Dynamik des Massenpunktes

Dynamik: Beschreibt die Bewegung von Körpern unter Berücksichtigung der auf die Körper wirkenden **Kräfte**.

Damit versucht die Dynamik, Ursachen für die Bewegung von Körpern zu beschreiben.

Kräfte verursachen Veränderungen im (Bewegungs-)zustand von Körpern. Die **Newtonschen Gesetze** setzen die kinematischen Größen "Geschwindigkeit" und "Beschleunigung" in Verbindung mit Kräften.

Die Veränderungen im Bewegungszustand von Körpern können durch sog. **Bewegungsgleichungen** beschrieben werden.

Trägheit: Das erste Newtonsche Gesetz I

Gleichförmige Bewegung $\rightarrow$ in mitbewegtes Bezugssystem transformieren und der Körper ist in Ruhe!

Zerlegung von Bewegungen (Boot im Fluss, Flugzeug mit Seitenwind): Eine gleichförmige, geradlinige Bewegung erscheint in allen sich gleichförmig, geradlinig bewegenden Bezugssystemen gleichförmig und geradlinig.

Newton 1: Ein Körper, auf den keine äußeren Einflüsse wirken, verharrt in Ruhe bzw. einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung.

Das "Bestreben" eines Körpers, in einer gleichförmig geradlinigen Bewegung zu verharren, nennt man "Trägheit" (Bsp. Passagiere im abrupt bremsenden Bus).

Trägheit: Das erste Newtonsche Gesetz II

Was ist “Trägheit”? “Bestreben”? “Gleichförmig, geradlinig”? Bleibt ein Körper nicht irgendwann mal stehen?

- Gleichförmig, geradlinig: $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$.

- Stehenbleiben: Bei rauhen Unterlagen schon. . . und bei weniger rauhen Unterlagen dauert’s länger, etc., bis der Körper eben nicht mehr stehen bleibt! Ein Effekt der Reibung, die wir bald genauer untersuchen werden.

- Trägheit: Eine Eigenschaft des Körpers und der Bewegung. “Schwere” Körper sind “träger”, wie auch “schnelle” Körper. Und dann erst “schnelle”, “schwere” Körper! Also: <u>Trägheit $\rightarrow$ Impuls $\vec{p} \doteq m\vec{v} =$ “Impuls”.</u>

Trägheit: Das erste Newtonsche Gesetz III

Dabei haben wir einen bisher undefinierten Begriff “Masse” eingeführt, den wir im folgenden Kapitel genauer einführen werden. Soweit halten wir fest:

Newton 1, zweite Formulierung: Ein Körper, auf den keine äußeren Einflüsse wirken, behält seinen Impuls bei:

$$\vec{F} = \vec{0}, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}.$$

($\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = 0$ bedeutet ja, dass sich der Impuls zeitlich nicht ändert, d.h., der Impuls bleibt erhalten.)

Die Kraft: Das zweite Newtonsche Gesetz I

Wir definieren Kraft als den äußeren Einfluss $\vec{F}$, der den Impuls $\vec{p}$ eines Körpers verändert.

$$\vec{F} \doteq \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Wir betrachten zunächst Körper konstanter Masse. Verändert sich deren Impuls, so wirkt auf den Körper eine Kraft, welche in diesem Fall eine Geschwindigkeitsänderung, also eine Beschleunigung hervorruft.

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} \quad \text{für konstante Masse } m.$$

Die Kraft: Das zweite Newtonsche Gesetz II

Newton 2: Wirkt eine Kraft auf einen Körper, so ändert sich sein Impuls proportional zur und entlang der angreifenden Kraft.

Newton 2 ist das Grundgesetz der Dynamik. In der Form

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

gilt es z. B. für eine Rakete sowohl während, wie auch nach der Brennphase.

Masse

Der soeben eingeführte Begriff der Masse ist nicht unproblematisch[1]. Der Ursprung der Masse liegt im Higgs-Boson, welches erst 2012 am CERN gefunden wurde. Die Problematik äußert sich auch in der alten, bis zum 20. Mai 2019 gültigen Definition der Masse, dem etwas archaisch anmutenden Urkilogramm in Paris! Die Masse ist additiv. Wir definieren sie als den Proportionalitätsfaktor zwischen Kraft und Beschleunigung (sog. träge Masse)

$$m \doteq \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}, \qquad [m] = \mathrm{kg}, \;\; \text{folglich} \quad [p] = \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}}, \qquad [F] = \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}.$$

[1] Seit dem 20. Mai 2019 ist das Kilogramm definiert, indem für die Planck-Konstante h der Zahlenwert 6,6260701510^{-34} kg m^2/s festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit Js, die gleich kg m^2/s ist, wobei der Meter und die Sekunde mittels c und $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$ definiert sind.

Dichte

Mit den bekannten Größen kann nun auch die Dichte ρ definiert werden als das Verhältnis von Masse zum aufgespannten Volumen eines homogenen Körpers:

$$\text{Dichte } \rho \doteq \frac{m}{V}, \qquad [\rho] = \mathrm{kg/m^3}.$$

Die Dichte ist nicht konstant, sondern hängt z. B. von der Temperatur oder dem Druck ab.

Dichte inhomogener Körper

Für inhomogene Körper wird der Körper unterteilt in lauter infinitesimale Volumina ΔV, die Dichte am Ort $\vec{r}$ ist definiert durch das Verhältnis der Masse des infinitesimalen Massenelementes Δm am Ort $\vec{r}$ zum Volumenelement ΔV,

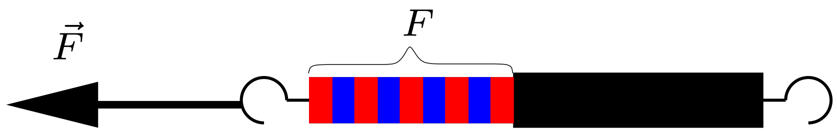
$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \longrightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}.$$

Damit ist die Masse eines solchen Körpers durch ein Volumenintegral gegeben

$$m = \int \mathrm{d}m = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}z\ \rho(\vec{r}) = \int \mathrm{d}V \rho(\vec{r}).$$

Addition von Kräften

Kräfte $\vec{F}_i$ addieren sich nach den Regeln der Vektoraddition. Das besonders einfache Beispiel $\vec{F} + \left(-\vec{F}\right) = \vec{0}$ wird ausgenutzt, um Kräfte zu messen.

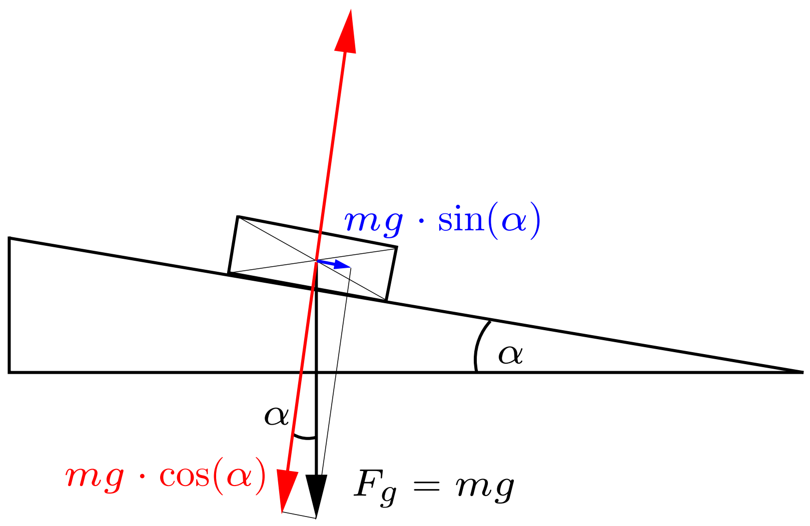


Mehrere auf einen Massenpunkt wirkende Kräfte können durch ihre Vektorsumme ersetzt werden:

$$\vec{F}_{\mathrm{tot}} = \sum_i \vec{F}_i$$

Zerlegung von Kräften

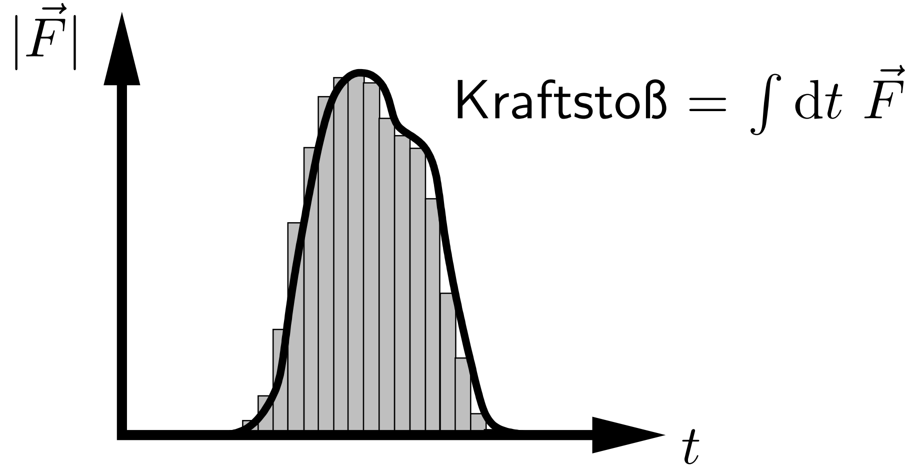
Die Kraft $\vec{F}$ ist ein Vektor und zeigt in dieselbe Richtung wie die Beschleunigung $\vec{a}$, ist aber m Mal größer ($\vec{F} = m\vec{a}$). Nach den Regeln der Vektorrechnung lässt sich $\vec{F}$ nach Komponenten zerlegen oder zusammensetzen, **Vektoraddition!**
Beispiel schiefe Ebene:



Der Kraftstoß

Nicht immer kann die Beschleunigung eines Körpers über längere Zeit gemessen werden, z. B. wenn die Kraft nur sehr kurz wirkt (Bsp. Hammerschlag). Trotzdem ändert der Körper seinen Bewegungszustand, seinen Impuls, aufgrund des erfolgten Kraftstoßes $\vec{F} \cdot \tau = m \cdot \vec{a} \cdot \tau$.

$$\vec{F}\tau = m\vec{a}\tau$$
$$\vec{a}\tau = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$
$$\vec{F}\tau = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$



Der Kraftstoß II

Dies kann auch mit Newton 2 verstanden werden:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{F}\mathrm{d}t &= \mathrm{d}\vec{p} \\ \int \vec{F}\,\mathrm{d}t &= \int \mathrm{d}\vec{p}. \end{aligned}$$

Ist der Körper in Ruhe gestartet, so bewirkt der Kraftstoß eine Impulsänderung, die gerade gleich seinem Totalimpuls ist.

$$\int_0^t \vec{F}(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^{\vec{p}} \mathrm{d}\vec{p}' = \vec{p}$$

Die vier Grundkräfte, Wechselwirkungen (WW)

Soweit haben wir nur die Gravitation als Grundkraft bekannt gemacht. Es gibt natürlich auch andere Kräfte, die uns aber, ihrer Natur wegen, wesentlich weniger bekannt sind. Eine elektrische Ladung führt zu elektromagnetischen Kräften, eine systematische Ausrichtung der Spinrichtungen in einem Festkörper zu magnetischen Kräften, in Kernen und subatomaren Partikeln wirken weitere, noch weniger bekannte Kräfte. Trotzdem scheint es, als ob die Natur sich durch vier grundlegende Kräfte beschreiben lässt:

Kraft / WW	Stärke	Reichweite	Eichboson	WW-Partner
Gravitation	10^{-38}	∞	Graviton	alle Teilchen
schwache WW	10^{-14}	10^{-18}m	$W^{\pm}$, Z	Leptonen, Hadronen
Elektromagnetismus	10^{-2}	∞	Photon	elektr. Ladung
starke WW	1	10^{-15}m	Gluonen	Farbladung, Quarks

Eine Bewegungsgleichung

Auf einen Körper der Masse m wirke eine Kraft $\vec{F}(\vec{x})$. Dann wird dieser beschleunigt nach der Bewegungsgleichung

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{x}).$$

Diese kann mit $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}}$ in eine Differentialgleichung umgeformt werden

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}),$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die **Bewegungsgleichung** für den Körper. Je nach $\vec{F}(\vec{x})$ ergeben sich andere Bewegungen.

Die Federkraft

Die Kraft, die für die Auslenkung x einer Feder notwendig ist, ist proportional zu ihr, also zu x,

$$F' \propto x, \quad \text{bzw.} \quad F' = Dx.$$

Das Vorzeichen müssen wir noch bestimmen, daher der Strich bei F'. Bei einer gegebenen Auslenkung x wirkt eine *rücktreibende* Kraft F, weshalb das Vorzeichen *negativ* sein muss, d.h., die Gleichung muss lauten

$$F = m\ddot{x} = -Dx, \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} = -\frac{D}{m}x,$$

wo die beiden Punkte über dem x die zweite Ableitung nach der Zeit bedeuten. Die Proportionalitätskonstante D ist von der Art der Feder abhängig und heißt deshalb Federkonstante. Die Bewegung einer Feder führt zu Schwingungen, wie wir sehen werden.

Bewegungsgleichung für die Auslenkung einer Feder

Wir wollen die Gleichung

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x$$

lösen. Sie beschreibt einen äußerst **wichtigen Modellfall** der Physik, den sog. **harmonischen Oszillator**. Sie kann auf zwei äquivalente Arten, mit zwei **äquivalenten Ansätzen**, gelöst werden.

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) \tag{1}$$

oder

$$x(t) = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t}. \tag{2}$$

Weil die Lösung reell sein muss, muss im zweiten Fall (Glg. 2) B gleich dem Konjugiert-komplexen von A sein, $B = \bar{A}$.

Bewegungsgleichung für die Auslenkung einer Feder II

Die Werte für A und B folgen aus den **Anfangsbedingungen** $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.

$$\begin{aligned} x_0 &= Ae^{i\omega t_0} + Be^{-i\omega t_0} \\ \dot{x}_0 &= Ai\omega e^{i\omega t_0} - Bi\omega e^{-i\omega t_0}. \end{aligned}$$

Löse erste Gleichung nach A auf, setze in zweite Glg. ein und löse nach B auf

$$\begin{aligned} A &= \left(x_0 - Be^{-i\omega t_0}\right) e^{-i\omega t_0} \quad \text{in} \quad \dot{x}_0 \\ \dot{x}_0 &= i\omega \left(x_0 - Be^{-i\omega t_0}\right) e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t_0} - i\omega B e^{-i\omega t_0} \\ \dot{x}_0 &= i\omega x_0 - 2i\omega B e^{-i\omega t_0} \quad \text{also} \\ B &= \frac{1}{2}\left(\frac{i\dot{x}_0}{\omega} + x_0\right) e^{i\omega t_0}. \end{aligned}$$

Dies setzen wir in die Gleichung für A ein

$$\begin{aligned}
A &= \left(x_0 - Be^{-i\omega t_0}\right) e^{-i\omega t_0} \\
A &= \left(x_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{i\dot{x}_0}{\omega} + x_0\right) e^{i\omega t_0} e^{-i\omega t_0}\right) e^{-i\omega t_0} \\
A &= \left(\frac{x_0}{2} - \frac{i}{2}\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) e^{-i\omega t_0} \quad \text{und} \\
B &= \left(\frac{x_0}{2} + \frac{i}{2}\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) e^{i\omega t_0}, \quad \text{die Lösung lautet also}
\end{aligned}$$

$$x(t) = \left(\frac{x_0}{2} - \frac{i}{2}\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) e^{i\omega(t-t_0)} + \left(\frac{x_0}{2} + \frac{i}{2}\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) e^{-i\omega(t-t_0)}. \tag{3}$$

Bewegungsgleichung für die Auslenkung einer Feder III

Ganz analog erhalten wir die Lösung aus dem $\sin$-$\cos$-Ansatz.

$$x_0 = A \sin \omega t_0 + B \cos \omega t_0, \tag{4}$$

$$\dot{x}_0 = A\omega \cos \omega t_0 - B\omega \sin \omega t_0. \tag{5}$$

Löse Gleichung 4 nach A auf, setze in Glg. 5 ein und löse nach B auf

$$A = \left(x_0 - B \cos \omega t_0\right) / \sin \omega t_0, \tag{6}$$

$$\dot{x}_0 = \left(x_0 - B \cos \omega t_0\right) \omega \frac{\cos \omega t_0}{\sin \omega t_0} - B\omega \sin \omega t_0,$$

$$B\omega \sin \omega t_0 = x_0 \omega \frac{\cos \omega t_0}{\sin \omega t_0} - B\omega \frac{\cos^2 \omega t}{\sin \omega t_0} - \dot{x}_0,$$

$$
\begin{aligned}
B\omega\left(\sin^2\omega t_0 + \cos^2\omega t_0\right) &= x_0\omega\cos\omega t_0 - \dot{x}_0\sin\omega t_0, \\
B &= x_0\cos\omega t_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t_0. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Wir setzen dieses Resultat nun in Glg. 6 ein und erhalten mit $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$$A = \left(x_0\sin^2\omega t_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t_0\cos\omega t_0\right)\frac{1}{\sin\omega t_0}.$$

Einsetzen ergibt die Lösung

$$x(t) = \left(x_0\sin^2\omega t_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t_0\cos\omega t_0\right)\frac{\sin\omega t}{\sin\omega t_0} + \left(x_0\cos\omega t_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t_0\right)\cos\omega t \qquad (8)$$

Rotierende Systeme: Impuls $\longrightarrow$ Drehimpuls

Ähnlich wie der Impuls $\vec{p}$ aufgefasst werden kann als das Bestreben eines Körpers in einer geradlinig gleichförmigen Bewegung zu verbleiben, kann der **Drehimpuls** $\vec{L}$ aufgefasst werden als das Bestreben eines Körpers in einer gleichmäßigen rotierenden Bewegung zu bleiben. Der Drehimpuls L ist definiert durch

$$\vec{L} \doteq \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}.$$

Die Rolle der Kraft als beschleunigenden Einfluss übernimmt das **Drehmoment** $\vec{M}$

$$\vec{M} \doteq \vec{r} \times \vec{F}.$$

In völliger Analogie zur Beschleunigung ergibt sich auch die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$. Mehr zu rotierenden Bezugssystemen folgt in Bälde.

Rotierende Systeme: Winkelbeschleunigung

Die Änderung des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ durch ein angreifendes Drehmoment $\vec{M}$ is dann,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Weil $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ parallel zu $\vec{p}$ ist, verschwindet der erste Term und es bleibt übrig

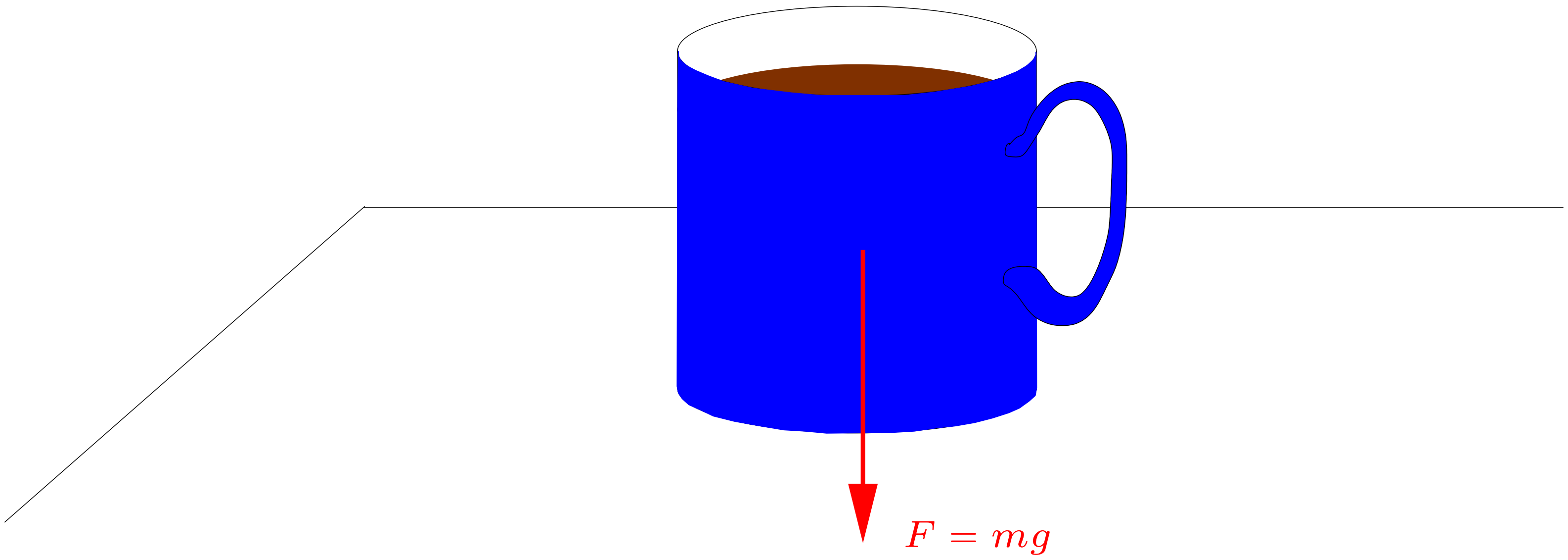
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Die angreifende Kraft führt zu einer Änderung der Rotationsgeschwindigkeit bzw. Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Systems. Diese kann als Winkelbeschleunigung aufgefasst werden:

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}, \quad \text{wie wir später noch sehen werden.}$$

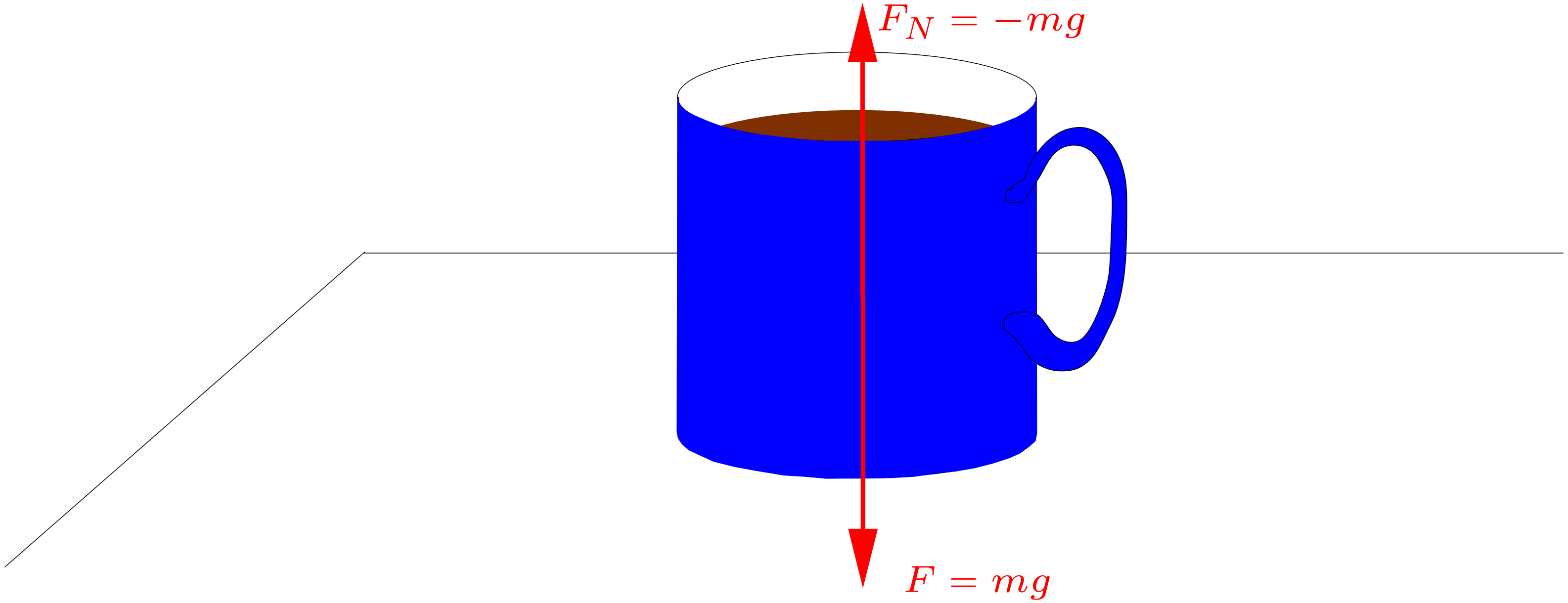
"Actio = Reactio", das dritte Newtonsche Gesetz

Wenn auf die Tasse auf dem Tisch die Erdanziehungskraft wirkt, also eine Kraft, warum bewegt sich die Tasse nicht beschleunigt, wie sie es nach Newton 2 sollte?



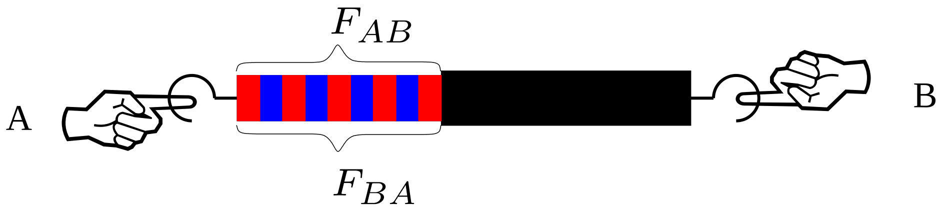
Newton 3 II

Auf die Tasse wirkt eine “Reaktionskraft” $F_N = -mg$, welche die Gewichtskraft kompensiert. Sie heißt **Normalkraft**, weil sie entlang der Oberflächennormalen wirkt. $F + F_N = 0$, womit die Tasse an ihrem Ort zum Trinken bereit bleibt.



Newton 3 III

<u>Newton 3:</u> Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit einer Kraft F_{AB}, so wirkt umgekehrt der Körper B auf den Körper A mit einer Kraft $F_{BA} = -F_{AB}$. "Actio = Reactio"



Wer zieht? Wer wird gezogen?

Reibungskräfte

Ein wesentliches Verdienst von Newton war das Erkennen des Einflusses der Reibung auf die Bewegung alltäglicher Körper. Reibungskräfte sind proportional zur Normalkraft F_N. Wir unterscheiden zwischen verschiedenen Reibungsarten:

- Haftreibung
- Gleitreibung
- Rollreibung

Haftreibung

Haftreibungskraft: Größte Kraft, die den Körper gerade noch nicht in Bewegung versetzt.

- unabhängig von der Größe der Berührungsfläche
- proportional zur Normalkraft

$$F_H = \mu_H \cdot F_N$$

- abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit

μ_H heißt **Haftreibungskoeffizient**.

Gleitreibung

Gleitreibungskraft: Kraft, die den Körper gerade noch in gleichförmiger Bewegung hält.

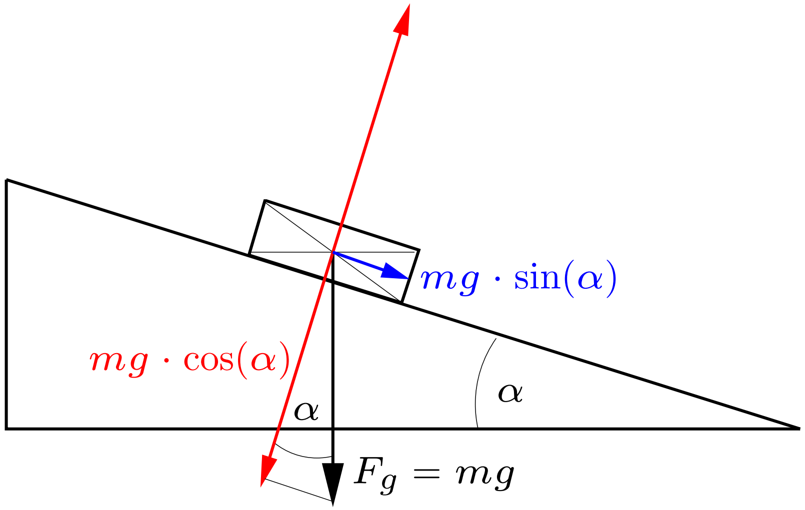
- unabhängig von der Größe der Berührungsfläche
- proportional zur Normalkraft

$$F_G = \mu_G \cdot F_N$$

- abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit

$\mu_G < \mu_H$ heißt **Gleitreibungskoeffizient**.

Messung der Haft- und Gleitreibung



$$\sum \vec{F}_i = mg\cos\alpha_{H,G} + F_N + \\ +mg\sin\alpha_{H,G} + F_{H,G} = 0,$$

$$\sum F_\perp = mg\cos\alpha_{H,G} + F_N = 0,$$

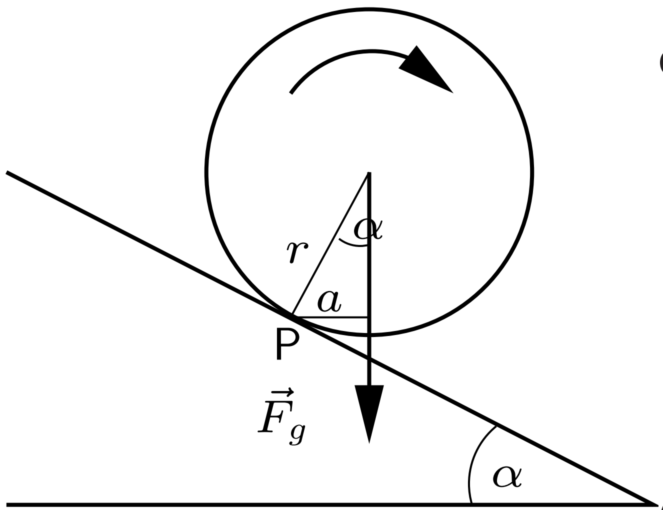
$$\sum F_\parallel = mg\sin\alpha_{H,G} + F_{H,G} = 0,$$

wo α_H der Haftreibungswinkel und α_G der Gleitreibungswinkel sind.

Weil $F_H = \mu_H F_N = -m \cdot g \cdot \sin\alpha_H$ bzw. $F_G = \mu_G F_N = -m \cdot g \cdot \sin\alpha_G$, gilt

$$\mu_H = \tan\alpha_H \quad \text{bzw.} \quad \mu_G = \tan\alpha_G$$

Rollreibung



Drehmoment $F_g \cdot a = F_g \cdot r \sin\alpha$ wird kompensiert durch das Drehmoment aufgrund der Reibungskraft:

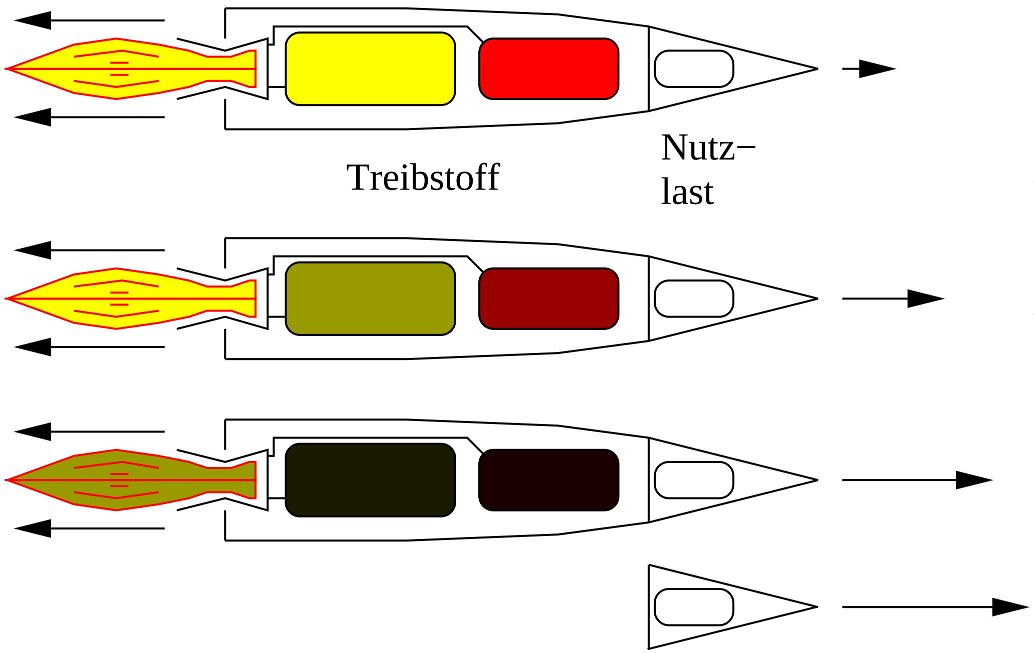
$$\begin{aligned} M_R = \mu_{\text{Roll}} F_N &= \mu_{\text{Roll}} F_g \cos\alpha, \\ F_g \cdot r \sin\alpha &= \mu_{\text{Roll}} F_g \cos\alpha, \\ \mu_{\text{Roll}} &= r \tan\alpha. \end{aligned}$$

Achtung: $\mu_{\text{Roll}} = r \tan\alpha$ ist nicht einheitslos! Man kann jetzt die Kräfte bei Rollreibung mit denen bei Gleitreibung vergleichen.

$$\frac{F_G}{F_R} = \frac{F_G}{M_R/r} = \frac{\mu_G F_N}{\mu_{\text{Roll}} F_N} \cdot r = \frac{\mu_G}{\mu_{\text{Roll}}} \cdot r.$$

Das Verhältnis wächst mit dem Radius des Rades!

Beispiel einer Bewegungsgleichung: Die Raketengleichung



Als Beispiel für eine Bewegungsgleichung untersuchen wir die Raketengleichung, welche die Bewegung von Raketen beschreibt. Bei einer konstanten Brennrate $\dot{m}$ entströmen während der Brennzeit t_B die heißen Gase der Düse mit einer Geschwindigkeit v_0. Dann lautet der Ausdruck für die Masse der Rakete

$$m(t) = m_0 - \dot{m}t,$$

wo m_0 die Masse der Rakete zur Zeit $t = 0$ ist. Auf die Rakete wirkt neben der Gravitationskraft $F = m(t) \cdot g$ auch die Kraft, die durch die ausströmenden Gase auf sie entsteht, denn $F = \dot{p}$:

$$F_{\text{tot}} = (m_0 - \dot{m}t)\,a(t) = \dot{m}v_0 - (m_0 - \dot{m}t)\,g.$$

Wir formen um und integrieren nach der Zeit

$$\begin{aligned}
(m_0 - \dot{m}t)\,a(t) &= \dot{m}v_0 - (m_0 - \dot{m}t)\,g \\
\ddot{x}(t) = a(t) &= \frac{\dot{m}}{(m_0 - \dot{m}t)}v_0 - g \\
\dot{x}(t) = v(t) = \int \mathrm{d}t'\,\ddot{x}(t') &= \int_0^t \mathrm{d}t' \left(\frac{\dot{m}}{(m_0 - \dot{m}t')}v_0 - g\right) \\
v(t) &= v_0 \int_0^t \mathrm{d}t' \frac{\dot{m}}{(m_0 - \dot{m}t')} - gt \;=\; v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t}\right) - gt
\end{aligned}$$

Raketengleichung III