Starre Körper

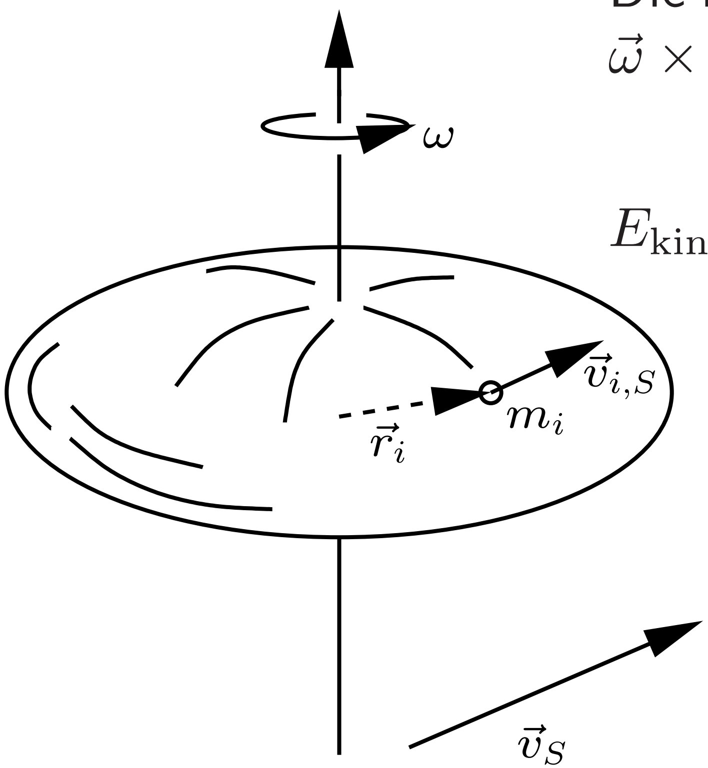
Die Bewegung eines ausgedehnten Körpers ist komplizierter als die eines Massenpunktes. Der Einfachheit halber betrachten wir als Modell einen starren Körper, der sich nicht deformieren lässt.

Starrer Körper: Die gegenseitigen Abstände der konstituierenden Massenpunkte lassen sich nicht verändern.

Freiheitsgrade eines Massenpunktes: 3 (Translation);
Freiheitsgrade eines starren Körpers: 6 (Translation, Rotation)

Die Bewegung eines starren Körpers lässt sich beschreiben durch die Überlagerung einer Translation mit einer Rotation.

Bewegungsenergie eines starren Körpers



Die Bewegungsenergie des Körpers lässt sich mit $\vec{v}_{i,S} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ schreiben als

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\vec{v}_{i,S} + \vec{v}_S\right)^2, \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\vec{v}_{i,S}^2 + 2\vec{v}_{i,S}\cdot\vec{v}_S + \vec{v}_S^2\right), \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\vec{v}_{i,S}^2 + \vec{v}_S^2\right) = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_{i,S}^2 + \frac{M}{2}\vec{v}_S^2, \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 + E_{\text{kin,trans}} = E_{\text{kin,rot}} + E_{\text{kin,trans}}.
\end{aligned}$$

Der Term $2\sum_i \vec{v}_{i,S} \cdot \vec{v}_S$ verschwindet weil $\vec{v}_S$ ausgeklammert werden kann und nach Definition $\sum_i \vec{v}_{i,S} = 0$ ist.

Die neu auftretende Größe $\sum_i m_i r_i^2$ heisst **Trägheitsmoment** J des starren Körpers bezüglich der gewählten Rotationsachse,

$$J \doteq \sum_i m_i r_i^2. \tag{1}$$

Mit der Definition des Trägheitsmomentes gilt auch

$$E_{\mathrm{kin,rot}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2. \tag{2}$$

Trägheitsmoment

Wir definieren also das Trägheitsmoment um eine Rotationsachse als

$$J \doteq \sum_i m_i r_i^2 > 0,$$

ferner

$$[J] = ML^2 = \mathrm{kg\ m}^2.$$

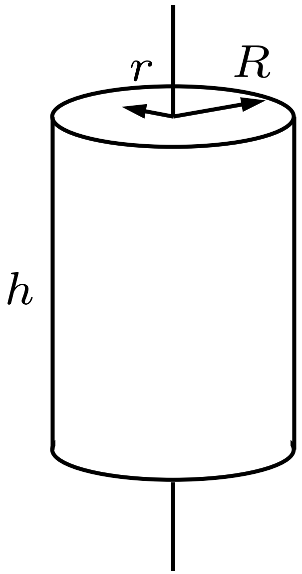
Das Trägheitsmoment ist weder ein Vektor noch ein Skalar, sondern ein sog. Tensor. Er ist immer auf eine bestimmte Rotationsachse bezogen. Die Tensoreigenschaften werden in V6.pdf behandelt.

Die Rotationsenergie lässt sich nach Glg. 2 schreiben als

$$E_{\mathrm{kin,rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Trägheitsmoment eines Zylinders

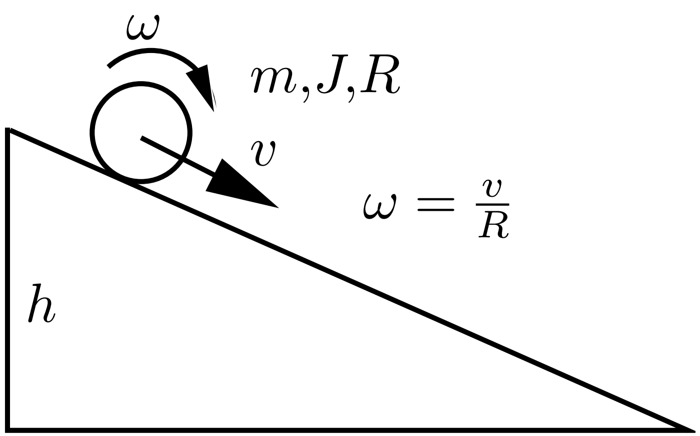
Das Trägheitsmoment eines Zylinders mit homogener Dichte ρ berechnet sich so:



$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^R \mathrm{d}m r^2, \text{ wo } \mathrm{d}m = 2\pi r \mathrm{d}r h\rho, \\
\mathrm{d}J &= \mathrm{d}m r^2 = 2\pi r^3 \mathrm{d}r h\rho, \\
J &= \int \mathrm{d}J = 2\pi h\rho \int_0^R \mathrm{d}r r^3, \\
J &= \frac{\pi}{2} h\rho R^4.
\end{aligned}
$$

Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders ist dann $J = \frac{\pi}{2} h \left(\rho_a R_a^4 - \rho_i R_i^4\right)$.

Bergabrollen von Zylindern: “Bergrennen”

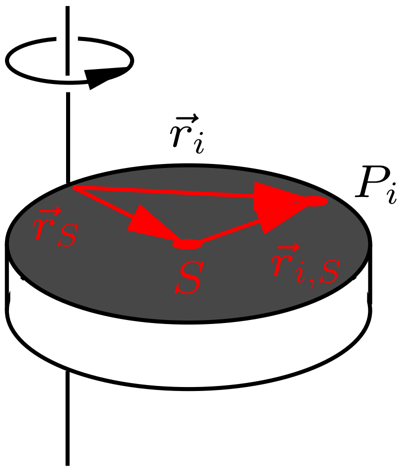


Achtung: Satz von Steiner!

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{pot}} &= mgh, \\
E_{\mathrm{tot}} &= E_{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{rot}}, \\
mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2, \\
&= \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{R^2}\right)v^2, \text{ also} \\
v &= \sqrt{\frac{2mgh}{m + J/R^2}}.
\end{aligned}
$$

Zylinder mit verschiedenen Trägheitsmomenten sind verschieden schnell!

Der Satz von Steiner

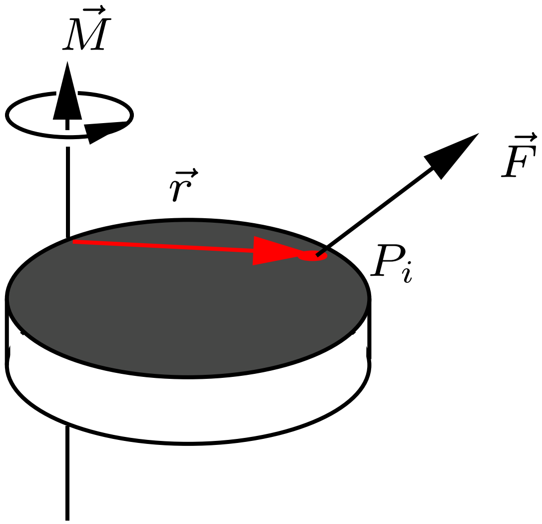


$$\begin{aligned}
\vec{r}_i &= \vec{r}_S + \vec{r}_{i,S}, \\
\vec{r}_i^{\,2} &= \vec{r}_S^{\,2} + \vec{r}_{i,S}^{\,2} + 2\vec{r}_S \cdot \vec{r}_{i,S}, \\
\sum_i m_i r_i^2 &= \sum_i m_i \vec{r}_S^{\,2} + \sum_i m_i \vec{r}_{i,S}^{\,2} + 2\vec{r}_S \cdot \sum_i m_i \vec{r}_{i,S}, \\
&= M\vec{r}_S^{\,2} + J_S + 2\vec{r}_S \cdot \sum_i m_i \vec{r}_{i,S} = M\vec{r}_S^{\,2} + J_S,
\end{aligned}$$

denn $\sum m_i \vec{r}_{i,S} = 0$ nach Definiton des Schwerpunktes.

Satz von Steiner: $J = M r_S^2 + J_S$.

Drehmoment

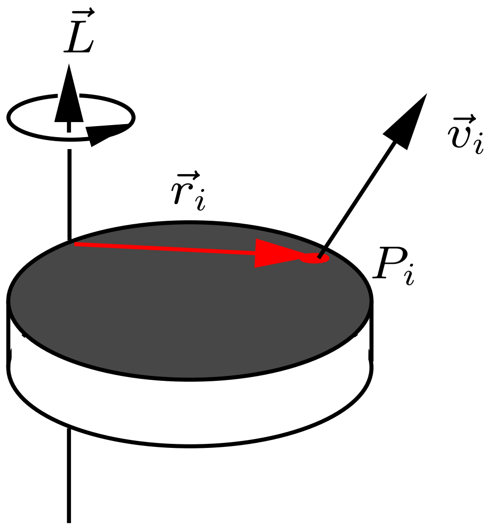


Das **Drehmoment** ist definiert als $\vec{M} \doteq \vec{r} \times \vec{F}$.

Die Einheit des Drehmomentes ist $[M] =$Nm, was dieselbe Einheit ist, wie die der Arbeit (Kraft mal Weg). Trotzdem ist ein Drehmoment nicht dasselbe wie die Arbeit!

Das Drehmoment ist ein Vektor, die Arbeit ist ein Skalar!

Drehimpuls



$$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}$$

Der Impuls $m_i\vec{v}_i$ ändert sich laufend.
Der Drehimpuls $\vec{L}$ ändert sich nicht!

$$\vec{L} \doteq \vec{r} \times \vec{p}$$

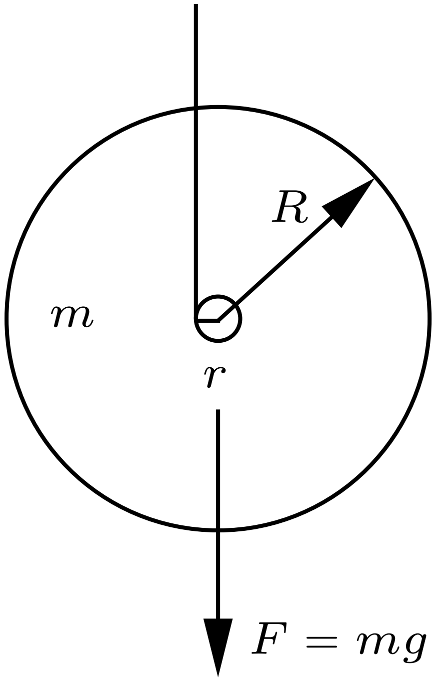
$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$\vec{L} = \sum m_i r^2 \vec{\omega} \text{ weil } \vec{r} \perp \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

Maxwell-Rad oder Jojo



Das Maxwell-Rad ist eine kreisförmige Scheibe, bzw. ein Zylinder mit Masse m und Radius R und hat ein Trägheitsmoment $J = (1/2)mR^2$. Bekannter ist es unter dem Namen Jojo. Es rollt auf einer dünnen Achse (Radius r) an einer Schnur ab. Das heisst, dass an der Abrollstelle ein Drehmoment M wirkt,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{g}.$$

Das Jojo bewegt sich weniger schnell nach unten als eine vergleichbare Masse, die sich nicht um sich selbst dreht, denn

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Der Drehimpuls $\vec{L} = J\vec{\omega}$ wird durch ein angreifendes Drehmoment verändert:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} \implies M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}.$$

Ist das Drehmoment M konstant, so können wir die Drehbewegung integrieren:

$$\varphi = \int\int \frac{M}{J}\mathrm{d}^2 t = \frac{M}{J}\left(\frac{1}{2}t^2 + At + B\right),$$

wo die Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen $\varphi_0 = \varphi(t=0)$ und $\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0$ folgen:

$$\varphi = \frac{M}{2J}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0. \tag{3}$$

Mit welcher Beschleunigung a “fällt” nun das Jojo nach unten? Dazu leiten wir

Glg. 3 zweimal nach der Zeit ab,

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{M}{J}$$

und verwenden

$$a = r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = r\frac{M}{J} = \frac{r^2 mg}{\frac{1}{2}mR^2 + mr^2} = \frac{g}{1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}},$$

wo wir den Satz von Steiner verwendet haben. Die Beschleunigung nach unten ist also – je nach Verhältnis von R/r – deutlich kleiner als g!

Rotierende Systeme: Winkelbeschleunigung

Die Änderung des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ durch ein angreifendes Drehmoment $\vec{M}$,

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

führt bei konstantem Trägheitsmoment (fester Körper!) zu einer Änderung der Rotationsgeschwindigkeit bzw. Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Systems. Diese kann als **Winkelbeschleunigung** $\dot{\omega}$ aufgefasst werden:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\vec{\omega}) = J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = J\dot{\vec{\omega}}, \;\longrightarrow\; \dot{\vec{\omega}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}.$$

Drehmoment II

Wir betrachten 2 Massenpunkte m_1 und m_2, auf die, neben der gegenseitigen Wechselwirkung $\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$, zusätzlich eine äußere Kraft $\vec{F}_1$ bzw. $\vec{F}_2$ wirken soll. Die dazugehörigen Drehmomente bzgl. des Nullpunktes $\vec{0}$ sind

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 &= \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{21}), \\ \vec{M}_2 &= \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{12}) \end{aligned}$$

und das Gesamtdrehmoment lautet

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21}.$$

Die inneren Kräfte $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ wirken aber entlang von $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und deshalb verschwindet der letzte Term. Somit:

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2),$$

das totale Drehmoment ist gleich der Vektorsumme der einzelnen Drehmomente. Insbesondere gilt:

Wirken keine äußeren Kräfte auf das System, verschwindet auch das Drehmoment auf das System.

Drehimpuls II

$$[L] = ML^2/T = \text{kg m}^2/\text{s} = \text{J s}$$

Der Drehimpuls ist quantisiert! D. h. es gibt einen kleinsten Drehimpuls. Nach Heisenberg gilt

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

folglich muss jede Änderung des Drehimpulses mindestens $\hbar$ betragen. $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Js ist sehr klein, weshalb man diesen Effekt im alltäglichen Leben auch nicht bemerkt. Elementarteilchen haben aber einen Eigendrehimpuls, ihren sog. Spin, der in Einheiten von $\hbar$ ausgedrückt wird.

F: Neutron: Spin $= 1/2\hbar$, Proton: Spin $= 1/2\hbar$, Elektron: Spin $= 1/2\hbar$,
B: Photon: Spin $= 1\hbar$, W- und Z-Bosonen: Spin $= 1\hbar$, Graviton: Spin $= 2\hbar$.

Erhaltung des Drehimpulses

Der Drehimpuls des Systems ist gegeben durch

$$\vec{L} = (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{p}_2).$$

Die zeitliche Änderung erhalten wir durch Ableitung nach der Zeit,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \vec{r}_1 \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} \ + \ \vec{r}_2 \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} \quad \text{weil} \quad \vec{v}_i \parallel \vec{p}_i \\
\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) \ + \ (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) = \vec{M}
\end{aligned}$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses relativ zu einem Punkt ist gleich dem Gesamtdrehmoment relativ zum selben Punkt. Insbesondere gilt:

Wirken keine äußeren Kräfte auf das System, bleibt dessen Drehimpuls konstant. $\Longrightarrow$ Drehimpulserhaltung!

Beispiele für die Drehimpulserhaltung

- Pirouette Eiskunstläuferin (`https://www.youtube.com/watch?v=oOHUFNjIxNo`)
- Drehstuhl (Eiskunstlaufen für Faule)
- Drehstuhl mit Rad (cool!)

Erhaltungssätze

Wir haben nun drei **Erhaltungssätze** kennengelernt:

- **Impulserhaltung ($\vec{p} = m\vec{v}$): Der Impuls eines freien Teilchens bleibt erhalten. (Äquivalent zu Newton I)**

- **Energieerhaltung:** Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten. Änderungen von einer Energieform zur anderen sind aber "erlaubt".

- **Drehimpuls** ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$): Der Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems bleibt erhalten.

Interessanterweise entsprechen die drei Erhaltungssätze tiefer liegenden Symmetrien der Natur! (theoretische Mechanik (3-tes Semester)!)

Intermezzo: Erhaltungssätze und Symmetrien[1]

Aus den theoretischen Mechanik greifen wir auf die **Lagrangefunktion** $\mathcal{L}$ für ein System von N Massenpunkten (Teilchen) vor

$$\mathcal{L}(\vec{x},\vec{p}) = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - E_{\rm pot}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N) = E_{\rm kin} - E_{\rm pot}. \tag{4}$$

Wie Sie dort sehen werden, erhält man aus $\mathcal{L}$ den Impuls $\vec{p}$ und die Kraft $\vec{F}$ aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} = m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i, \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial E_{\rm pot}}{\partial \vec{r}_i} = \vec{F}_i.$$

[1] Keine Angst - nicht Prüfungsstoff der Physik I!

Das richtig Nützliche an dieser Formulierung ist, dass man dieser auch gleich die **Bewegungsgleichung** für das System mit erhält, nämlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i}. \tag{5}$$

Und? Ist der Raum homogen, so spielt der genaue Ort des Experimentes keine Rolle. Also muss gelten, dass die Lagrangefunktion nicht vom Ort abhängt,

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} = 0, \xrightarrow{\text{aus Glg. 5}} \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i}\right) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i}\right) \;= 0.$$

Aber mit der Definition von $\mathcal{L}$ in Glg. 4 erhalten wir

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} = \text{const., also } \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p} = \text{const.,}\;\; \textbf{Impulserhaltung}!$$

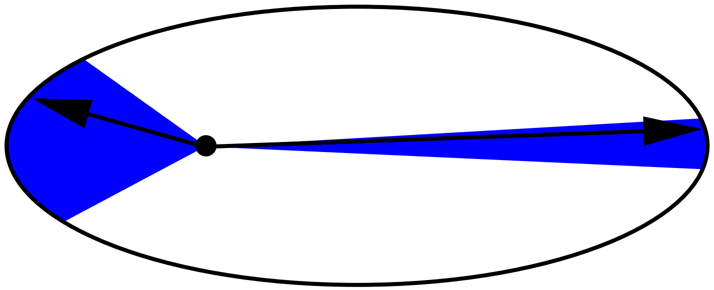
Damit folgt aus der Homogenität des Raumes die Impulserhaltung! Ähnlich folgt aus der Isotropie des Raumes die Drehimpulserhaltung. Aus der Homogenität der Zeit folgt schließlich die Energieerhaltung. Zusammengefasst:

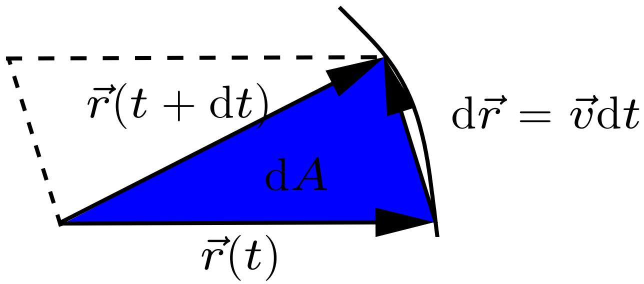
Symmetrie	Erhaltungssatz
Homogenität des Raumes	Impulserhaltung
Homogenität der Zeit	Energieerhaltung
Isotropie des Raumes	Drehimpulserhaltung

Demtröder erklärt das sehr einfach – schauen Sie nach!

Diese "Geschenke der Natur" sollten Sie würdigen und gut verstehen – es sind von den mächtigsten Werkzeugen, die Ihnen zur Verfügung stehen!

Anwendung: Kepler I und II (1609!)





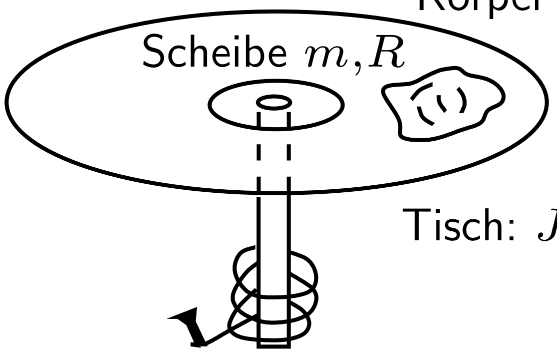
Kepler I: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen. In einem Brennpunkt steht die Sonne.

Kepler II: Der Verbindungsstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = \frac{1}{2m}|\vec{L}|.$$

Damit entspricht das zweite Keplersche Gesetz der Drehimpulserhaltung!

Anwendung II: Bestimmung des Trägheitsmoments



Eine Feder mit Richtmoment D bewirkt ein Drehmoment $M = -D\phi$. Die Bewegungsgleichung für den Drehtisch lautet damit

$$J_0\ddot{\phi} = -D\phi,$$

wo J_0 das Trägheitmoment des Tisches ist. Die Lösung findet man z. B. mit einem Sinus-Ansatz,

$$\phi(t) = a\sin\left(\sqrt{(D/J_0)}t\right), \text{ also } \; T_0 = 2\pi\sqrt{J_0/D}.$$

Das Trägheitsmoment des Tisches finden wir, indem wir eine Scheibe der Masse

m und mit Radius R konzentrisch auf den Tisch legen:

$$J_1 = J_0 + J_{\text{Scheibe}} = J_0 + \frac{1}{2}mR^2, \implies T_1 = 2\pi\sqrt{\left(J_0 + \frac{1}{2}mR^2\right)/D}.$$

Die Differenz $\Delta T^2 = T_1^2 - T_0^2 = 2\pi^2(mR^2)/D$ bestimmt das Richtmoment D. Nun kann ich einen Körper mit unbekanntem Trägheitsmoment J_A auf den Teller legen und dessen Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse über die Schwingungsdauer bestimmen:

$$T_A = 2\pi\sqrt{(J_0 + J_A)/D} \implies J_A = D\frac{T_A^2}{4\pi^2} - J_0.$$

Das Trägheitsmoment des Körpers bzgl. "seiner Achse" findet sich dann über den Satz von Steiner.

Vergleich Translation $\leftrightarrow$ Rotation

Translation	Rotation
Länge L	Winkel ϕ
Masse m	Trägheitsmoment J
Geschwindigkeit v	Winkelgeschwindigkeit ω
Beschleunigung $a = \dot{v}$	Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$
Impuls $\vec{p}$	Drehimpuls $\vec{L}$
Kraft $\vec{F}$	Drehmoment $\vec{M}$
$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}J\omega^2$
Rückstellkraft $\vec{F} = -D\vec{x}$	Rückstelldrehmoment $\vec{M} = -\vec{D}\phi$
Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{m/D}$	Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{J/D}$