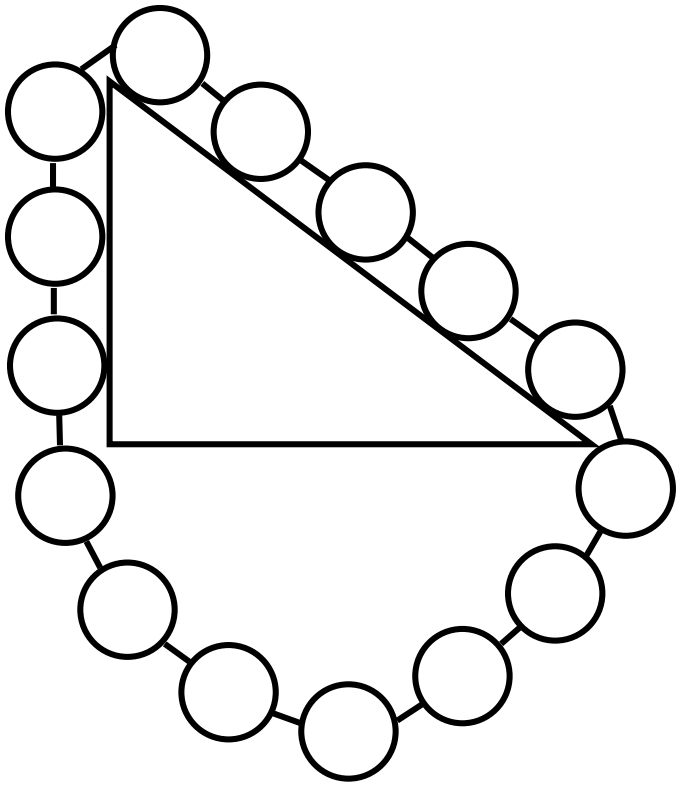
Die Newtonschen Gesetze

1. **Newton I: Ein Körper, auf den keine äußeren Einflüsse (Kräfte) wirken, verharrt in Ruhe bzw. einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung.** Diese Gesetzmäßigkeit wurde schon von Galileo entdeckt; schon er musste also die Reibung "wegabstrahieren". Heute sagen wir, **der Impuls bleibt erhalten.**

2. **Newton II: Wirkt eine Kraft auf einen Körper, so ändert sich sein Impuls proportional zur und entlang der angreifenden Kraft.**

3. **Newton III: Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit einer Kraft F_{AB}, so wirkt umgekehrt der Körper B auf den Körper A mit einer Kraft $F_{BA} = -F_{AB}$. "Actio = Reactio"**

Kraft als Vektor – Wunder ist kein Wunder



Der flämische Physiker Simon Stevin (1548–1620) veröffentlichte 1605 das links skizzierte Gedankenexperiment und betitelte es mit "Wunder ist kein Wunder". Es ist klar, dass sich die Kette nicht bewegt – aber warum nicht?

Der unter dem Dreieck hängende Teil der Kette ist symmetrisch um ihre Aufhängung, weshalb er für das Gleichgewicht unwichtig ist. Damit müssen sich die Kräfte links und rechts des Scheitelpunktes gerade aufheben, wie auch deren horizontalen und vertikalen Komponenten. **Kräfte müssen als Vektoren behandelt werden!**

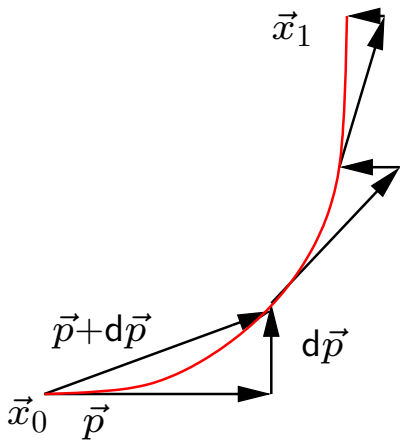
Impuls und Kraft

Der Impuls eines Körpers bleibt also erhalten, wenn keine Kraft auf ihn wirkt (Newton I). Nach Newton II ändert sich der Impuls des Körpers proportional zur und entlang der angreifenden Kraft.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F},$$

wo wir den Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ schon kennengelernt haben. Die Kraft $\vec{F}$ ist eine **gerichtete Größe**, ein **Vektor**, wie auch die Impulsänderung mit der Zeit, schließlich sind sie ja gleich ('=')! Genauso sind auch der Impuls $\vec{p}$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}$ Vektoren, wo m, die Masse des Körpers, im Ausdruck für den Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ wie eine Proportionalitätskonstante als **Skalar** (**ungerichtete Größe**) erscheint.

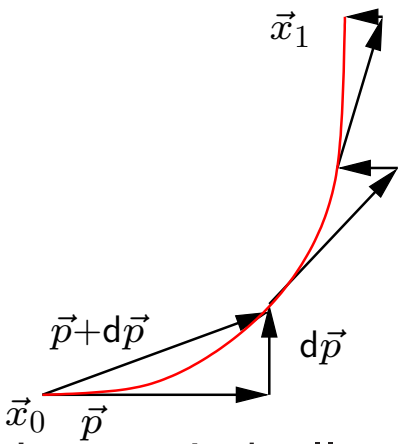
Impuls und Kraft - und Energie/Arbeit



Was passiert nun mit einem Körper, auf den wir über eine Zeit $\mathrm{d}t$ eine Kraft $\vec{F}$ ausüben?

1) Er ändert seinen Impuls $\vec{p}$
2) Er ändert seine Geschwindigkeit $\vec{v}$
3) Er ändert seinen Ort $\vec{x}$

Impuls und Kraft - und Energie/Arbeit



Was passiert nun mit einem Körper, auf den wir über eine Zeit $\mathrm{d}t$ eine Kraft $\vec{F}$ ausüben?

1) Er ändert seinen Impuls $\vec{p}$
2) Er ändert seine Geschwindigkeit $\vec{v}$
3) Er ändert seinen Ort $\vec{x}$

Ja, es sind alle drei Antworten richtig. Weil er aber seinen Impuls *und* seinen Ort ändert, wirkt also über den von ihm zurückgelegten Weg eine Kraft auf ihn und wir können das Produkt aus ausgeübter Kraft (Impulsänderung) und infinitesimalem Weg aufaddieren (integrieren),

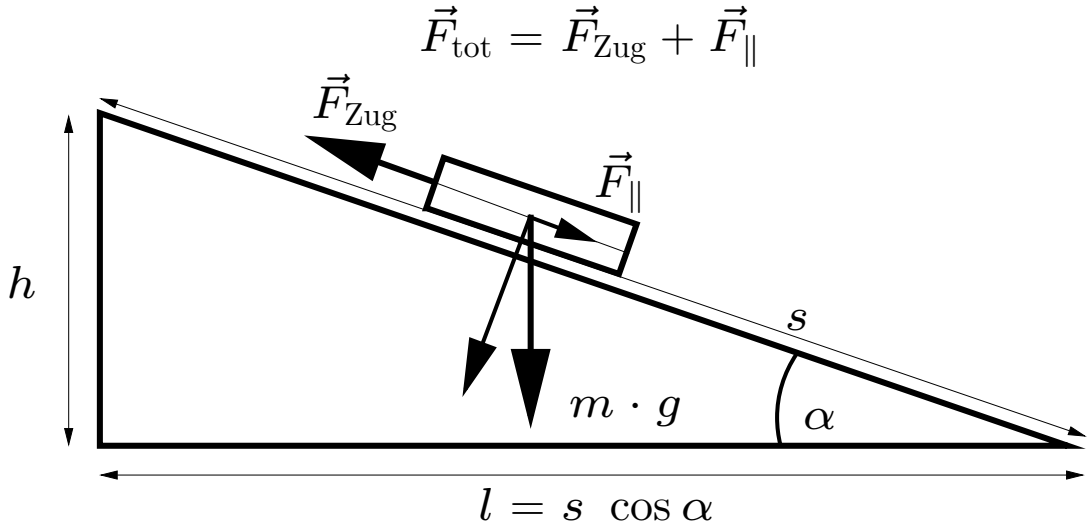
$$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = E, \quad \text{wo } E \text{ eine skalare Größe ist, und zwar die...}$$

Arbeit

Arbeit ist Kraft mal Weg

- Gotthardstraße
- Treppe und Lift
- Feder
- Bergsteiger/Wanderer

Arbeit



Gleichmäßige Bewegung:

$\vec{F}_{\text{zug}} = -\vec{F}_{\parallel}$

$F_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

$A = F_{\parallel} \cdot s \;\; ; \;\; s = \frac{h}{\sin\alpha}$

$A = \frac{mg\sin\alpha h}{\sin\alpha} = mgh$

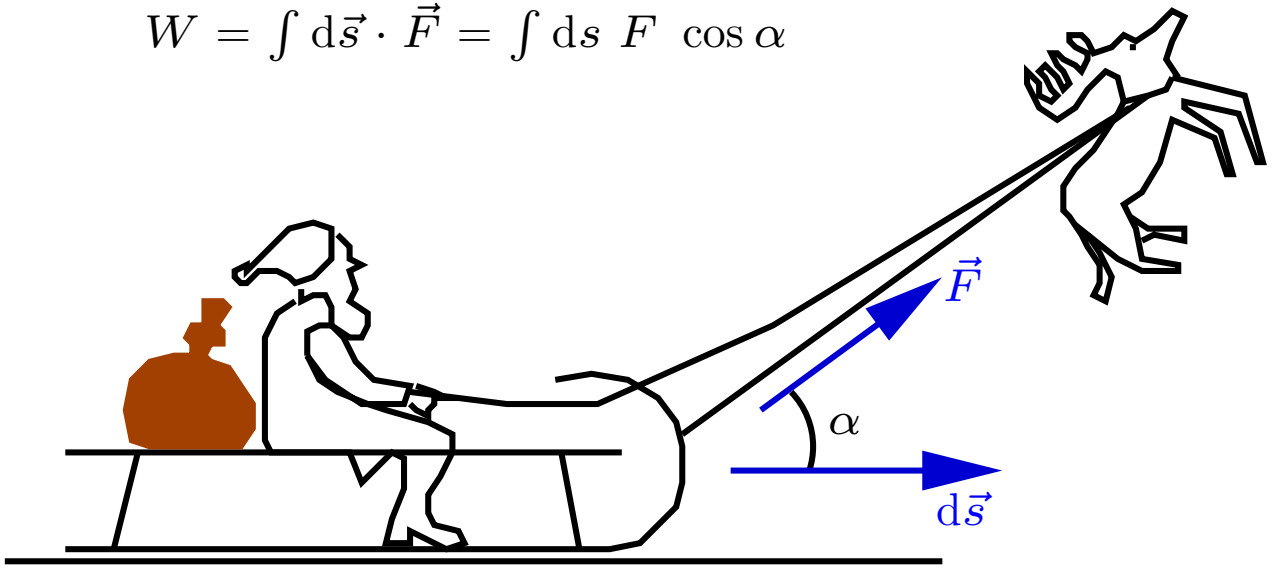
Die Arbeit oder aufgewendete Energie ist gleich Kraft mal Weg,

$$A = F_{\parallel} \cdot s. \tag{1}$$

Weil der Weg hier eindimensional und nur in einer Richtung zurückgelegt wird, haben wir in Glg. 1 keine Vektorpfeile verwendet.

Arbeit

$$W = \int \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{F} = \int \mathrm{d}s \; F \; \cos\alpha$$



Arbeit und Leistung

Arbeit ist Kraft mal Weg [Arbeit] = N m = J = W s

Leistung = Arbeit pro Zeit [Leistung] = N m/s = J/s = W

Beispiel:
100 kg Backsteine 10 m hochtragen.
$E = mgh = 100 \cdot 9{,}81 \cdot 10$ kg m^2/s^2 $= 9810$ J $= 2{,}725$ Wh
dito innerhalb von 5 Minuten: Leistung $P = 9810/300$ J/s $= 32{,}7$ W.

Zum Vergleich: Ein Mensch isst pro Tag 2000 kcal $= 2000$kcal $\cdot 4184$ J/kcal $= 8368000$ J. Ein Tag hat $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ Sekunden. Also leistet der Mensch im Mittel etwa $8368000/86400 \approx 100$ Watt!

Potentielle und kinetische Energie

- Energie: gespeicherte, "mögliche" (potentielle) Arbeit
- **potentielle** Energie: Lageenergie (Wasser im Stausee,. . .)
- **kinetische** Energie: Bewegungsenergie

Energie bleibt erhalten bzw. wird umgewandelt,
d. h. $E = E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}} = \mathrm{const}$. Beispiele:

- Pendel
- Galilei'sches Hemmungspendel

Formal:

$$E = \int F \, \mathrm{d}x = \int ma \, \mathrm{d}x = m \int \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}x = m \int v \, \mathrm{d}v = \frac{m}{2} v^2.$$

Umwandlung von potentieller in kinetische Energie. Oft wird Energie auch in andere Formen umgewandelt, wie Wärme, Schall, Deformation, etc.

Bewegung in Systemen mit mehreren Massenpunkten

Wir betrachten ein System mit mehreren Massenpunkten. Für jeden Massenpunkt i bilden wir die Summe über alle angreifenden externen Kräfte $\vec{F}_{i,\mathrm{ext}}$ und inneren Kräfte $\vec{F}_{ij}$. Dann gilt für jeden Massenpunkt nach Newton 2:

$$\vec{F}_{i,\mathrm{ext}} + \sum_j \vec{F}_{ij} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}.$$

Für n Massenpunkte muss also ein System von n Bewegungsgleichungen gelöst werden. Vereinfachend beginnen wir mit $n = 2$.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1,\mathrm{ext}} + \vec{F}_{21} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t},$$
$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2,\mathrm{ext}} + \vec{F}_{12} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t},$$

wobei $\vec{F}_{21}$ die Kraft darstellt, welche Massenpunkt 2 auf Massenpunkt 1 ausübt. $\vec{F}_{1,\mathrm{ext}}$ stellt die Kraft dar, welche von außen auf Massenpunkt 1 wirkt. Die Kräfte können z. B. vom Ort oder von der Geschwindigkeit abhängen. Nach Newton 3 ist $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Damit fallen die "inneren" Kräfte beim Bilden der Summe der Bewegungsgleichungen heraus:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{1,\mathrm{ext}} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{2,\mathrm{ext}} - \vec{F}_{21} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

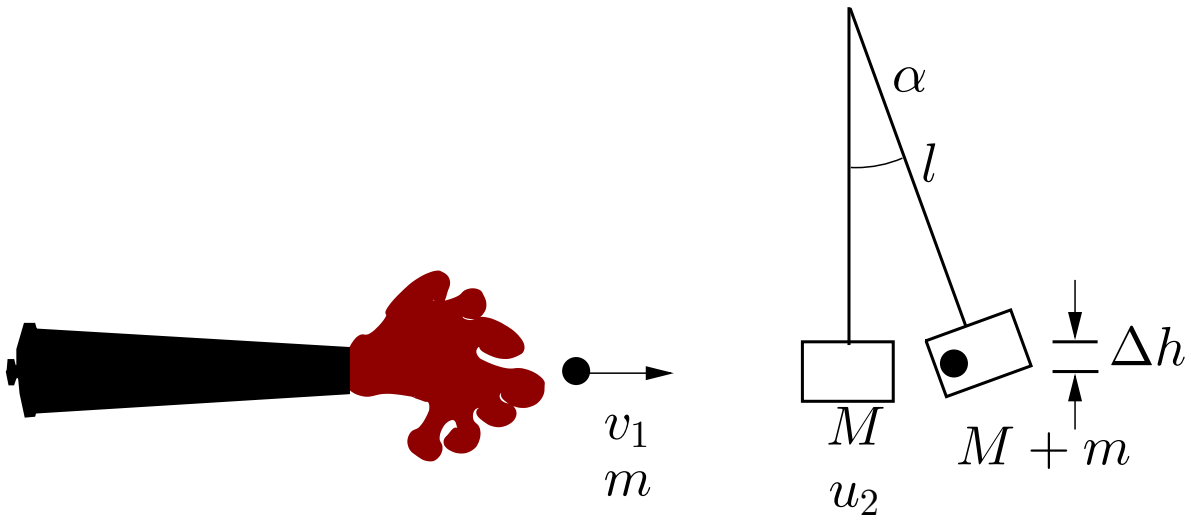
Ist $\vec{F} = 0$, so ist

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{bzw. } \vec{p} = \text{const.},$$

analog zum zweiten Newtonschen Gesetz.

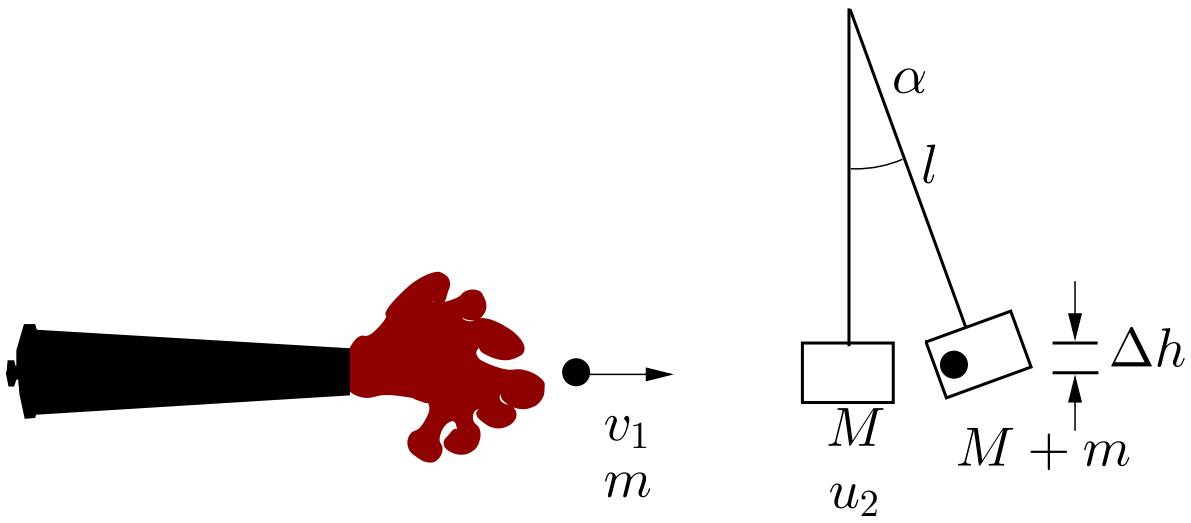
Ohne Einwirkung äußerer Kräfte ($\vec{F} = 0$) bleibt in einem System von n Massenpunkten der Gesamtimpuls erhalten ($\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0$).

Impuls und Impulserhaltung: Ballistisches Pendel



Wie schnell ist Kugel?
Energieerhaltung?
Impulserhaltung?

Impuls und Impulserhaltung: Ballistisches Pendel



Wie schnell ist Kugel?
Energieerhaltung?
Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} mv_1 &= (M+m)u_2, \\ v_1 &= \frac{M+m}{m}u_2. \end{aligned}$$

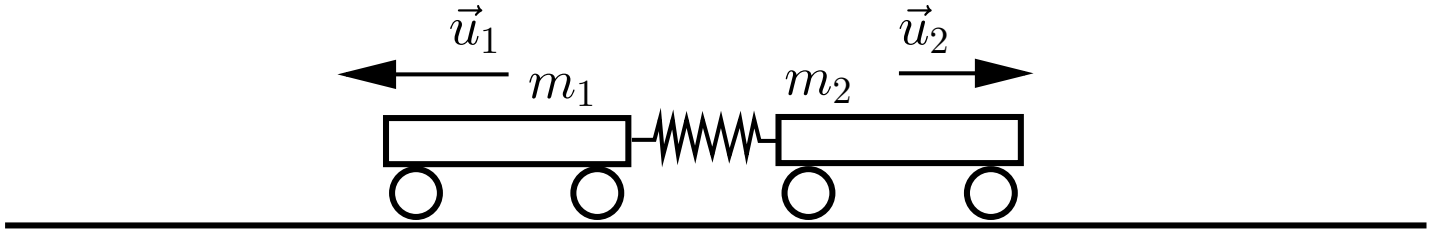
Nun gilt aber auch

$$\frac{1}{2}(M+m)u_2^2 = (M+m)g\ \Delta h, \quad \longrightarrow \quad u_2 = \sqrt{2g\ \Delta h},$$

und so kann ich v_1 bestimmen!

Impuls und Impulserhaltung

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$



Danach muss gelten

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0,$$

woraus sofort folgt, dass

$$u_2 = -\frac{m_1}{m_2} u_1.$$

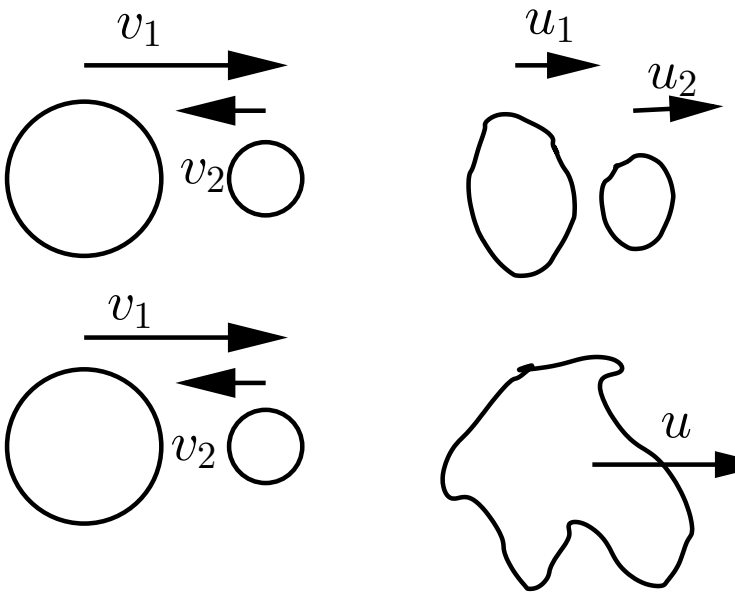
Beispiel: Rakete, hier verändert sich allerdings m mit der Zeit. . .

Stöße

Man unterscheidet verschiedene Sorten von Stößen:

- inelastischer Stoß: endotherm, Umwandlung kinetischer Energie in innere Energie (z. B. Wärme)
- elastischer Stoß: Energieerhaltung
- schiefer Stoß: Geometrieeffekte
- (exothermer Stoß: Umwandlung innerer Energie in kinetische Energie (z. B. $e^- - e^+ \longrightarrow 2\gamma$))

Inelastische Stöße



teilweise inelastisch

vollständig inelastisch

Inelastische Stöße II

Vollständig inelastischer Stoß:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u, \quad \text{also} \quad u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}.$$

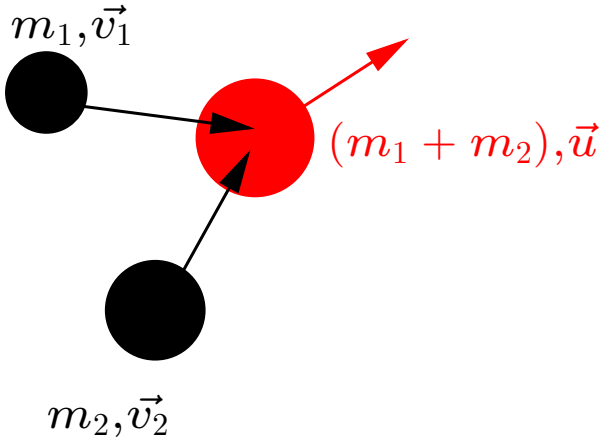
Vorzeichen von v_1 und v_2 beachten! Für $m_1 = m_2$ gilt offensichtlich

$$u = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Aus den Geschwindigkeiten lässt sich die in innere Energie verwandelte kinetische Energie berechnen (Übung!).

Inelastische Stöße III

Das Ganze geht auch vektoriell! Es gilt



$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= (m_1+m_2)\vec{u}, \\ \vec{u} &= \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{(m_1+m_2)}. \end{aligned}$$

Aber wie funktioniert denn das bei **elastischen** Stößen?

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

kann ich ja nicht lösen!

Elastische Stöße in einer Dimension

Zusätzlich bleibt kinetische Energie erhalten!

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2, \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1u_1 + m_2u_2. \end{aligned}$$

Zwei Unbekannte, zwei Gleichungen! Sortiere nach Körpern 1 und 2:

$$\frac{1}{2}m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right) = \frac{1}{2}m_2\left(u_2^2 - v_2^2\right), \tag{2}$$

$$m_1\left(v_1 - u_1\right) = m_2\left(u_2 - v_2\right). \tag{3}$$

Dividiere Gleichung 2 durch Gleichung 3 $\longrightarrow v_1 + u_1 = u_2 + v_2$.

Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem,

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= u_2 - u_1, \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \end{aligned}$$

welches z.B. durch Einsetzen gelöst werden kann. Wir setzen $u_2 = v_1 - v_2 + u_1$ in die Impulsgleichung ein,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 (v_1 - v_2 + u_1),$$

und lösen nach u_1 auf.

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2),$$

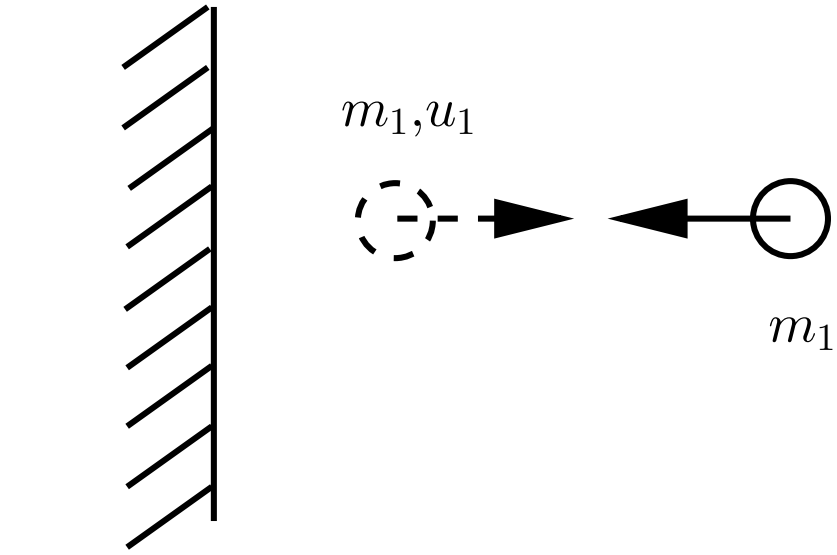
$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (4)$$

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5)$$

Spezialfälle:

- $m_1 = m_2 \Longrightarrow u_1 = v_2$ und $u_2 = v_1$
- $m_1 \gg m_2 \Longrightarrow u_1 \approx v_1$ und $u_2 \approx 2v_1 - v_2$

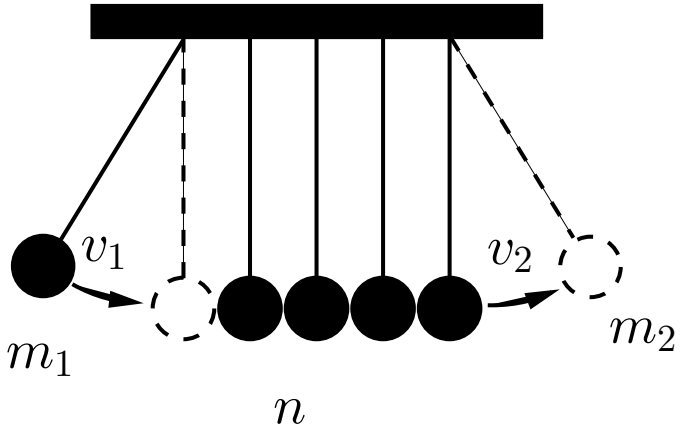
Stoß mit einer unbeweglichen Wand



Die Wand bewegt sich vor und nach dem Stoß nicht ($m_2 = \infty$). Also $v_2 = u_2 = 0$. Im Vergleich zu $m_2 = \infty$ können wir m_1 als verschwindend klein annehmen.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\cancel{m_1}^{0} - m_2}{\cancel{m_1}^{0} + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{\cancel{m_1}^{0} + m_2} \cancel{v_2}^{0}, \\
&= -\frac{\cancel{m_2}^{1}}{\cancel{m_2}} v_1 + 2\frac{\cancel{m_2}^{1}}{\cancel{m_2}} \cancel{v_2}^{0} = -v_1 + 0, \\
u_1 &= -v_1.
\end{aligned}
$$

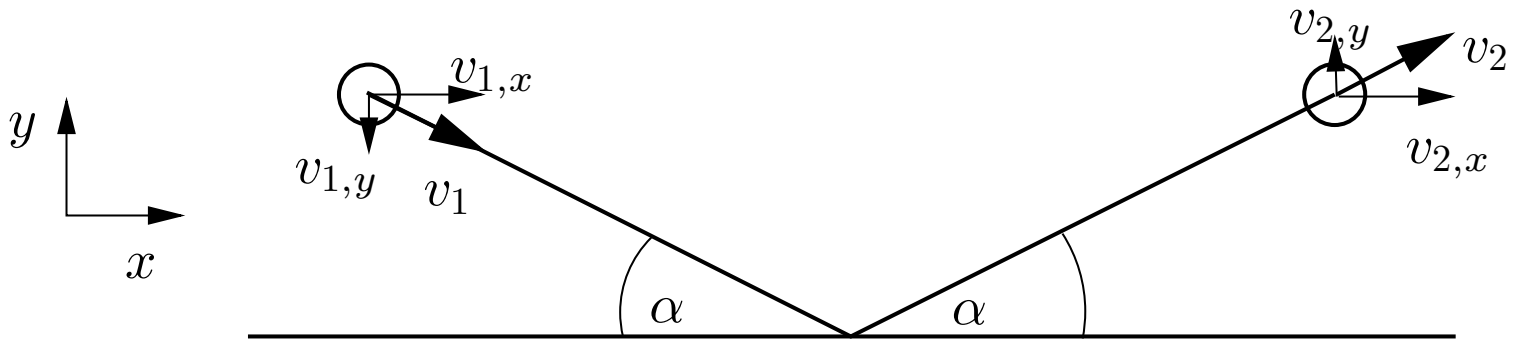
Übung: Mehrere Körper auf einer Linie



$$n_1 m_1 v_1 = n_2 m_2 v_2 \quad \text{(Impulssatz)}; \qquad \frac{n_1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{n_2}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{(Energiesatz)}.$$

Übung: Zeigen Sie, dass: $m_1 = m_2 \Longrightarrow n_1 = n_2$

Bewegung in der Ebene



Überlagerung einer Bewegung entlang von x mit einer Reflexion an einer Wand.

$$v_{2,x} = v_{1,x}; \quad v_{2,y} = -v_{1,y}$$

$m_2 \neq \infty$

Wie soll nun ein Stoß in der Ebene behandelt werden, wenn $m_2 \neq \infty$? Aus der Impuls- und Energieerhaltung

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \end{aligned}$$

ergeben sich nur drei Bedingungen an die vier Unbekannten $u_{1,x}$,$u_{1,y}$,$u_{2,x}$ und $u_{2,y}$. Offensichtlich wird die Situation in drei Dimensionen noch schlimmer, 6 Unbekannten stehen nur vier Gleichungen gegenüber. Diese prinzipielle Schwierigkeit lässt sich nicht beheben, wohl aber in handlichere Teilprobleme unterteilen.

Spezialfall $m_1 = m_2 = m$ und $\vec{v}_2 = \vec{0}$

Impulserhaltung:

$$m\vec{v}_1 = m\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right)$$

Quadrieren ergibt

$$m^2\vec{v}_1^2 = m^2\left(u_1^2 + 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + u_2^2\right)$$

Energieerhaltung:

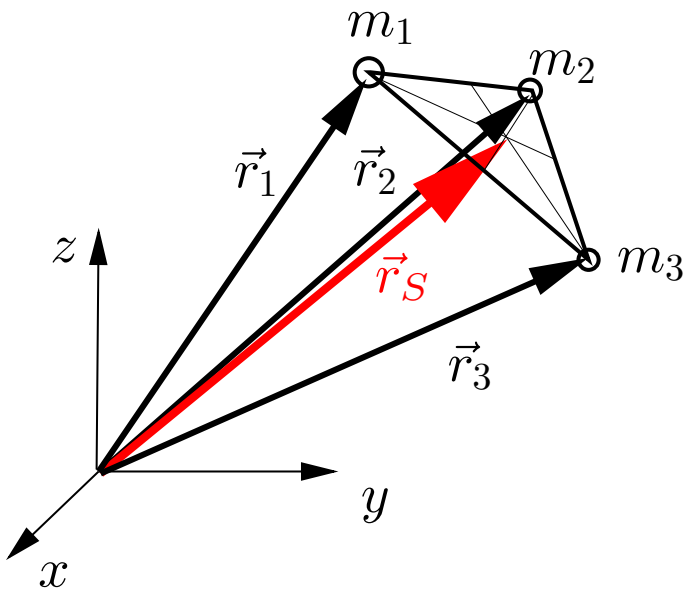
$$\frac{m}{2}v_1^2 = \frac{m}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right)$$

Deshalb muss gelten

$$2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0.$$

Diese Bedingung kann auf zwei Arten erfüllt werden. Bei einem zentralen Stoß bleibt m_1 stehen ($\vec{u}_1 = 0$). Bei einem nicht zentralen Stoß von zwei gleich massiven Partnern stoßen sie sich elastisch in einem rechten Winkel.
Anwendung: Billard!

Der Schwerpunkt eines Systems



$$\vec{r}_S \doteq \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad (6)$$

Schwerpunktgeschwindigkeit

Greifen keine äußeren Kräfte an, so bleibt der Impuls des Systems konstant.

$$\text{Nach Newton I:} \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Verändern sich die Massen nicht, so ändert sich auch die Geschwindigkeit des Systems nicht, genauer,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Damit lässt sich eine mittlere Geschwindigkeit definieren, welche unverändert bleibt:

$$\vec{v}_S \doteq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i.$$

Offensichtlich ist

$$\vec{v}_S = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_S}{\mathrm{d}t},$$

d. h. die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Systems bleibt erhalten.
Oft vereinfachen sich die auftretenden Gleichungen erheblich, wenn man in das Schwerpunktsystem transformiert, denn

$$\begin{aligned} \vec{p}_S &= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_S, \qquad (7) \\ \vec{p}_{S,S} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_i - \vec{v}_S\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_S = M\vec{v}_S - M\vec{v}_S = \vec{0}. \end{aligned}$$

Die kinetische Energie transformiert sich ebenso einfach:

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1(\vec{v}_{1,S} + \vec{v}_S)^2 + m_2(\vec{v}_{2,S} + \vec{v}_S)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1 v_{1,S}^2 + m_2 v_{2,S}^2\right) + \frac{1}{2}\left(m_1 v_S^2 + m_2 v_S^2\right) + (m_1\vec{v}_{1,S} + m_2\vec{v}_{2,S}) \cdot \vec{v}_S \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1 v_{1,S}^2 + m_2 v_{2,S}^2\right) + \frac{1}{2}\left(m_1 v_S^2 + m_2 v_S^2\right) + 0 \\
E_{\mathrm{kin}} &= E_{\mathrm{kin}}^{(S)} + \frac{1}{2}M v_S^2
\end{aligned}
$$

weil wegen $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_S$ (Glg.7) gilt $(m_1\vec{v}_{1,S} + m_2\vec{v}_{2,S}) = \vec{0}$.

Bewegung zweier Teilchen im Schwerpunktsystem

Nach Voraussetzung wirken keine äußeren Kräfte auf das System, d. h. es wirken nur die inneren Kräfte $\vec{F}_{12}$ und $\vec{F}_{21}$. Beispiel: Zentralstern mit nur einem Planeten.

$$\vec{F}_{12}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = m_1\ddot{\vec{x}}_1, \qquad (8) \qquad\qquad \vec{F}_{21}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = m_2\ddot{\vec{x}}_2, \qquad (9)$$

Wir bilden nun die Summe und die Differenz dieser beiden Gleichungen.

$$(8)+(9) = m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2 = 0, \quad (10) \qquad (8)-(9) = m_1\ddot{\vec{x}}_1 - m_2\ddot{\vec{x}}_2, \qquad (11)$$

Nach Newton 3 verschwindet $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$. Mit der Definition von $\vec{R}$ (der Ort des

Schwerpunktes, Glg. 6) kann ich Glg.10 schreiben als

$$\vec{R} \doteq \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \Longrightarrow m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2 = (m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = 0. \qquad (12)$$

Wir haben also aus den Gleichungen 8 und 9 eine Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt isoliert. Aus der Differenz der Gleichungen 8 und 9 isolieren wir nun eine Gleichung, welche die Relativbewegung der beiden Massenpunkte beschreibt. Ich definiere den Vektor $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, der von m_2 zu m_1 zeigt. Die Beschleunigung, die der eine Körper auf den anderen auswirkt, ist

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}, \text{ weil } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Die Summe der beiden Kräfte $\vec{F}_{12}$ und $\vec{F}_{21}$ ist nichts anderes als die Gesamtkraft, die auf den Schwerpunkt wirkt, und die verschwindet nach Voraussetzung,

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. $\ddot{\vec{r}}$ stellt die Änderung der Relativgeschwindigkeit zwischen den Körpern 1 und 2 mit der Zeit dar. Mit der Definition der **reduzierten Masse** μ kann eine besonders einfache Bewegungsgleichung gefunden werden

$$\mu \doteq \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \implies \vec{F}_{12} = \mu \ddot{\vec{r}}.$$

Dieses Problem ist nun mathematisch einfach zu behandeln. Es beschreibt die Bahn eines Körpers der Masse μ im Gravitationspotential eines viel massiveren Körpers der Masse $M = m_1 + m_2$. Wenn ich dann die Lösung für $\vec{r}$ gefunden habe, kann ich die Bahn der Körper 1 und 2 wiederum schreiben als (Übung!)

$$\vec{x}_1(t) = \vec{R}(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}(t), \quad (13) \qquad \vec{x}_2(t) = \vec{R}(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}(t). \quad (14)$$

Elastische Stöße im Schwerpunktsystem

Wegen $\vec{p}_{S,S} = \vec{0}$ muss auch vor und nach dem Stoß gelten

$$\text{vorher:} \quad \vec{p}_{1,S} = -\vec{p}_{2,S} \quad \text{und nachher:} \quad \vec{p}'_{1,S} = -\vec{p}'_{2,S}.$$

Einsetzen in die Energieerhaltung ergibt mit $p_i = m_i v_i$

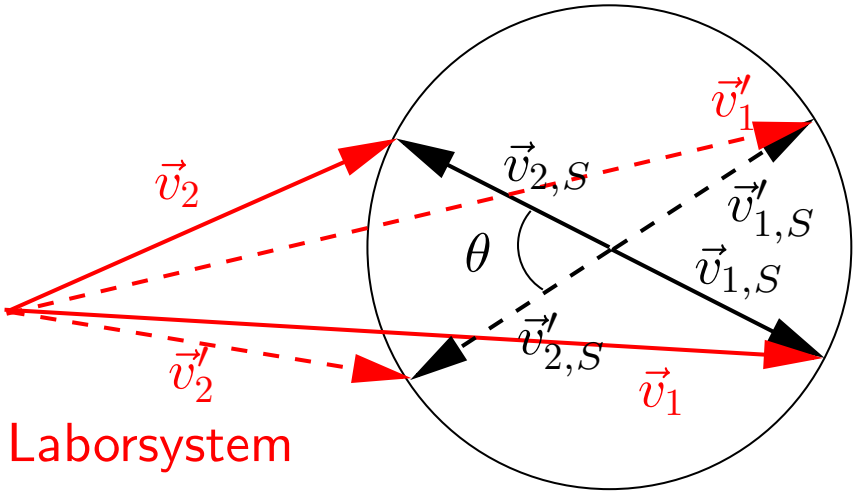
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) p'^2_{1,S} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) p^2_{1,S} + Q,$$

wo Q eine mögliche Änderung der Energie bei inelastischen Stößen bedeute. Verwenden wir die reduzierte Masse μ, so

$$\frac{p'^2_{1,S}}{2\mu} = \frac{p^2_{1,S}}{2\mu} + Q.$$

Für elastische Stöße ist $Q = 0$ (nach Definition), folglich $p'^2_{1,S} = p^2_{1,S}$ und $p'^2_{2,S} = p^2_{2,S}$.

Dies lässt im Schwerpunktsystem lediglich eine Drehung der Impulse zu!



Laborsystem

Schwerpunktsystem

Elastische Stöße im Schwerpunktsystem II

Oft wird der eine Stoßpartner vor dem Stoß in Ruhe sein, etwa wenn ein Teilchen der Masse m_1 in einem Beschleuniger auf ein Targetteilchen der Masse m_2 trifft. Dann gilt also $\vec{v}_2 = \vec{0}$. Wir wollen diesen wichtigen Spezialfall untersuchen. Der Einfachheit halber berücksichtigen wir nur elastische Stöße und untersuchen, wie der Streuwinkel θ den Energieübertrag von m_1 auf m_2 beeinflusst.

Die Schwerpunktgeschwindigkeit ist

$$\vec{v}_S = \vec{u}_S = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{0}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{v}_1}{1+A}, \quad \text{wo} \quad A = \frac{m_2}{m_1}.$$

($\vec{u}$: Geschw. nach dem Stoß.) Wir rechnen in das Schwerpunktsystem um:

$$\vec{v}_{1,S} \quad = \quad \vec{v}_1 - \vec{v}_S = \frac{A}{1+A}\vec{v}_1,$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_{2,S} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_S = -\frac{\vec{v}_1}{1+A} \\ \vec{u}_{1,S} &= \vec{u}_1 - \vec{v}_S\end{aligned}$$

Wir lösen die letzte Gleichung nach $\vec{u}_1$ auf und quadrieren das Resultat.

$$\begin{aligned}u_1^2 &= (\vec{u}_{1,S} + \vec{v}_S)^2 = \left(\vec{u}_{1,S} + \frac{\vec{v}_1}{1+A}\right)^2, \\ &= u_{1,S}^2 + \frac{v_1^2}{(1+A)^2} + 2u_{1,S}\frac{v_1}{1+A}\cos\theta,\end{aligned}$$

wo θ der Winkel zwischen $\vec{u}_{1,S}$ und $\vec{v}_S$ ist. Das Resultat bringen wir auf einen Nenner

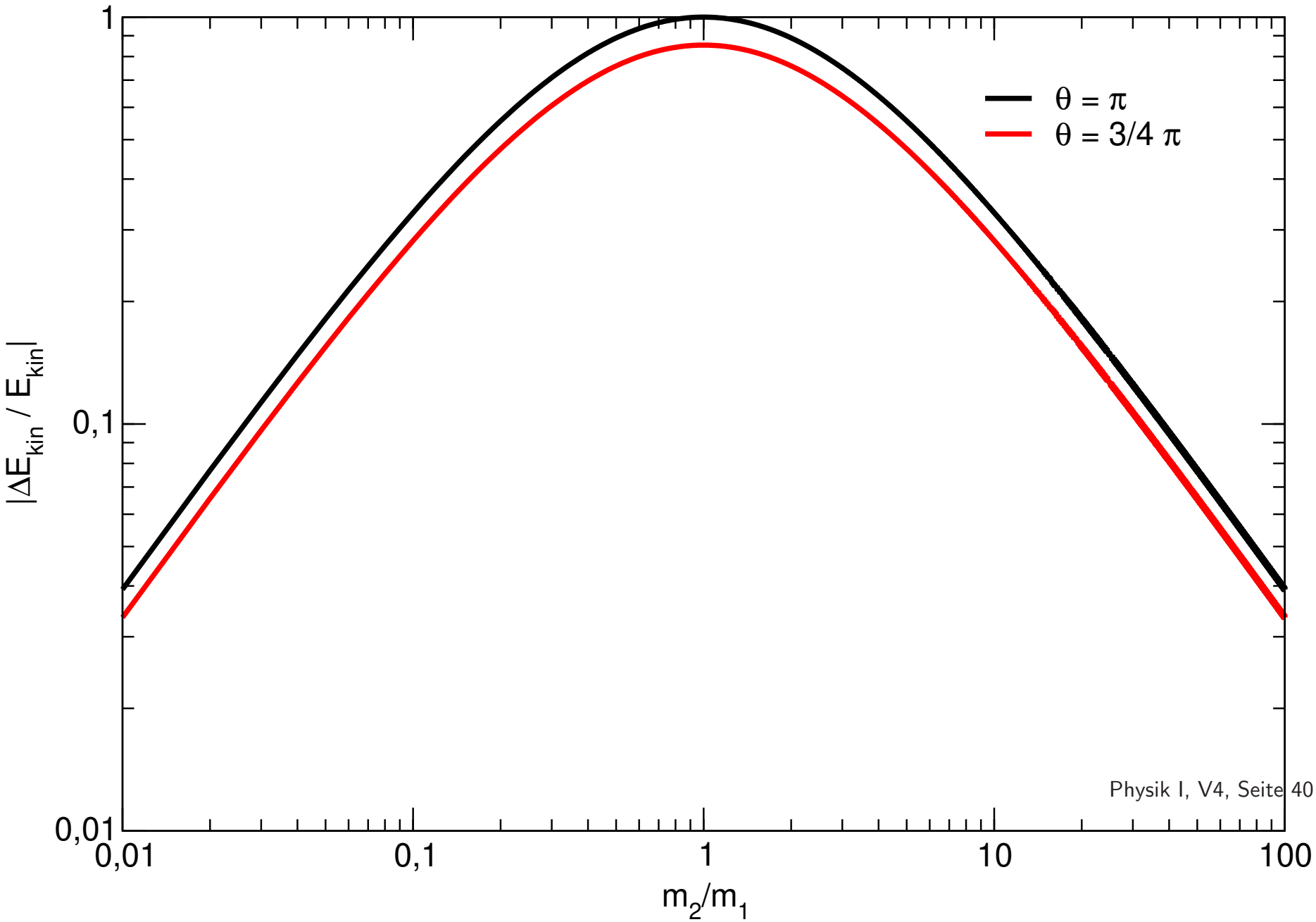
$$u_1^2 = \frac{(1+A)^2 u_{1,S}^2 + v_1^2 + 2(1+A)u_{1,S}v_1\cos\theta}{(1+A)^2}.$$

Wegen der Energieerhaltung im Schwerpunktsystem für elastische Stöße $p'^2_{1,S}/(2\mu) = p^2_{1,S}/(2\mu)$ gilt auch (sofern m_1 und m_2 gleich bleiben!) $u^2_{1,S} = v^2_{1,S}$ und mit $v_{1,S} = v_1 A/(1+A)$ gilt folglich

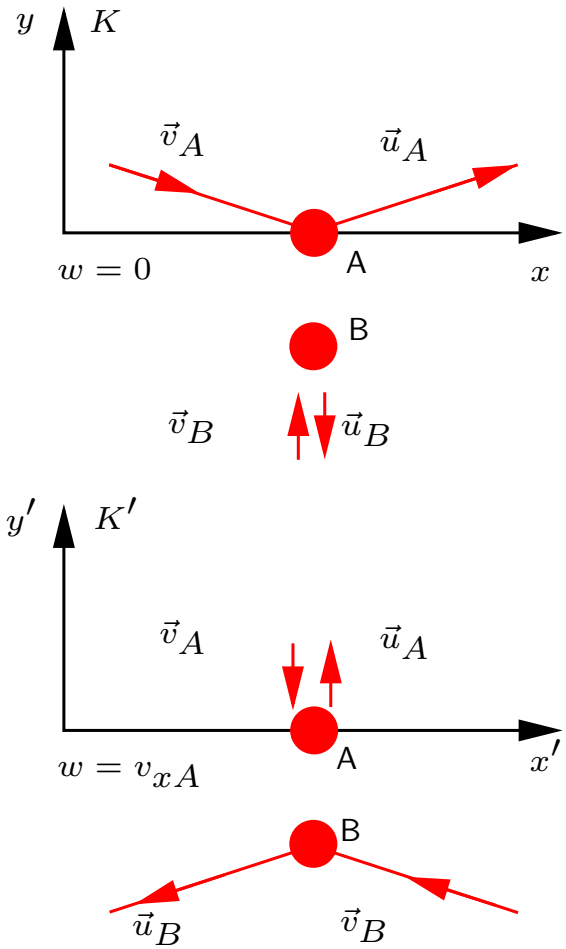
$$u_1^2 = v_1^2 \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(1+A)^2}.$$

Energieübertrag in einem elastischen Stoß:

$$\frac{\Delta E_{\text{kin}}}{E_{\text{kin}}} = \frac{E_{\text{kin},1} - E'_{\text{kin},1}}{E_{\text{kin},1}} = 1 - \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(1+A)^2}.$$


1
0,1
0,01
0,01
0,1
1
10
100
$|\Delta E_{kin} / E_{kin}|$
m_2/m_1
θ = π
θ = 3/4 π

Relativistische Formulierung*



Wir betrachten nun zwei Körper derselben Masse $m_A = m_B = m$, die sich bei relativistischen Geschwindigkeiten begegnen. Wie sieht ein Stoß in diesem Falle aus? Dabei bewegen wir uns in einem System K so, dass sich der Körper A in y Richtung nur sehr langsam bewegt und diese Impulskomponente beim Stoß umgekehrt wird, $u_{yA} = -v_{yA}$. Dasselbe geschehe mit Körper B und Körper A bewege sich immer noch mit Geschwindigkeit v_{xA} in x-Richtung. Der Impuls ist also erhalten.

Nun betrachten wir den Stoß im System K', welches sich mit $w = v_{xA}$ entlang der x-Achse bewegt. In diesem System sind also die Rollen von A und B vertauscht. Die Geschwindigkeiten transformieren sich gemäß der

Lorentz-Transformation (V2, S. 37),

$$v'_y = \frac{v_y/\gamma}{1 - v_x w/c^2}, \quad \text{wo} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.$$

Nun ist im System K für die beiden Teilchen die Geschwindigkeit in x-Richtung verschieden, weshalb sich auch die y-Komponenten der Geschwindigkeit anders transformieren!

$$\begin{aligned} v'_{yA} &= \frac{v_{yA}/\gamma}{1 - v_{xA} w/c^2} = \frac{v_{yA}/\gamma}{1 - w^2/c^2} = \gamma v_{yA}, \quad \text{da} \quad w = v_{xA}, \\ v'_{yB} &= \frac{v_{yB}/\gamma}{1 - v_{xB} w/c^2} = v_{yB}/\gamma, \quad \text{da} \quad v_{xB} = 0, \end{aligned}$$

während die entsprechenden Geschwindigkeiten im System K die Beträge $|v_{yA}|$

und $|v_{yB}|$ haben, also

$$\frac{v'_{yA}}{v_{yA}} = \gamma \quad \text{und} \quad \frac{v'_{yB}}{v_{yB}} = \frac{1}{\gamma}.$$

In beiden Systemen gilt der Impulssatz. Weil beide System K und K' so gewählt sind, dass beide Körper die y-Komponente ihres Impulses umdrehen, gilt

$$m_A v_{yA} + m_B v_{yB} = 0 = m'_A v'_{yA} + m'_B v'_{yB}.$$

Dies ist aber für $m_A = m'_A$ und $m_B = m'_B$ nicht möglich, weil ja die y-Komponenten der Geschwindigkeiten verschieden sind. Also müssen die Massen m und m' verschieden sein! Für kleine y-Komponenten von v gilt die Näherung

$$\begin{aligned} v_A \approx v_{xA} = v \quad &, \quad v'_A \approx 0, \\ v_B \approx 0 \quad &, \quad v'_B \approx v_{xB} = w. \end{aligned}$$

Damit können wir mit $m_0 \doteq m(w=0)$ schreiben

$$\begin{aligned} m(w)v_{yA} + m_0 v_{y_B} &= 0, \\ m_0 v'_{yA} + m(w)v'_{y_B} &= 0. \end{aligned}$$

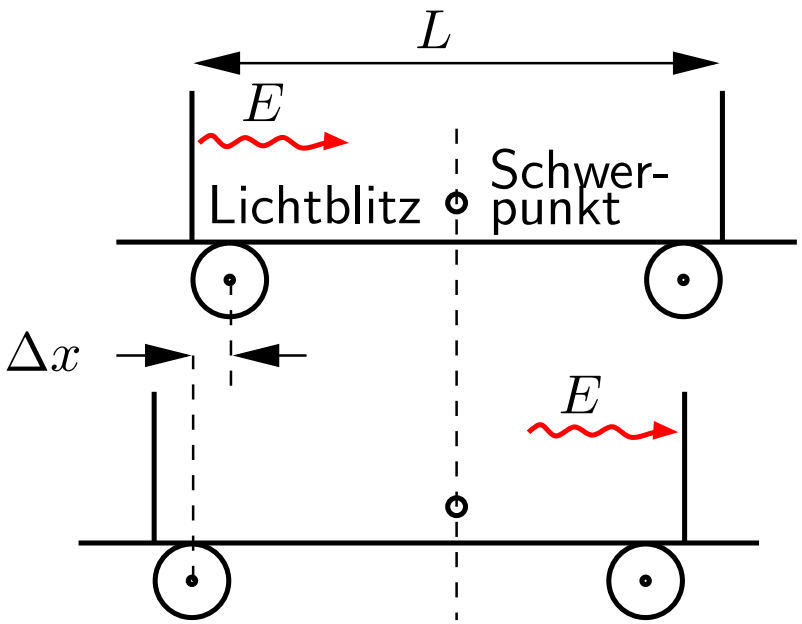
Wir nehmen die Terme mit v_{yB} bzw. v'_{yB} nach rechts, dividieren die Gleichungen und erhalten

$$\frac{m^2(w)}{m_0^2} = \frac{v_{yB}}{v'_{yB}}\frac{v'_{yA}}{v_{yA}} = \gamma^2.$$

Damit erhalten wir

$$\underline{m(w) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.}$$

Relativistische Energie: $E = mc^2$ *



Wir wollen nun noch die bekannte Energie-Masse Beziehung $E = mc^2$ verstehen. Dazu betrachten wir einen leichten Wagen, an dessen linker Wand ein Lichtblitz der Energie E ausgesandt wird. Nach den Gesetzen der klassischen Physik hat er einen Impuls $p = E/c$ (Stoff kommt im zweiten Semester). Weil der Wagen vor dem Blitz ruhen soll, muss auch nach dem Blitz der Schwerpunkt am selben Ort bleiben, der Gesamtimpuls bleibt erhalten. Deshalb muss sich der Wagen ein klein wenig nach links bewegen mit einer Geschwindigkeit $v = -p/M = -E/Mc$. Weil diese Geschwindigkeit sehr klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit,

$v \ll c$, erreicht der Lichtblitz die rechte Wand nach einer Zeit $\Delta t = L/c$, während der sich der Wagen lediglich um $\Delta x = v\Delta t = -EL/Mc^2$ nach links bewegt hat. Erreicht der Blitz die rechte Wand, so hält der Wagen an. Damit der Schwerpunkt unbewegt bleibt, muss dem Licht ein Impuls $p = mc$ zugeschrieben werden! Impulserhaltung sagt uns

$$mc - Mv = m(L/\Delta t) - Mv \;=\; m(L/\Delta t) - M(\Delta x/\Delta t) \Longrightarrow\; mL + M\Delta x = 0.$$

Daraus folgt

$$mL - MEL/Mc^2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad E = mc^2.$$

Setzen wir darin nun unseren Ausdruck für die Masse ein, so finden wir

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c^2 + (m(v) - m_0)c^2,$$

wobei der erste Term die sog. **Ruheenergie** und der zweite die eigentliche kinetische Energie ist. Für diese gilt mit einer Potenzreihenentwicklung für γ

$$E_{\mathrm{kin}} = (m(v) - m_0)\, c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ finden wir den klassischen Ausdruck wieder.

Für richtige Rechnungen ist es oft nützlicher, die Energie-Impuls Beziehung zu kennen:

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}.$$

Relativistische Kraft*

Wir nehmen den relativistischen Impuls $p = \gamma m_0 v$ und das zweite Newtonsche Gesetz und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right), \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\vec{v} + m\vec{a}. \end{aligned}$$

Die innere Ableitung in der Klammer wird mit $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}/\mathrm{d}v)$ durchgeführt:

$$\vec{F} = \frac{m_0\left(v/c^2\right)a}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\vec{v} + m\vec{a},$$

$$= \quad \gamma^3 m_0 a \left\{ \frac{v^2}{c^2} \frac{\vec{v}}{v} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\vec{a}}{a} \right\}.$$

Die Kraft hat also nicht nur eine Komponente in Beschleunigungsrichtung $\vec{a}/a$, sondern auch in Geschwindigkeitsrichtung $\vec{v}/v$! Diese wird aber für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ vernachläßigbar.