Lösung der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \underline{x(t) = c\,e^{\lambda t}}$$

$$c\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda c e^{\lambda t} + \omega_0^2 c e^{\lambda t} = 0 \quad \Big| \left(c e^{\lambda t}\right)^{-1}$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad *$$

Allgemeinste Lösung

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}$$

$$= c_1 e^{\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

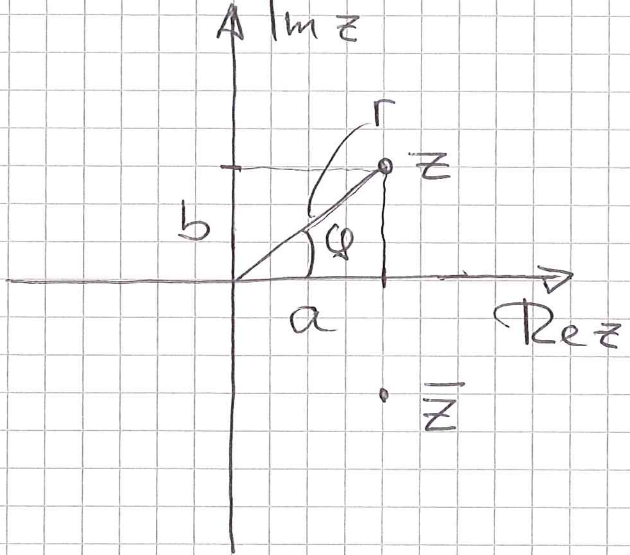
$$= e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\,t}\right)$$

* allg. Formel für quadratische Glg.

$$a x^2 + b x + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lösung mit komplexen Zahlen



$z = a + b \cdot i$

"$i = \sqrt{-1}$"

$z = r \cdot e^{i\varphi}$

$\bar{z}$: konjugiert komplexe von z

$z = a + b \cdot i$ $\qquad$ $z = r \cdot e^{i\varphi}$

$\bar{z} = a - b \cdot i$ $\qquad$ $\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

In der Physik wird die Polardarstellung

$z = r\, e^{i\varphi}$ $\qquad$ r: Amplitude

φ: Phase

sehr oft eingesetzt.

Schwache Dämpfung : $\gamma < \omega_0$

Allg. Lsg:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2} t} + C_2 e^{-(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2} t}\right)$$

$\gamma < \omega_0$! $\rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 < 0$

$$-1\cdot(\gamma^2-\omega_0^2) > 0$$

$$\omega_0^2 - \gamma^2 = \omega^2 > 0 \qquad |\sqrt{}$$

$$\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} = \omega$$

Also

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{\sqrt{-1}\,\omega t} + C_2 e^{-\sqrt{-1}\,\omega t}\right)$$

$$= e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)$$

Die Lösung $x(t)$ muss reell sein, also

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C e^{i\omega t} + \bar{C} e^{-i\omega t}\right),$$

wo

$$C = |C| e^{i\phi} \quad ; \quad \bar{C} = |C| e^{-i\phi}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}|C|\left(e^{i(\omega t+\phi)} + e^{-i(\omega t+\phi)}\right)$$

Schwache Dampfung II

$$x(t) = |C| e^{-\gamma t} \left(e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)} \right)$$

Eulersche Formel

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix} \right)$$

$$x(t) = \frac{2|C|}{2} e^{-\gamma t} \left(e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)} \right)$$

$$= 2|C| e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$ reell !

Amplitude

exponentielle Abnahme

Schwingung

Starke Dämpfung

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - \omega_0^2}_{\alpha^2 > 0}} = -\gamma \pm \alpha \quad \in \mathbb{R}$$

Allg. Lösung wird zu

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2} t} + C_2 e^{-(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2} t}\right)$$

$$= e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}\right)$$

Anfangsbedingung: Fragestellung!

z.B. $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$$x(0) = x(t=0) = e^{-\gamma 0} \cdot \left(C_1 e^{\alpha 0} + C_2 e^{-\alpha 0}\right)$$

$$0 = 1 \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1)$$

Also muss $C_1 + C_2 = 0$ sein

$$\Rightarrow C_2 = -C_1$$

Nun dasselbe mit $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = -\gamma e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}\right)$$

$$+ e^{-\gamma t}\left(C_1 \alpha e^{\alpha t} - C_2 \alpha e^{-\alpha t}\right)$$

$$= -\gamma x_0 + \alpha e^{-\gamma \cancel{t} 0}\left(C_1 e^{\alpha \cancel{t} 0} - C_2 e^{-\alpha \cancel{t} 0}\right)$$

$$\dot{x}_0 = 0 + \alpha \cdot 1 \cdot (C_1 - C_2) = 2\alpha C_1$$

Starke Dämpfung II

$C_2 = -C_1$ aus $x(0) = 0$

$2\alpha C_1 = \dot{x}_0 \rightarrow C_1 = \dfrac{\dot{x}_0}{2\alpha}$

$\rightarrow C_2 = \dfrac{-\dot{x}_0}{2\alpha}$

Einsetzen in

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}\right)$$

$$= e^{-\gamma t}\left(\frac{\dot{x}_0}{2\alpha} e^{\alpha t} - \frac{\dot{x}_0}{2\alpha} e^{-\alpha t}\right)$$

$$= e^{-\gamma t} \frac{\dot{x}_0}{2\alpha}\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right)$$

$$= \frac{\dot{x}_0}{\alpha} e^{-\gamma t} \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right)}_{\sinh(\alpha t)}$$

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\alpha} e^{-\gamma t} \sinh(\alpha t)}}$$

Der aperiodische Grenzfall

Ansatz $\quad x(t) = C(t)\,e^{\lambda t}$
$\uparrow$ neu!

$$x(t) = C(t)\,e^{\lambda t}$$
$$\dot{x}(t) = \dot{C}(t)\,e^{\lambda t} + C(t)\lambda e^{\lambda t}$$
$$\ddot{x}(t) = \ddot{C}(t)\,e^{\lambda t} + \dot{C}(t)\lambda e^{\lambda t} + \dot{C}(t)\lambda e^{\lambda t} + C(t)\lambda^2 e^{\lambda t}$$

In die Schwingungsglg. einsetzen

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{C} + 2\dot{C}\lambda + \lambda^2 C + 2\gamma(\dot{C} + C\lambda) + \omega_0^2 C = 0$$

$$\ddot{C} + 2(\lambda + \gamma)\dot{C} + (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)C = 0$$

Aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0$,

d.h $\lambda = -\gamma \pm 0$, also $\lambda = -\gamma = -\omega_0$

einsetzen

$$\ddot{C} + 2\underbrace{(\lambda+\gamma)}_{0}\dot{C} + \underbrace{(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)}_{\omega_0^2 - 2\omega_0^2 + \omega_0^2 \,=\, 0} C = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{C} = 0}}$$

Erzwungene Schwingungen

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x^2 = K e^{i\omega t}, \quad \text{wo } K = F/m$$

$x(t) = A \cdot e^{i\omega t}$ einsetzen

$\dot{x}(t) = i\omega A \cdot e^{i\omega t}$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A e^{i\omega t}$

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + 2\gamma(i\omega) A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = K e^{i\omega t}$$

$$A\left(-\omega^2 + 2\gamma(i\omega) + \omega_0^2\right) \cancel{e^{i\omega t}} = K \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$A = \frac{K}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma(i\omega)\right)}$$

$$= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega)} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega} K$$

$$= \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \cdot K \quad \in \mathbb{C} \; !$$

$$A = \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) K}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} - \frac{2i\gamma\omega K}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}\right]$$

$$= \mathrm{Re}(A) \quad + \mathrm{Im}(A)$$