Kerns sind die Impulse des Elektrons und des Neutrinos unkorreliert und damit die Anzahl Möglichkeiten N_p, dass das Elektron in $[\vec{p}_e, \vec{p}_e + \mathrm{d}\vec{p}_e]$ und das Neutrino in $[\vec{p}_\nu, \vec{p}_\nu + \mathrm{d}\vec{p}_\nu]$ gestreut werden gerade das Produkt der beiden einzelnen Anzahlen. Die Anzahl Elektronen in einem Ortsvolumen τ, die einen Impuls in $[\vec{p}_e, \vec{p}_e + \mathrm{d}\vec{p}_e]$ haben, ist gegeben durch

$$\tau \frac{4\pi \vec{p}_e^{\,2}}{h^3} \mathrm{d}|\vec{p}_e|.$$

Also ist die gesuchte Anzahl N_p gerade

$$N_p = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\vec{p}} = \frac{\mathrm{d}n_e \, \mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}\vec{p}} = \frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}\vec{p}_e} \cdot \frac{\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}\vec{p}_\nu} = \frac{\tau 4\pi \vec{p}_e^{\,2} \mathrm{d}|\vec{p}_e|}{h^3} \cdot \frac{\tau 4\pi \vec{p}_\nu^{\,2} \mathrm{d}|\vec{p}_\nu|}{h^3},$$

Weil jeder Messapparat ein bestimtes Ortsvolumen (τ) einnimmt, kürzt sich dieser Term im Endresultat und wir brauchen ihn nicht weiter zu beachten.
Wir leiten im Folgenden die Form des β-Spektrums her. Dazu müssen wir die Impulse in Energien umrechnen. Für das Elektron haben wir mit

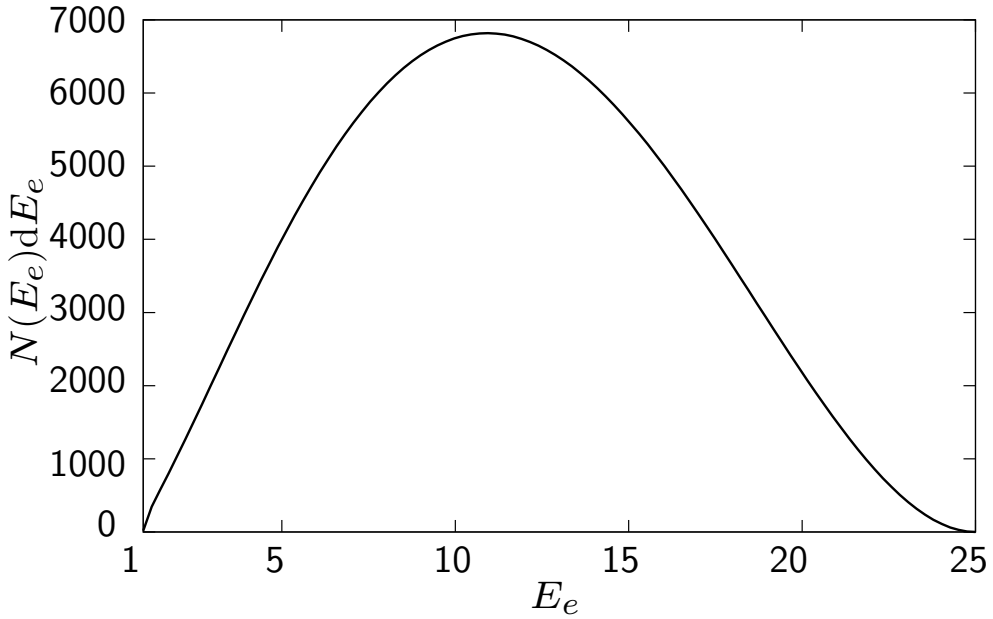
$$E_e^2 = \vec{p}_e^{\,2}c^2 + (m_e c^2)^2, \quad \vec{p}_e^{\,2} = \frac{E_e^2 - (m_e c^2)^2}{c^2}, \quad \frac{\mathrm{d}|\vec{p}_e|}{\mathrm{d}E_e} = \frac{1}{c} \cdot \frac{E_e}{\sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2}}.$$

Berücksichtigung von $\hbar = h/(2\pi)$ und $W(E_e)\mathrm{d}E_e = W(|\vec{p}_e|)\mathrm{d}|\vec{p}_e|$ und Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} W(|\vec{p}|_e)\mathrm{d}|\vec{p}_e| &= W(|\vec{p}_e|)\frac{\mathrm{d}|\vec{p}_e|}{\mathrm{d}E_e}\mathrm{d}E_e = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|\mathbf{H}|i\rangle|^2 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\vec{p}}\frac{\mathrm{d}|\vec{p}_e|}{\mathrm{d}E_e}\mathrm{d}E_e \\ W(E_e)\mathrm{d}E_e &= \frac{\tau^2}{2\pi^3\hbar^7 c}|\langle f|\mathbf{H}|i\rangle|^2 \frac{(E_0 - E_e)^2}{c^2} \cdot \frac{E_e^2 - (m_e c^2)^2}{c^2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{E_e}{\sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2}}\mathrm{d}E_e \end{aligned}$$

$$= \frac{\tau^2}{2\pi^3\hbar^7 c^6}|\langle f|\mathbf{H}|i\rangle|^2 E_e \cdot \sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \mathrm{d}E_e,$$

$$= \mathbf{A} \cdot E_e \cdot \sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2} \cdot (E_0 - E_e)^2 \mathrm{d}E_e,$$

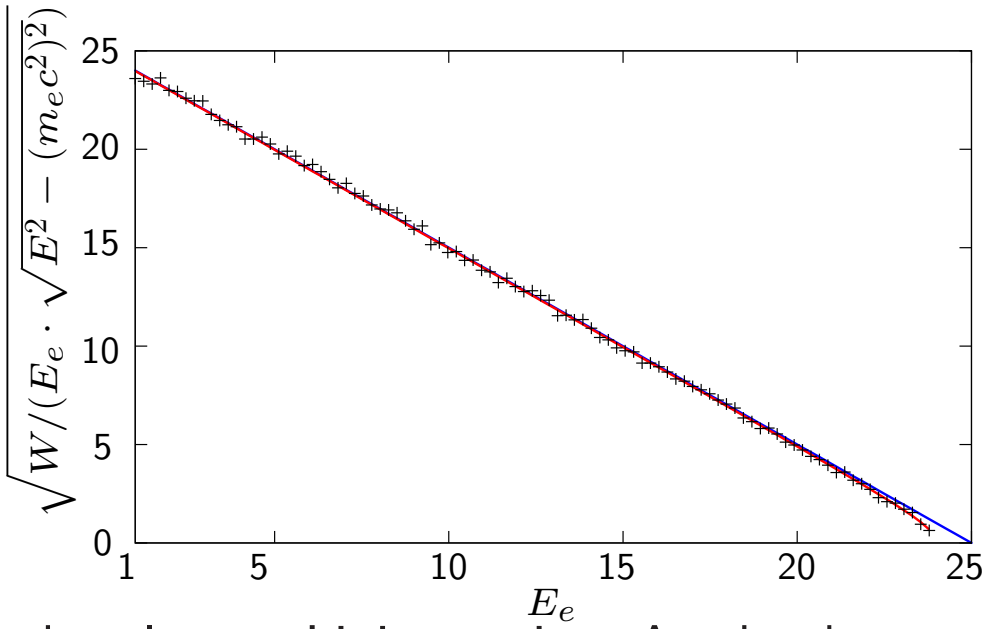


wo $\mathbf{A}$ eine energieunabhängige Konstante ist, die sowohl das Phasenraumvolumen wie auch die Übergangswahrscheinlichkeit enthält. Das β-Spektrum setzt sich also aus verschiedenen Termen zusammen, deren Bedeutung man im Spektrum noch sieht. Man beachte die Schwierigkeit, E_0 zu bestimmen! Dies übersetzt sich in eine erhebliche Ungenauigkeit, die aber mit einem Trick behoben werden kann.

Fermi hat eine neue Normierung erfunden, welche die Darstellung deutlich verbessert und eine sehr präzise Bestimmung von E_0 zulässt. Dazu müssen wir lediglich beide Seiten der Gleichung durch den linearen Term und die Wurzel dividieren Anschließend ziehen wir noch die Wurzel

$$\sqrt{\frac{W(E_e)}{E_e\sqrt{E_e^2-(m_ec^2)^2}}}\cdot \mathrm{d}E_e = \sqrt{\mathbf{A}}\cdot(E_0-E_e)\cdot \mathrm{d}E_e$$

und haben einen linearen Zusammenhang "erzwungen". Links stehen nur messbare Größen, während rechts die beiden Unbekannten E_0 und $\mathbf{A}$ stehen.



An diesem sog. **Fermi-Kurie**-Plot kann nun E_0 sehr genau abgelesen werden und die Steigung der Geraden gibt uns zudem auch noch die Übergangswahrscheinlichkeit $|\langle f|\mathbf{H}|i\rangle|^2$.
Die blaue Kurve ist der soeben hergeleitete Zusammenhang. Erlauben wir, dass das Neutrino (oder das Antineutrino) eine Masse m_ν hat, so lautet der als rote Linie gezeigte Ausdruck

$$\sqrt{\frac{W(E_e)}{E_e\sqrt{E_e^2-(m_e c^2)^2}}}\cdot \mathrm{d}E_e = \sqrt{\mathbf{A}}\sqrt{(E_0-E_e)^2-(m_\nu c^2)^2}\cdot \mathrm{d}E_e.$$

Aus einem Fermi-Kurie-Plot kann also auch auf eine evtl. Masse des Neutrinos

geschlossen werden. Wir werden darauf in dieser Vorlesung noch zu sprechen kommen.

Aus kosmologischen Untersuchungen glaubt man heute eine Grenze an die Masse des schwersten Neutrinos setzen zu können,

$$0.04\mathrm{eV}/c^2 < \mathrm{Masse}_{\mathrm{schwerstes\ Neutrino}} < (0.07 - 0.7)\mathrm{eV}/c^2.$$

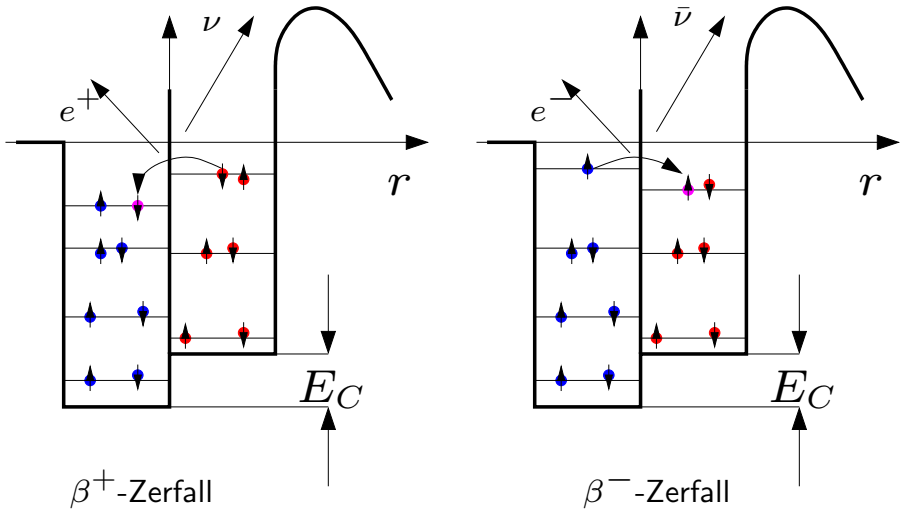
Hinweise auf eine endliche Masse der Neutrinos waren bereits von Beobachtungen solarer Neutrinos gekommen.

Die heute genaueste Grenze an die Masse der Neutrinos kommt aus dem Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment (KATRIN)[16] und beträgt mit einem 90% Konfidenzintervall

$$m_\nu c^2 < 0.9\mathrm{eV}.$$

[16] `https://arxiv.org/abs/2105.08533`

β^+-Zerfall



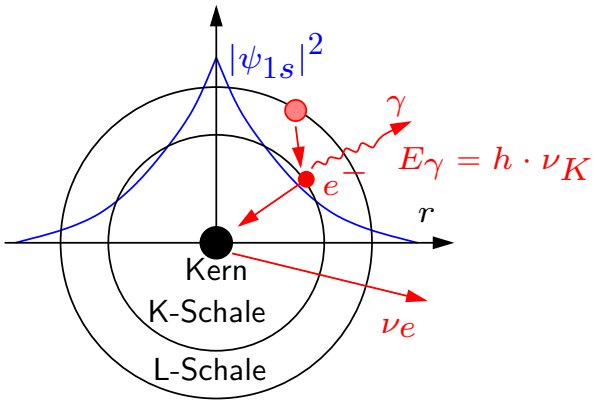
Liegen die Protonen in einem Kern auf einem höheren Energieniveau als die Neutronen, kann es energetisch günstig sein, wenn ein Proton unter Aussendung eines Positrons und eines Elektron-Neutrinos in ein Neutron übergeht. Man nennt diesen Zerfall β^+ oder Positron-Zerfall.

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu.$$

Dabei gilt für die Energie

$$\Delta E = \left[M(^A_Z X) - M(^A_{Z-1} Y) - m_e - m_\nu\right] \cdot c^2 = E_{\mathrm{kin}}(e^+) + E_{\mathrm{kin}}(\nu) = E_{\mathrm{max}}(e^+).$$

Elektroneneinfang

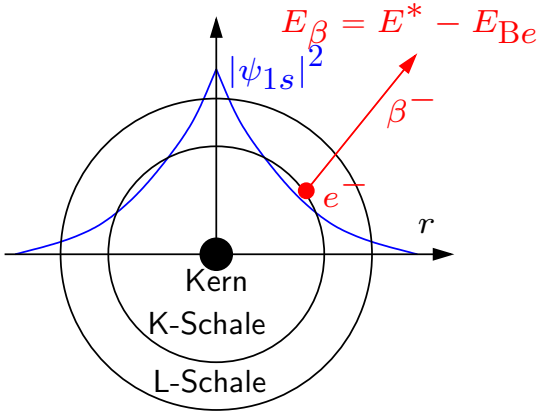


Weil die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi|^2$ der Elektronen der $1s$ Schale (der K-Schale) der Elektronen ein Maximum bei $r = 0$ hat, gibt es eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kern eines dieser Elektronen einfängt. Dabei kann sich ein Proton in ein Neutron verwandeln - wenn dies energetisch günstig ist

$$e + p \longrightarrow n + \nu_e, \quad \text{wo} \quad {}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + \nu_e + \gamma.$$

Das Atom ist nun immer noch elektrisch neutral, befindet sich aber in einem angeregten Zustand. Das Loch in der K-Schale muss nun durch ein höhergelegenes Elektron aufgefüllt werden, dabei wird ein Röntgenquant γ der Energie $E = h \cdot \nu_K$ ausgesandt.

Innere Konversion



Nach einem β-Zerfall können Elektronen der inneren Schalen (hauptsächlich K aber auch L, M und N) mit dem resultierenden angeregten Kern wechselwirken. Das Elektron kann die Anregungsenergie E^* absorbieren und verlässt das Atom mit dieser Energie abzüglich der Bindungsenergie des Elektrons E_{Be} als kinetische Energie. Das Elektronenspektrum weist also scharfe Linien auf. Bei der inneren Konversion bleibt der Kern wie er ist - streng genommen ist die innere Konversion eben kein β-Zerfall, **das Atom verliert ein Elektron und der Kern bleibt unverändert.**

$$ {}^{A}_{Z}X^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + \beta + \gamma. $$

Das "Schalenloch" muss nun durch ein höhergelegenes Elektron aufgefüllt werden, dabei wird ein Röntgenquant γ der Energie $E = h \cdot \nu_K$ ausgesandt.

Zusammenfassung β-Zerfall

Innerhalb einer Isobarenreihe tritt β-Zerfall immer auf, wenn es einen Nachbarkern mit geringerer Masse gibt.

β^--Zerfall: ${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$. Erlaubt wenn $m({}^A_Z X) > m({}^A_{Z+1} Y)$.

β^+-Zerfall: ${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$. Erlaubt wenn $m({}^A_Z X) > m({}^A_{Z-1} Y) + 2m_e$.

Elektroneneinfang: ${}^A_Z X + e^- \longrightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu_e$.

Der β-Zerfall wird durch den Q-Wert der Reaktionen organisiert, der sich aus den Massendifferenzen berechnen lässt (siehe auch PdM_II V3.pdf). Dabei gilt für die Masse der Atome:

$$m({}^A_Z X)c^2 = m_n({}^A_Z X)c^2 + Zm_e c^2 - \sum_{i=1}^{Z} B_i.$$

β^--Zerfall: ${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$. Der Q-Wert ist

$$Q = [m_n({}^A_Z X) - m_n({}^A_{Z+1} Y) - m_e - m_{\bar{\nu}_e}]c^2,$$

Verwendung der Atommassen ergibt unter Vernachläßigung der kleinen Bindungsenergien

$$Q = [m({}^A_Z X) - m({}^A_{Z+1} Y)]c^2$$

für die Energie, die dem Elektron und Neutrino zur Verfügung steht. **Für den β^--Zerfall muss also $m({}^A_Z X) > m({}^A_{Z+1} Y)$ gelten.**

$\underline{\beta^+\textbf{-Zerfall:}}$ ${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$. Der Q-Wert ist

$$Q = [m_n({}^A_Z X) - m_n({}^A_{Z-1} Y) - m_e - m_{\bar{\nu}_e}]c^2.$$

Dabei heben sich die Elektronenmassen aber nicht mehr auf und wir erhalten

$$Q = [m({}^A_Z X) - m({}^A_{Z-1} Y) - 2m_e]c^2.$$

Der β^+-Zerfall tritt also nur auf, wenn $m({}^A_Z X) > m({}^A_{Z-1} Y) + 2m_e$.

Elektroneneinfang: ${}^{A}_{Z}X + e^{-} \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + \nu_e -$ mit dem Q-Wert

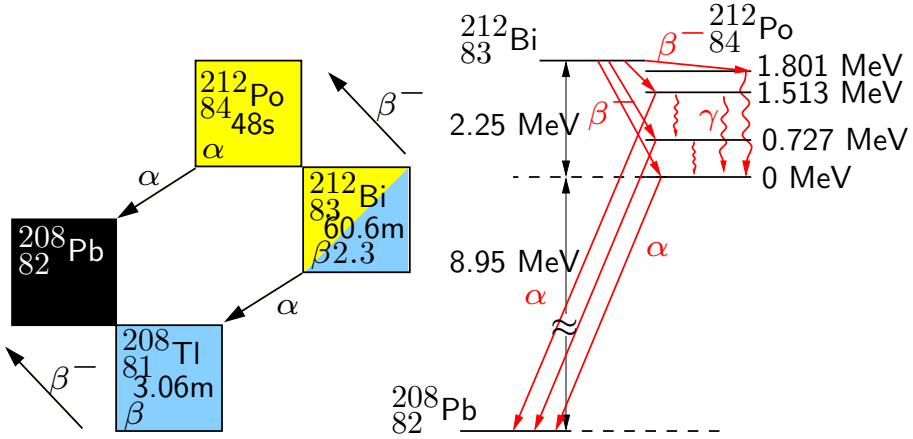
$$Q = [m_n({}^{A}_{Z}X) + m_e - m_n({}^{A}_{Z-1}Y) - m_{\nu_e}]c^2.$$

Umstellen nach m liefert

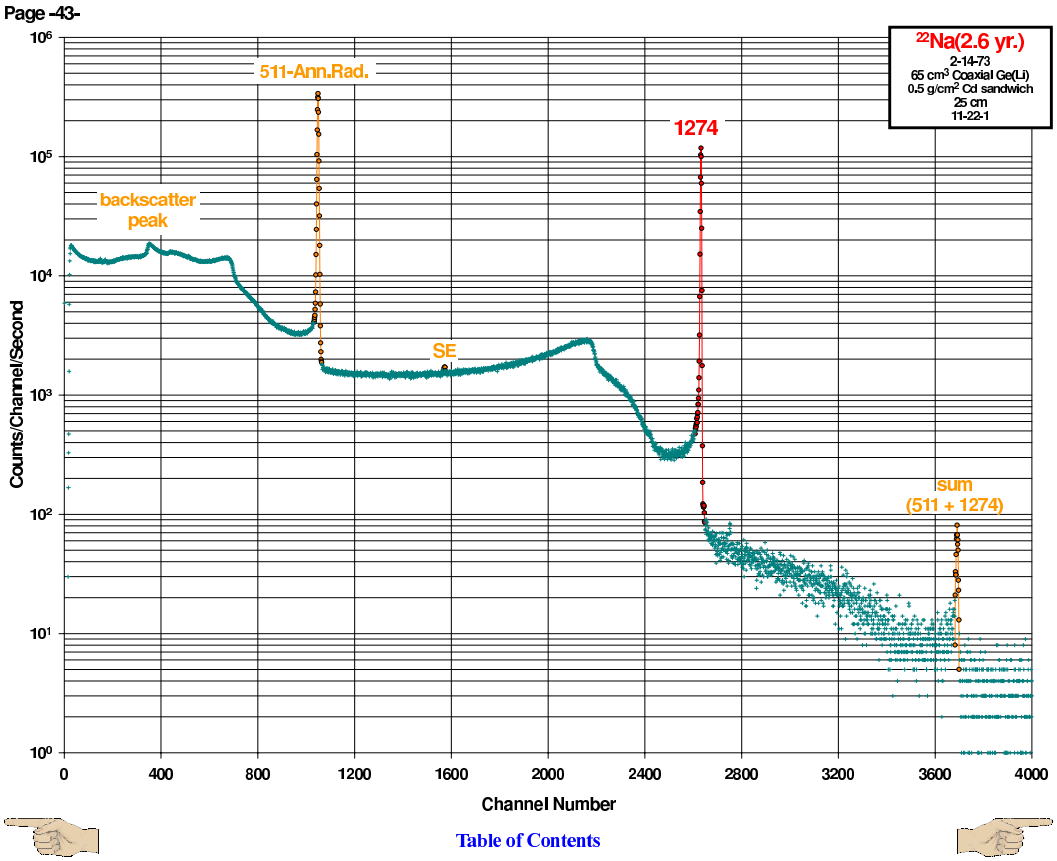
$$Q = [m({}^{A}_{Z}X) - m({}^{A}_{Z-1}Y)]c^2 - B_n,$$

wo B_n die Bindungsenergie des eingefangenen Elektrons ist. **Weil die Bindungsenergie der Elektronen sehr klein ist, können Kerne, die β^+-zerfallen können, auch Elektroneneinfang machen, aber nicht umgekehrt.**

Elektromagnetische Übergänge oder der γ-Zerfall

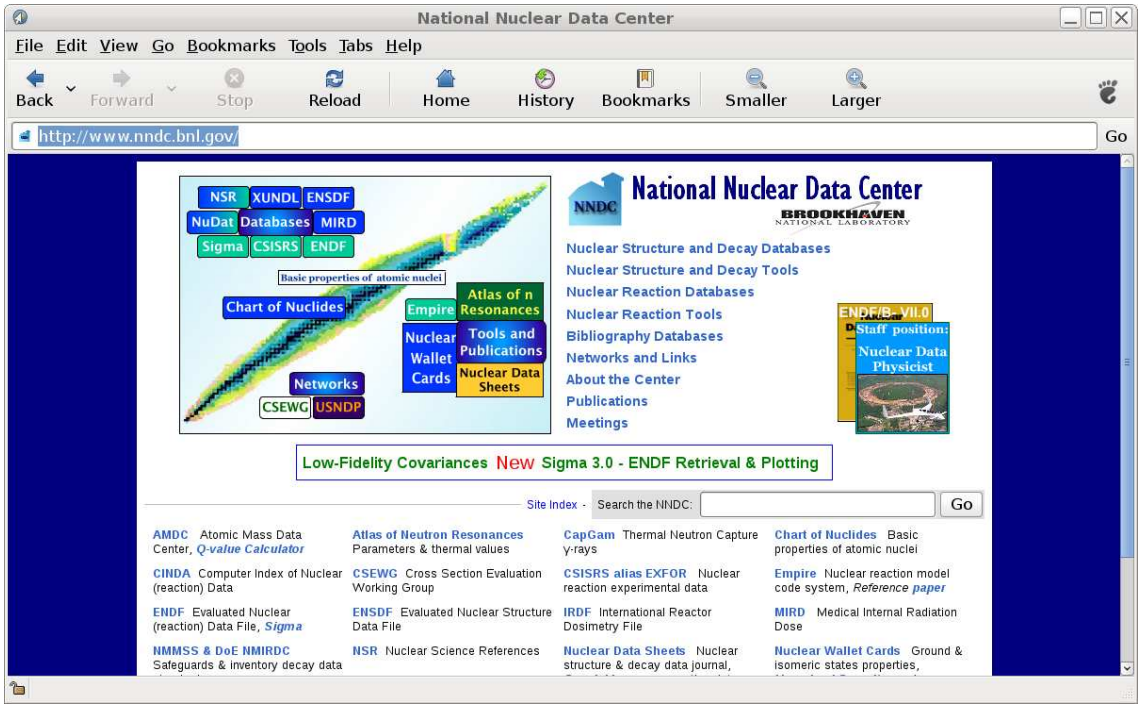


Nebenstehend ist ein stark vereinfachtes Schema für den Zerfall von $^{212}_{83}$Bi über $^{212}_{84}$Po in das stabile $^{208}_{82}$Pb dargestellt. (*N.B. Das Zerfallsschema ist nicht vollständig, bitte überpüfen Sie es bei nudat.*) $^{212}_{83}$Bi zerfällt sowohl über α- wie auch über β-Zerfall. Hier sieht man die vom β-Zerfall resultierenden angeregten Zustände von $^{212}_{84}$Po, welche unter Aussendung eines γ-Quants oder über α-Zerfall weiter zerfallen. Die Energien der γ-Quanten entsprechen den Unterschieden in den Energieniveaux des Kern, völlig analog zu den Energieunterschieden in den Elektronenhüllen eines Atoms. Einzig die Energien sind um einige Größenordnungen größer!



Das γ-Spektrum links stammt von ^{22}Na und wurde mit einem Li-dotierten Ge-Detektor aufgenommen. Das Zerfallsschema von ^{22}Na ist sehr einfach, der Grundzustand zerfällt mit einer Halbwertszeit von 2,6019(4) Jahren über einen β^+-Zerfall in einen angeregten Zustand des schweren ^{22}Ne Isotops. Dieser angeregte Zustand zerfällt unter Aussendung eines γ-Quants der Energie 1.274 MeV in den Grundzustand. Die 511 keV-Linie stammt von $e^+ + e^-$-Annihilation. Das Spektrum stammt von `http://www.inl.gov/`.

Weitere Informationen



Viele Informationen kann man sich aus dem WWW beschaffen. Eine interaktive Nuklidkarte mit detaillierten Informationen zu Zerfällen, Energien und Lebensdauern gibt das US - National Nuclear Data Center am Brookhaven National Laboratory:
`http://www.nndc.bnl.gov/`