Übungen zur Physik der Materie II

Serie 1, Termin: 22./23. April 2020

1.2 Herleitung der Lorentztransformation

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie die Lorentztransformation hergeleitet werden kann. Zeigen sie nun, dass die da eingeführte Größe $A = (1-(v/c)^2)^{-1/2}$. Invertieren Sie dazu das folgende in der Vorlesung hergeleitete Gleichungssystem nach x und t und verwenden Sie die Tatsache, dass sich Intertialsystem (IS) S' relativ zu IS S mit der Geschwindigkeit v bewegt und S sich relativ zu S' mit $-v$. Vergleich der Ausdrücke für x und x' oder t und t' liefert den gesuchten Ausdruck für A.

$$\begin{aligned} x' &= Ax - Avt \\ t' &= -\frac{Av}{c^2}x + At \end{aligned}$$

Lösung:

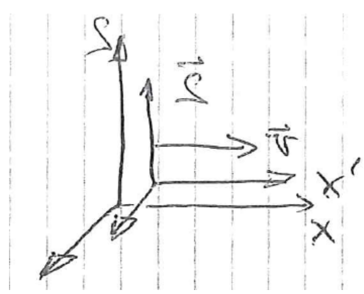

Abbildung 1: Koordinatensystem zur Herleitung des Lorentztransformation

In der Vorlesung behandelt:
Nach dem 1. Einsteinschen Postulat muss sich ein freier Körper in jedem Inertialsystem (IS) linear (gleichförmig, gleichmäßig) bewegen. Daraus folgt, dass sich Ort und Zeit linear transformieren müssen:

$$x' = Ax + Bt \qquad\qquad t' = Cx + Dt \tag{1}$$

Nun möchten wir A, B, C und D in 3 Schritten bestimmen:

1. Der Ursprung von S' bewegt sich mit v relativ zu S. Also ist $x' = 0$ und $x = vt$. Nach (1) ist $0 = Avt + Bt$. Daraus folgt:

$$\boxed{B = -Av} \tag{2}$$

2. Der Ursprung von S bewegt sich mit $-v$ relativ zu S'. Also ist $x = 0$ und $x' = -vt$. Daraus folgt:

$$-vt' = Bt \qquad\qquad Dt = t'$$

$$\begin{aligned} &\implies -vDt = Bt \\ &\implies \boxed{D = -\frac{B}{v}} \qquad (3) \\ \text{mit (2)} &\implies \boxed{D = A} \qquad (4) \end{aligned}$$

3. Das 2. Einsteinsches Postulat besagt: Die Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist in allen IS gleich. Das heißt es gilt $x' = ct'$ sowie $x = ct$ wenn sich der Lichtblitz bewegt.

$$\begin{aligned} x' = ct' = cCx + Act &= Cc^2t + Act \\ x' = Ax - Avt = Act - Avt &= Cc^2t + Act \\ -Avt &= Cc^2t \\ C &= -\frac{Av}{c^2} \end{aligned}$$

Damit lautet Gleichung (1) nun:

$$x' = A\,(x - vt) \qquad\qquad t' = A\left(-\frac{v}{c^2}x + t\right)$$

<u>Frage:</u> Wie lautet A?
Herleiten aus der Überlegung, dass sich S' mit v relativ zu S und S mit $-v$ relativ zu S' bewegt.
Wir erhalten das folgende Gleichungssystem, welches wir anschließend nach x und t auflösen:

$$\begin{aligned} &\text{I} \qquad && x' = Ax - Avt \\ &\text{II} \qquad && t' = -A\frac{v}{c^2}x + At \end{aligned}$$

$x'\,(x,t)$ muss der Form nach gleich aussehen wie $x\,(x',t')$, nur mit v $\rightarrow -v$. Das Gleiche gilt auch für $t'\,(x,t)$ und $t\,(x',t')$.
(Dies ist nun die Lösung der Aufgabe)
Aus I isolieren wir x:

$$x = \frac{1}{A}\,(x' + Avt) \qquad (5)$$

Dies setzen wir in II ein:

$$
\begin{aligned}
t' &= -\cancel{A}\frac{v}{c^2}\frac{1}{\cancel{A}}\left(x' + Avt\right) + At \\
&= -\frac{v}{c^2}\left(x' + Avt\right) + At
\end{aligned}
$$

Nach t auflösen liefert:

$$
\begin{aligned}
t' + \frac{v}{c^2}x' &= A\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t \\
t &= \frac{1}{A}\frac{1}{1 - v^2/c^2}\left(\frac{v}{c^2}x' + t'\right)
\end{aligned}
$$

In (5) einsetzen liefert:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{A}x' + v\left(\frac{1}{A}\frac{1}{1 - v^2/c^2}\left(\frac{v}{c^2}x' + t'\right)\right) \\
&= \frac{1}{A}\left(x' + \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}x' + \frac{v}{1 - v^2/c^2}t'\right) \\
&= \frac{1}{A}\left(\frac{\left(1 - v^2/c^2\right)x' + v^2/c^2 x'}{1 - v^2/c^2} + \frac{v}{1 - v^2/c^2}t'\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{x = \frac{1}{A}\frac{1}{1 - v^2/c^2}\left(x' + vt'\right)}
$$

Wir haben nun also:

$$
\begin{aligned}
x' &= A\left(x - vt\right) & t' &= A\left(-\frac{v}{c^2}x + t\right) \\
x &= \frac{1}{A}\frac{1}{1 - v^2/c^2}\left(x' + vt'\right) & t &= \frac{1}{A}\frac{1}{1 - v^2/c^2}\left(\frac{v}{c^2}x' + t'\right)
\end{aligned}
$$

S' bewegt sich relativ zu S mit v.
S bewegt sich relativ zu S' mit $-v$.
Das heißt, dass - weil die Form der Transformationen nach dem 1. Einsteinschen Postulat dieselbe sein muss - folgendes gilt:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{A}\frac{1}{1 - v^2/c^2} \\
A^2 &= \frac{1}{1 - v^2/c^2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$