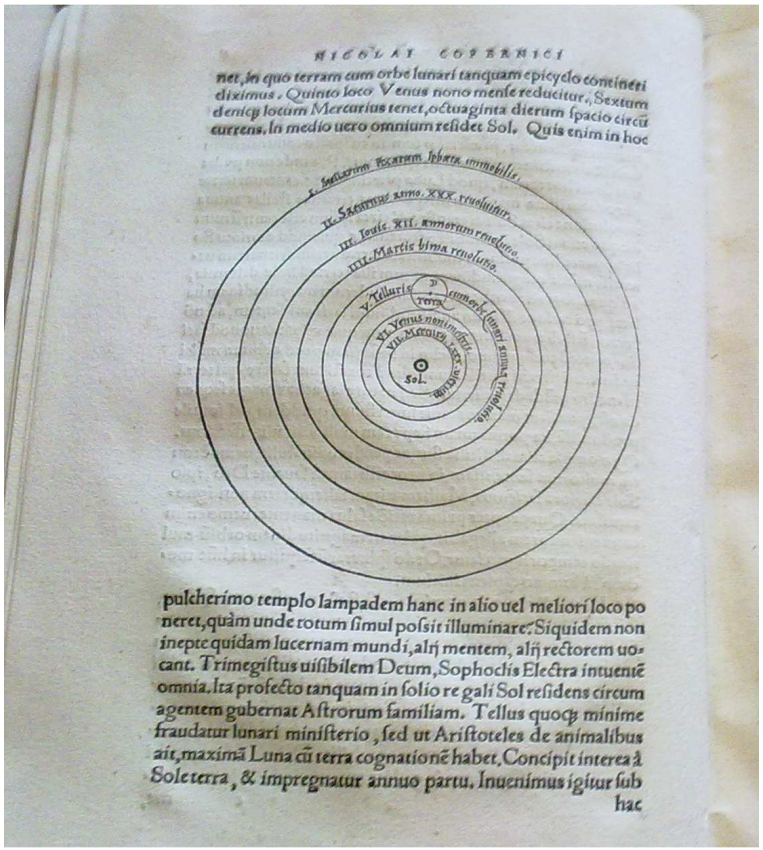
Kopernikus



Die Einordnung der Erde in die himmlischen Gefilde hat Menschen seit Jahrtausenden beschäftigt. Was konnte natürlicher sein, als dass die Erde im Zentrum des Universums steht? Diese Haltung wurde schon vor unserer Zeitrechnung verschiedentlich hinterfragt (Pythagoras, Aristarch von Samos), dennoch setzte sich das Ptolemäische Weltbild über viele Jahrhunderte durch.

Nicolaus Kopernikus begann sein Werk über die Bewegung der Planeten bereits 1506 zu schreiben, publizierte es allerdings erst 1543, kurz vor seinem Tode. Er beschrieb darin ein Weltbild, welches die Sonne ins Zentrum stellte

und einfachere Berechnungen der Planetenbahnen erlaubte. Seine Berechnungen waren zwar nicht genauer, als die bereits bekannten, aber eben einfacher.

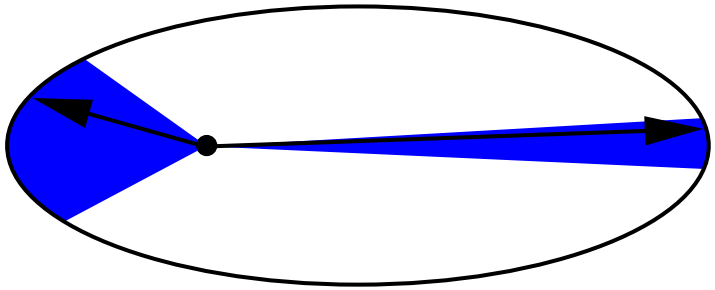
Galileo Galilei konnte die Planeten erstmals mit dem gerade erfundenen Teleskop beobachten und fand heraus, dass die Venus Phasen wie der Mond hat, und dass die Sonne rotiert und Flecken hat. Erst jetzt wurden Äusserungen, dass die Planeten um die Sonne kreisen, für die Kirche problematisch. Galileo vertrat die "heliozentrische" Meinung, 1616 wurde ihm durch die Inquisition verboten, diese Meinung in Wort oder Schrift zu verbereiten. Ironischerweise verwendete die katholische Kirche ab 1618 die kopernikanische Ansicht für kalendarische Berechnungen; Kopernikus Werk "De Revolutionibus" blieb bis 1758 verboten.

Johannes Kepler war ein Verfechter des Kopernikanischen Weltbildes, konnte aber die sehr genauen Messungen von Tycho Brahe[1] nicht mit kreisförmigen Planetenbahnen vereinen.

[1] der seinerseits das Kopernikanische Weltbild verneinte.

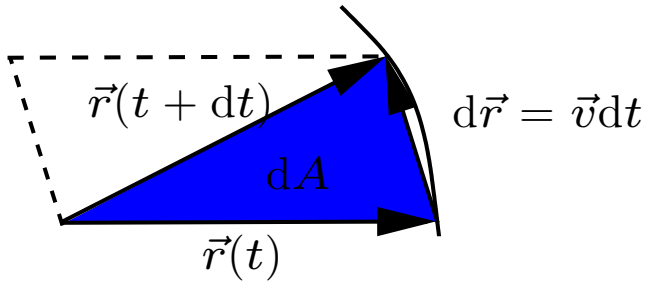
Die Keplerschen Gesetze I und II

Kepler verwendete die sehr genauen Beobachtungen von Tycho Brahe um seine Gesetze zu formulieren:



Kepler I: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen. In einem Brennpunkt steht die Sonne.

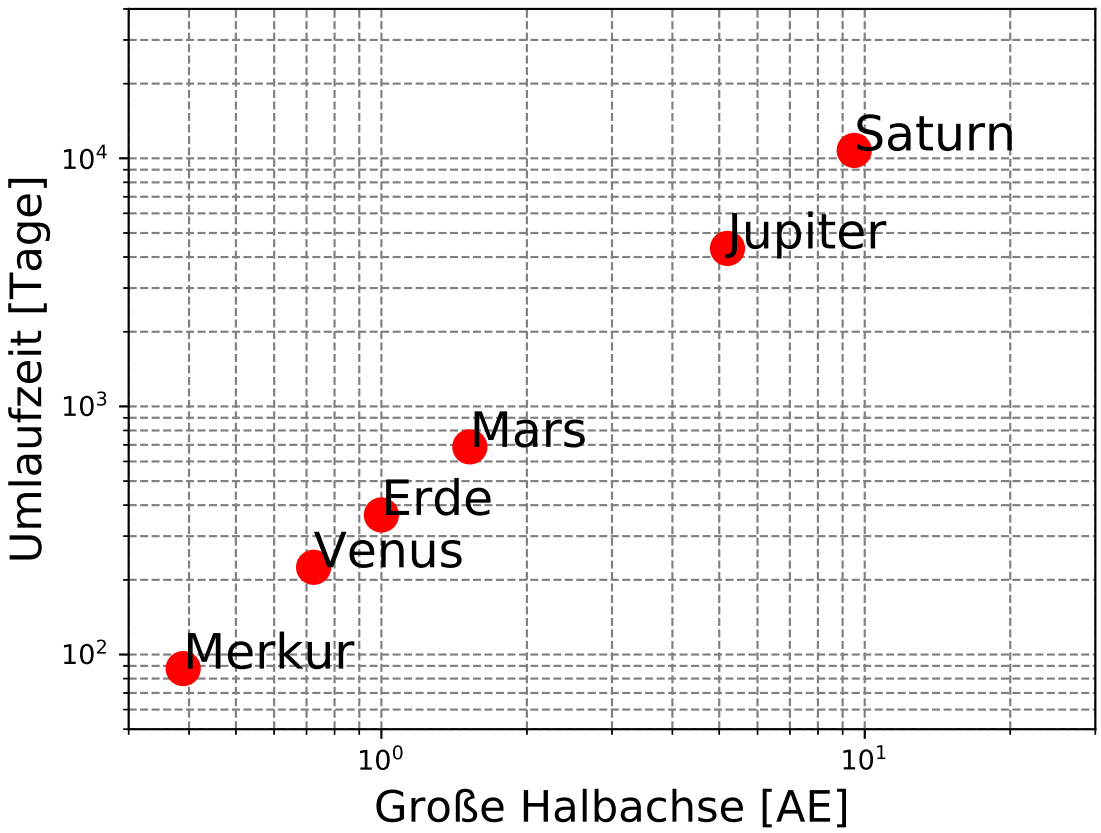
Kepler II: Der Verbindungsstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.



$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{v}) = \frac{1}{2m}|\vec{L}|.$$

Damit entspricht das zweite Keplersche Gesetz der Drehimpulserhaltung.

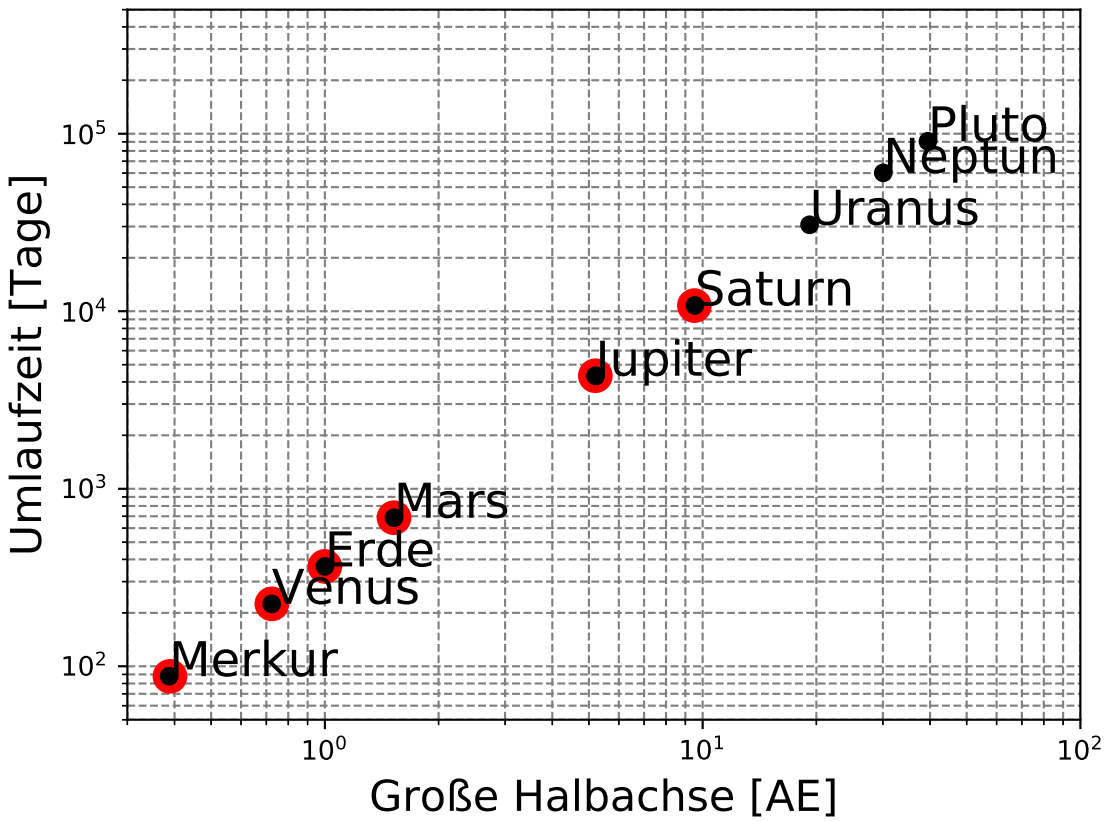
Die Keplerschen Gesetze III



Kepler III: Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{T_i^2}}{\mathrm{a_i^3}} = \mathrm{const.}$$

In der Abbildung links sind alle Kopernikus bekannten Planeten rot dargestellt, wie auch in den folgenden zwei Abbildungen.

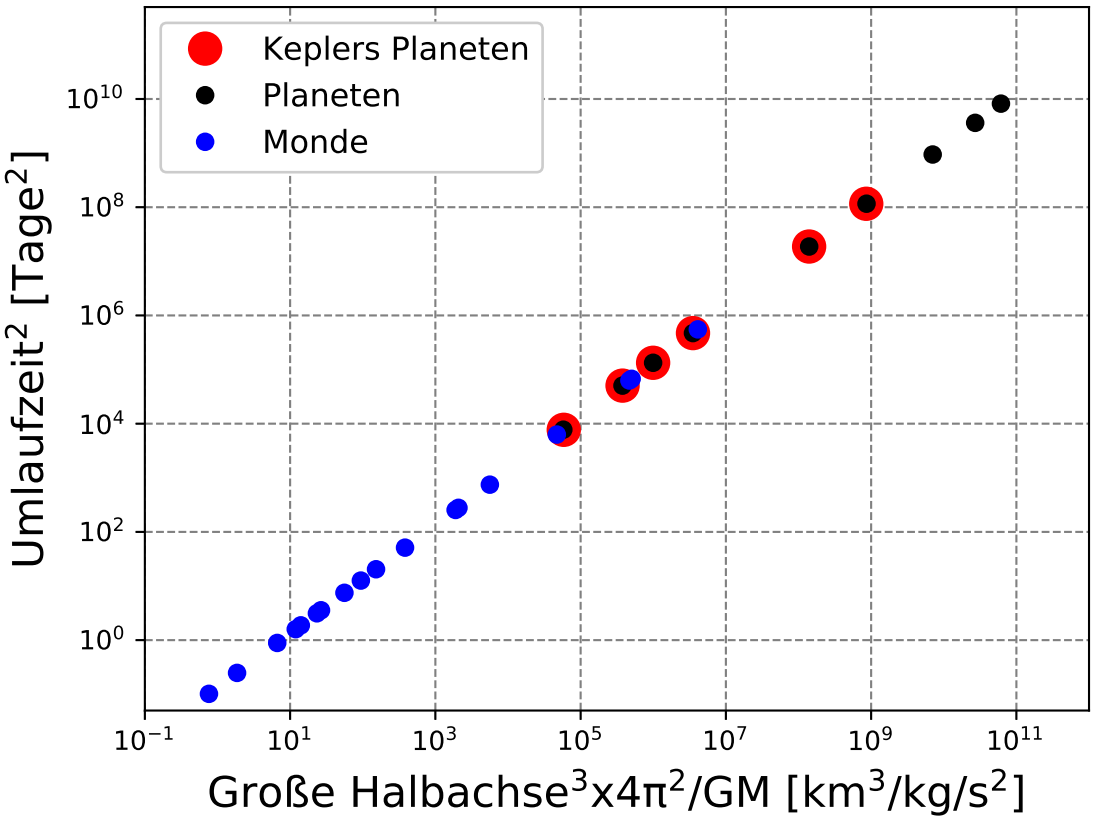


Man kann nun auch alle heute bekannten Planeten in derselben Art und Weise darstellen, dies ist nebenan gezeigt. In dieser doppelt-logarithmischen Darstellung liegen alle Planeten[2] auf einer Geraden. Dabei können wir deren Steigung bestimmen.

Übung: Bestimmen Sie die Steigung der Geraden!

Frage: Handelt es sich bei dieser Kurve um eine Gerade?

[2] Streng genommen handelt es sich bei Pluto nicht um einen Planeten, sondern einen Zwergplaneten. Sorry Pluto!



Ja man kann nun sogar alle Monde des Sonnensystems in einer ähnlichen Graphik darstellen.

Frage: Was ist anders als in den beiden vorherigen Darstellungen?

"Aufgabe": Nutzen Sie die entsprechenden Dateien[3] um sich selber eine solche Abbildung zu erstellen!

[3] Wie immer: `http://www.ieap.uni-kiel.de/et/people/wimmer/teaching/PhysI/`

Die Gravitation

Newton hat erkannt, dass die Keplerschen Gesetze aus derselben Kraft folgen, die auch Äpfel im Fallen beschleunigt. Die Gravitation wirkt zwischen zwei Körpern mit Massen m_1 und m_2.

Aus Kepler I und II bzw. der Drehimpulserhaltung folgt, dass es sich dabei um ein zentrales Kraftfeld handeln muss.

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{\vec{r}}$$

Feld: Jedem Punkt im Raum ist eine Größe zugeordnet, z. B. die Temperatur $\longrightarrow$ Temperaturfeld. Ist jedem Punkt ein Vektor zugeordnet, wie z. B. die Gravitationskraft, so handelt es sich um ein Vektorfeld. Ein Temperaturfeld ist ein skalares Feld.

Die Gravitationskraft wirkt proportional zur Masse eines Körpers, die Gravitation muss ferner, nach Newton III, gleich stark auf Körper 1 wirken, wie auf Körper 2 ("actio = reactio"), also

$$\vec{F}_G = Gm_1m_2f(r)\hat{\vec{r}},$$

wo $G \approx 6{,}673(10) \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$ die schwierig zu bestimmende Gravitationskonstante ist (siehe Seite 12).

Entlang einer Planetenbahn wirkt die Gravitation als Zentripetalkraft, sie hält den Planeten auf seiner Bahn (beschleunigte Bewegung!)

$$Gm_iM_\odot f(r_i) = m_i\omega_i^2 r_i, \text{ wo wegen Kepler III } \quad \omega_i^2 \propto T_i^{-2} \propto r_i^{-3}$$

und folglich $f(r_i) \propto r_i^{-2}$. Die Masse des Zentralkörpers wird hier als die der Sonne, $M_\odot$ angenommen. $\odot$ ist das astronomische Zeichen für die Sonne.

Das Newtonsche Gravitatonsgesetz

Damit lautet das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$\boxed{\vec{F}_G(\vec{r}) = -G\frac{m\ M_\odot}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},}$$

wo $G \approx 6{,}673(10) \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$ im Experiment von Cavendish (siehe Seite 12) bestimmt wird.

Das Newtonsche Gravitatonsgesetz und Kepler III

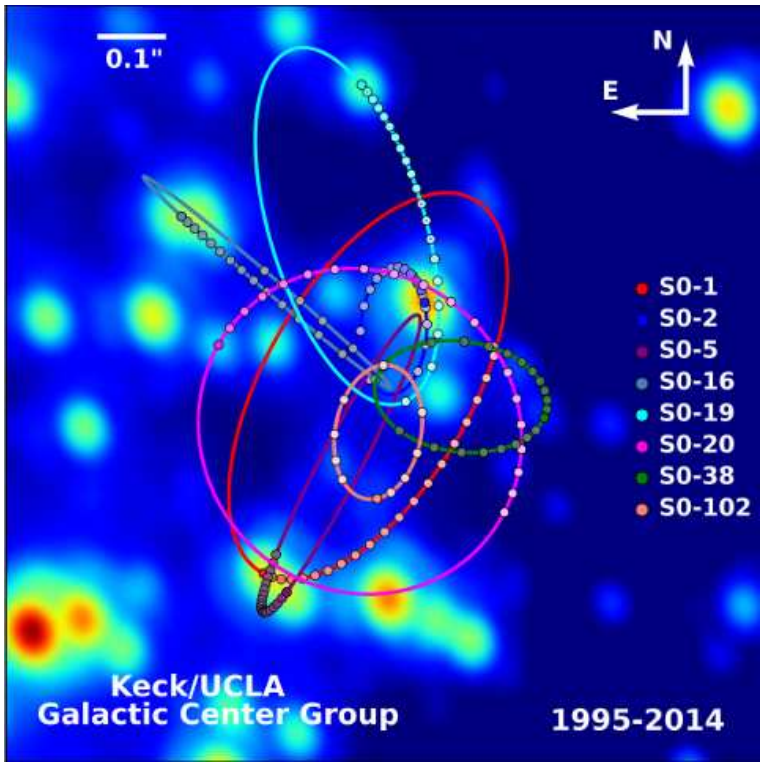
Das Newtonsche Gravitatonsgesetz und Kepler III lauten

$$F = -G\frac{mM}{r^2} \quad \text{und} \quad \frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

Die Rolle der Zentripetalkraft bei Planetenbahnen wird durch die Gravitation übernommen.

$$G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r \quad \xrightarrow{\omega=2\pi/T} \quad GM = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^3 \quad \Longrightarrow \quad T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} r^3.$$

Bei bekanntem G kann aus den Umlaufszeiten von Planeten und ihren Abständen vom Zentralgestirn (z. B. Sonne) dessen Masse bestimmt werden.

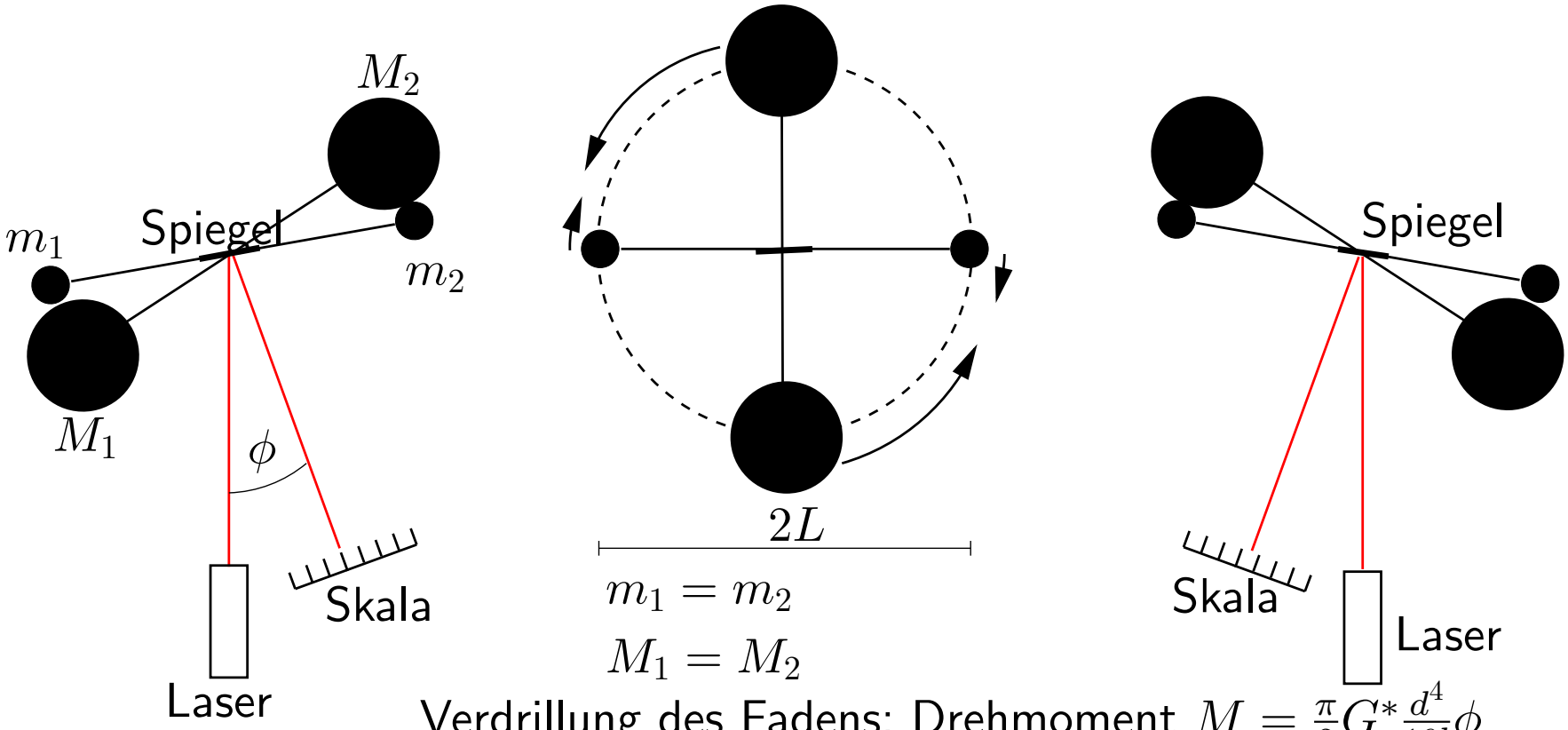


Man kann dies aber auch ausnutzen, um die Masse des supermassiven schwarzen Loches im Zentrum der Galaxie zu bestimmen. Stark vereinfacht haben Ghez und ihre MitarbeiterInnen über mehr als 20 Jahre lang die Bahnen von Sternen in der Nähe des Zentrums der Galaxie verfolgt. Nachdem sie die Bahnhalbachsen und Umlaufsperioden von zwei Sternen S0-2 und S0-102 (15,56 und 11,5 Jahre) bestimmt hatten, konnten sie die Masse des zentralen schwarzen Loches zu $4.1 \pm 0.6 \cdot 10^6 M_\odot$ bestimmen[4]. Nobelpreis 2020[5]!

[4] Die Abb. stammt von `http://www.astro.ucla.edu/~ghezgroup/gc/blackhole.html`, wo auch weiterführende Artikel zitiert werden.

[5] `https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2020/press-release/`

Messung von G mit der Drehwaage von Cavendish



Verdrillung des Fadens: Drehmoment $M = \frac{\pi}{2} G^* \frac{d^4}{16l} \phi$

Gleichgewicht des rücktreibenden Drehmomentes M und des durch die Gravitation

ausgeübten Drehmomentes $M_G = 2F_G L$, wo

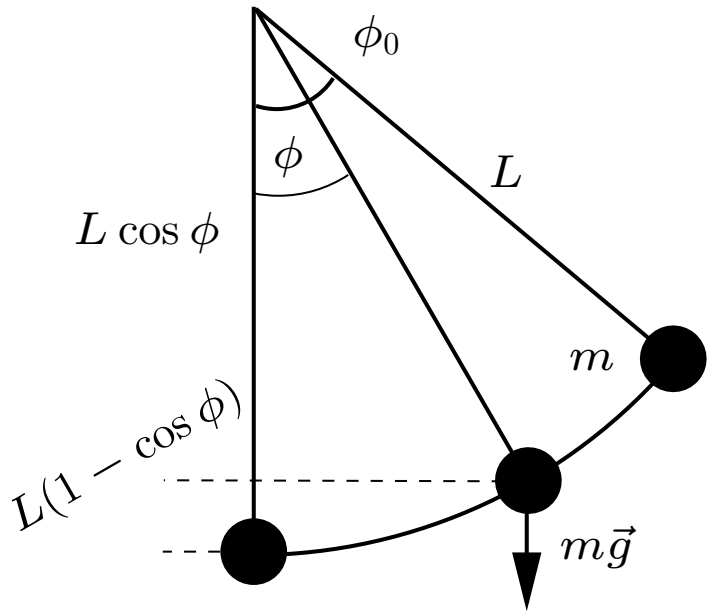
$$F_G = G\frac{mM}{r^2} = G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \rho^2 r_i^3 R_i^3 \frac{1}{r^2}.$$

Die Gravitationskonstante kann nun ermittelt werden:

$$\begin{aligned} G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \rho^2 r_i^3 R_i^3 \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{2L}\frac{\pi}{2} G^* \frac{d^4}{16l}\phi \\ G &= \frac{9G^*}{64\pi}\frac{r^2 (d/2)^4}{lL\rho^2 r_i^3 R_i^3}\phi \end{aligned}$$

wo G^* der Torsionsmodul, l die Länge und d der Durchmesser des Fadens sind (siehe später).

Bestimmung von g



Die Bewegungsgleichung für das Pendel lautet:

$$mg\sin\phi = -mL\ddot{\phi}.$$

Diese nichtlineare Differentialgleichung kann durch Reihenentwicklung gelöst werden:

$$\sin\phi \approx \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \ldots$$

Die nichtlinearen Terme können für kleine ϕ vernachlässigt werden. Damit

$$mg\phi = -mL\ddot{\phi}. \quad \textbf{Was für eine Gleichung ist dies?}$$

Dies ist eine **Schwingungsgleichung** mit der Lösung

$$\phi(t) = A \sin(\sqrt{g/L}\, t), \text{ wo die Schwingungsdauer } T = 2\pi\sqrt{L/g}.$$

Für große Winkel ist eine vertiefte mathematische Arbeit erforderlich, die im Demtröder erläutert wird. Die Lösung ist ein sog. elliptisches Integral:

$$T = 4\sqrt{L/g} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \xi}}, \text{ wo } \quad K = \sin(\phi_0/2)$$

und ϕ_0 der Anfangswert für ϕ ist.

Potentielle Energie im Gravitationsfeld

Wir können einfach die potentielle Energie einer Masse m im Gravitationsfeld einer Masse M berechnen. Die Arbeit A, die erforderlich ist, um einen Körper vom Abstand r_0 in einen Abstand r_1 zu bringen ist

$$A = \text{Kraft} \times \text{Weg} = -GMm \int_{r_0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Die erforderliche Arbeit, um einen Körper unendlich weit wegzubringen, ist daher

$$A = -GMm \frac{1}{r_0}.$$

Das Gravitationspotential

Die Arbeit pro Masse, die aufgewendet werden muss, um einen Körper ins Unendliche zu befördern, wird **Potential** U genannt.

$$U = -GM/r$$

Dass der Nullpunkt im Unendlichen liegt, ist Konvention[6]. Die Gravitationskraft kann als "Steigung" des Potentials gedeutet werden:

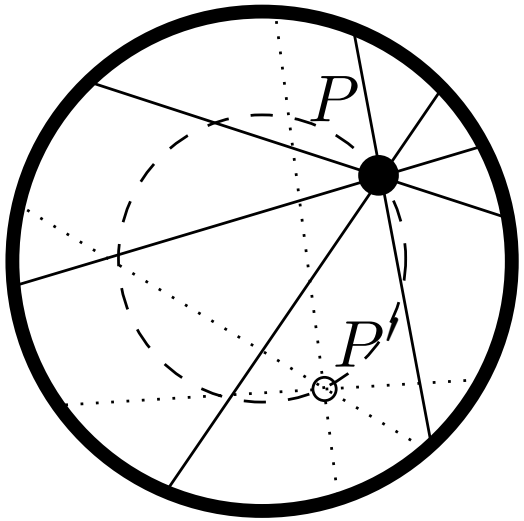
$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}U = -\vec{\nabla}U\mathrm{d}\vec{r},$$

wo der Differentialoperator $\vec{\nabla}$ der sogenannte Gradient ist,

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{und damit} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U. \tag{1}$$

[6]Damit sind Bahnen mit positiver Energie ungebunden, solche mit negativer Energie gebunden.

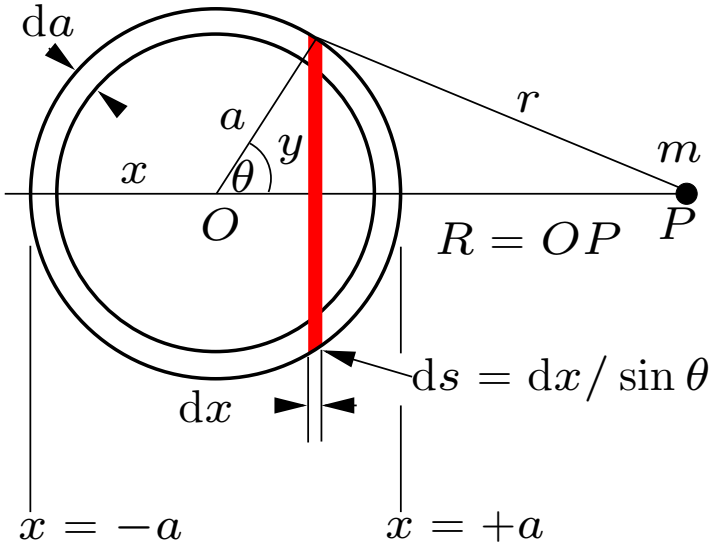
Das Potential innerhalb einer Hohlkugel



Durch die gestrichelte Kugelfläche müssen gleich viele Feldlinien hinein- wie hinausführen. Auf jeden Punkt P muss wegen der Kugelsymmetrie dieselbe Kraft wirken. Dies ist nur erfüllt, wenn gar keine Feldlinien durch die Kugeloberfläche stoßen, also auf P und P' keine Kraft wirkt. Im Inneren der Kugel wirken deshalb keine Kräfte, d. h. das Potential ist konstant.

Man kann das auch anders verstehen. Die Anziehungskraft der Hohlkugel ist für jedes Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ gleich, egal in welche Richtung es zeigt. Zeigt es vom Punkt P nach rechts, so "sieht es" die Fläche $A_1 = r_1^2 \mathrm{d}\Omega$, zeigt es nach links, so "sieht es" die Fläche $A_2 = r_2^2 \mathrm{d}\Omega$. Ist die Kugelfläche homogen, so ist das Verhältnis $M_1/r_1^2 = \rho A_1/r_1^2 = \rho A_2/r_2^2 = \rho =$ const. Weil $\mathrm{d}\Omega_1 \doteq A_1/r_1^2 = \mathrm{d}\Omega_2 = A_2/r_2^2$ verschwindet die resultierende Kraft am Punkt P.

Das Potential außerhalb einer Kugel



Der rot angedeutete Kreisring mit homogener Massendichte hat vom Punkt P überall denselben Abstand r. Seine Masse beträgt

$$\mathrm{d}M = 2\pi\rho y \mathrm{d}s\mathrm{d}a = 2\pi\rho a \mathrm{d}x\mathrm{d}a$$

weil $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x/\sin\vartheta$ und $y = a\sin\vartheta$. Die potentielle Energie einer kleinen Probemasse m im Punkt P ist dann

$$\mathrm{d}E_P = -G\frac{m\mathrm{d}M}{r}.$$

Das Gravitationsfeld einer Hohlkugel mit Radius a und Dicke $\mathrm{d}a$ im Punkte P berechnet sich nun als das Integral über alle Kreisringe mit Dicke $\mathrm{d}a$ und Radius

a.

$$E_p = -G\ 2\pi\ \rho\ a\ \mathrm{d}a\ m\ \int_{-a}^{+a} \frac{\mathrm{d}x}{r}.$$

Nun gilt ja

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (R-x)^2 = y^2 + x^2 + R^2 - 2Rx, \\ &= a^2 + R^2 - 2Rx, \text{ und damit } \mathrm{d}r/\mathrm{d}x = -R/r. \end{aligned} \tag{2}$$

Mit Glg. 2 erhalten wir für den Beitrag einer Kugelschale

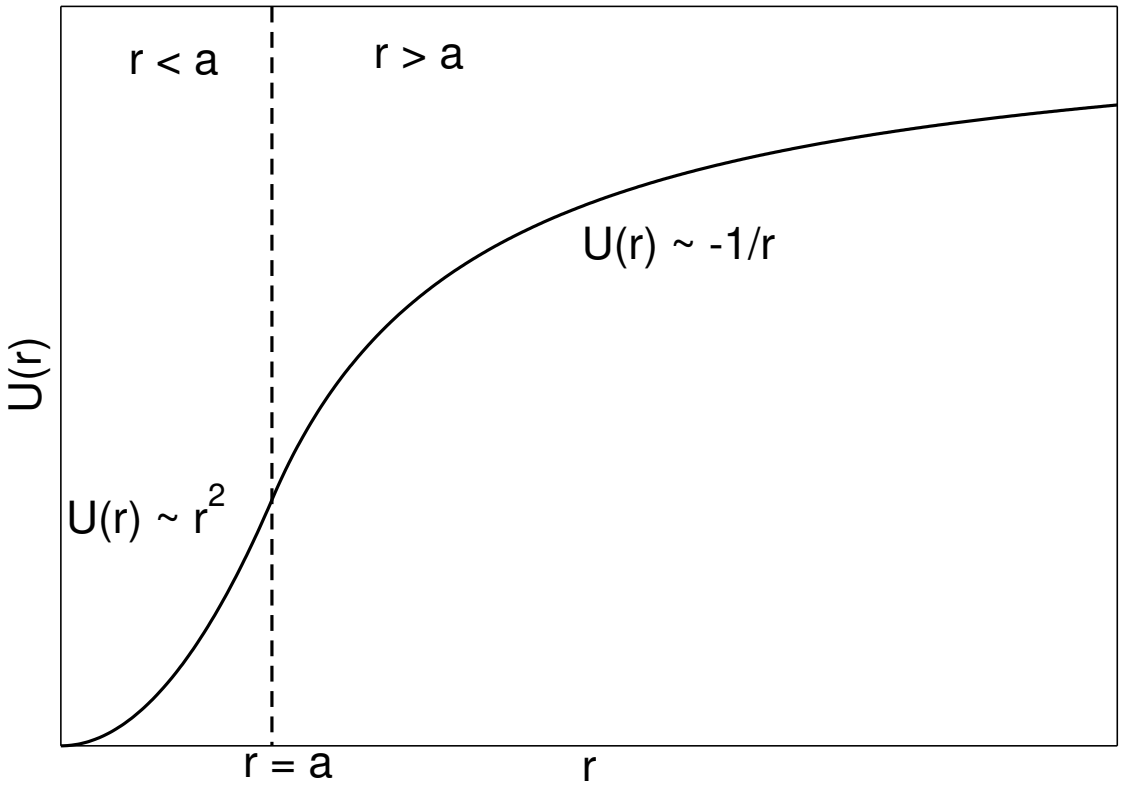
$$E_P = \frac{2\pi\ \rho\ a\ \mathrm{d}a\ m}{R} G \int_{R+a}^{R-a} \mathrm{d}r = -G\frac{mM}{R}, \text{ weil } M = 4\pi\rho a^2 \mathrm{d}a \tag{3}$$

die Masse der Kugelschale ist. Die Gravitationskraft ist folglich

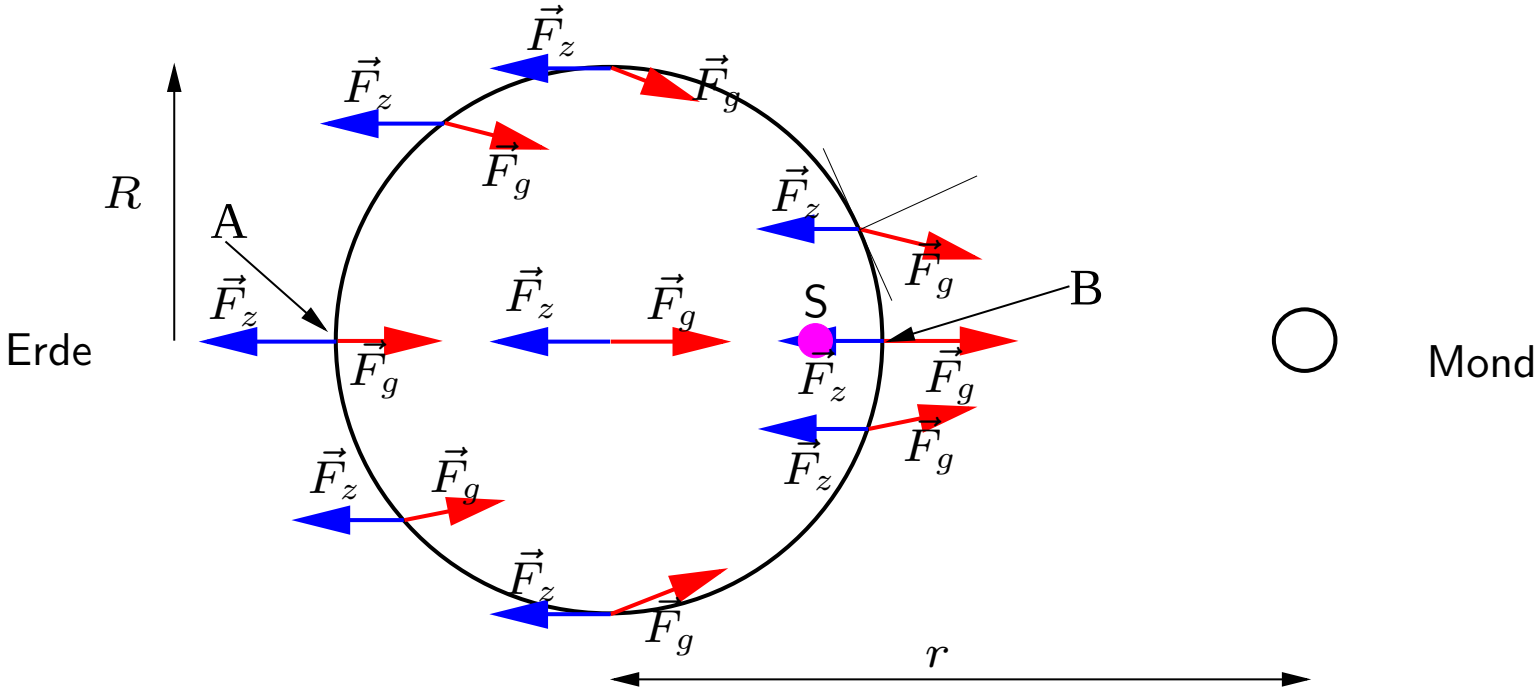
$$\vec{F}_G = -\vec{\nabla} E_P = -\frac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}R} = -G\frac{mM}{R^2}\hat{\vec{r}}.$$

Zusammenfassend können wir also sagen, dass

- das Potential im Inneren einer homogenen Hohlkugel verschwindet,
- das Potential außerhalb einer homogenen Kugel der Masse M dasselbe ist, wie das einer Punktmasse M im Zentrum der Kugel.
- Weil die Masse einer Kugelschale quadratisch mit ihrem Radius zunimmt, sieht das Potential innerhalb und außerhalb einer homogenen Vollkugel mit Radius a wie auf der nächsten Seite aus.


r < a
r > a
U(r) ~ -1/r
U(r)
U(r) ~ r^2
r = a
r

Anwendung I: Die Gezeiten



Im Erdmittelpunkt (und nur dort!) heben sich die Gravitationskraft $\vec{F}_G$ und die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$ gerade auf, also $\vec{F}_G = -\vec{F}_Z$.

Die Richtung und der Betrag der Zentrifugalkraft sind also bekannt ($-\vec{F}_G$), die/der der Gravitationskraft in jedem Punkt auch. Für die Punkte A und B lautet die durch den Mond auf einen Massenpunkt der Masse m ausgeübte Kraft

$$\vec{F}_A = -G\frac{mM_M}{(r+R)^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{bzw.} \quad \vec{F}_B = -G\frac{mM_M}{(r-R)^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Es ergibt sich somit eine resultierende Kraft

$$\Delta\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_Z = \vec{F}_G(r_A) - \vec{F}_G(r_0), \text{ oder } \Delta\vec{F} = \vec{F}_G(r_B) - \vec{F}_G(r_0),$$

die wir nun berechnen können.

$$\begin{aligned}\Delta\vec{F}_A &= -G\frac{mM_M}{r^2}\left(\frac{1}{(1+R/r)^2}-1\right)\frac{\vec{r}}{r},\\ &\approx G\frac{2mM_M}{r^3}\frac{R\vec{r}}{r} = 2\vec{F}_G(r)\frac{R}{r},\end{aligned}$$

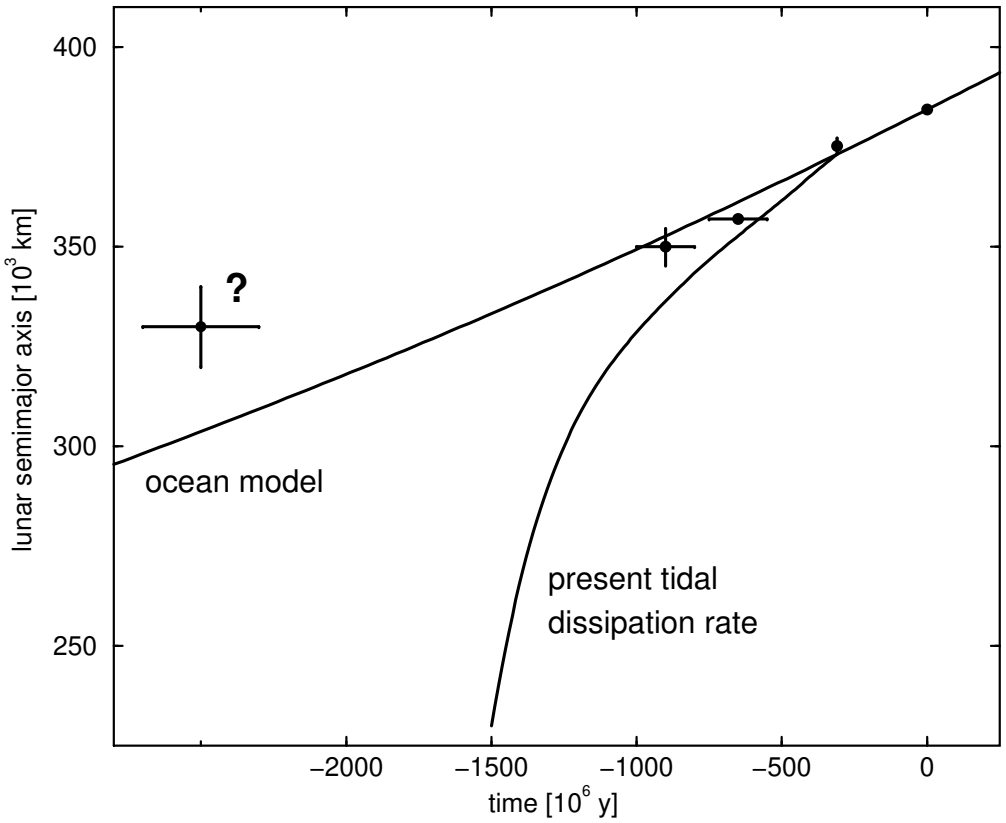
weil $(1+R/r)^2 \approx 1-2R/r$. Die Beschleunigung in den Punkten A oder B ist sehr klein,

$$a = \frac{\Delta F}{m} = 1.1\cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Trotzdem führt diese kleine Kraft zum Auftreten der Gezeiten[7].

[7] Siehe z.B. `https://www.norddeich.de/service/nordsee-urlaub-planen/gezeiten-in-norddeich/`

Anwendung II: Abstand Erde-Mond



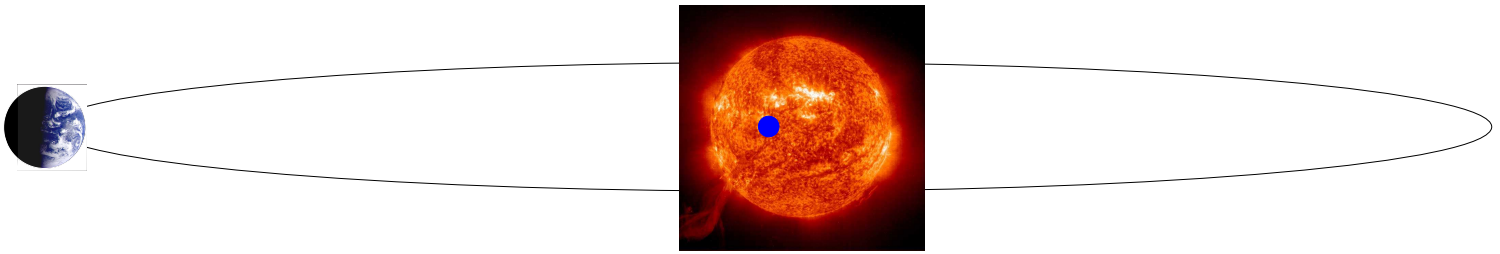
Die schnelle Erdrotation führt über die Reibung zu einer leichten Beschleunigung der Flutwelle gegenüber der Mondlage. Diese eilen dem Mond also leicht voraus, was zu einem Drehmoment auf die Erde führt, welches ihren Drehimpuls verringert. Im System Erde-Mond muss er aber ehalten bleiben, weshalb der Mond ihn übernimmt (über die leichte Gravitationskraft der Flutwelle!). (Nach Bills und Ray, (1999))

Bewegung von zwei Körpern

Nun ist also das Gravitationsgesetz bekannt und die erforderliche Konstante G gemessen. Man kann den Spieß jetzt umdrehen und z. B. die Planetenbahnen aus dem Gravitations- und Impulserhaltungsgesetz herleiten.

Unterschied: Wir erkennen, dass die Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt verläuft! Bahnen können auch Hyperbeln oder Parabeln sein!

Allgemein: Bahnen sind Kegelschnitte (Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln)



Fluchtgeschwindigkeiten

Als Anwendung des Potentialbegriffs untersuchen wir die Mindestgeschwindigkeit, die eine Rakete haben muss, um die Erde zu verlassen.
An der Erdoberfläche wirkt die Kraft $mg = -GMm/r_{\mathrm{E}}^2$, also $g = -GM/r_{\mathrm{E}}^2$. Die Beschleunigung auf einen Körper der Masse m ist folglich

$$a = -GM/r^2, \quad \text{wo} \quad r \quad \text{der Abstand zum Erdmittelpunkt ist.}$$

Wir schreiben nun

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} v,$$

und damit

$$v \cdot \mathrm{d}v = a \cdot \mathrm{d}r = -GM/r^2 \mathrm{d}r \quad \xrightarrow{\text{Integration}} \quad \frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + C, \tag{4}$$

wo C die Integrationskonstante ist.

Fluchtgeschwindigkeiten II

Wir lösen das Problem nun für einen senkrechten "Abschuss" mit (senkrechter) Anfangsgeschwindigkeit v_0 an der Erdoberfläche (Radius $R_\oplus$).

$$C = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R_\oplus} = \frac{1}{2}v_0^2 - gR_\oplus, \quad \text{weil} \quad g = GM/R_\oplus^2.$$

Wir setzen dies nun in Glg. 4 ein und erhalten

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2}v_0^2 - gR_\oplus \; = \; \frac{gR_\oplus^2}{r} + \frac{1}{2}v_0^2 - gR_\oplus.$$

Bei der maximalen Steighöhe $r = r_{\max}$ wird $v = 0$ sein, woraus wir diese Höhe bestimmen können:

$$r_{\max} = \frac{R_\oplus}{1 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{gR_\oplus}}.$$

Dieser Ausdruck wird für $v_0 = \sqrt{2R_\oplus g}$ gleich unendlich, d.h. ein Körper, der die Erde mit dieser Geschwindigkeit verlässt, kann unendlich weit* fliegen! Wir setzen noch den Ausdruck für die Erdbeschleunigung ein und erhalten

$$v_\oplus = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2\frac{GM}{R_\oplus^2}R_\oplus} = \sqrt{\frac{2GM}{R_\oplus}} = 11{,}2 \text{ km/s}$$

wo M die Erdmasse ist.

Ein Problem ist natürlich, dass 11,2 km/s ziemlich schnell ist.

***Aber wirklich: unendlich weit?**

Fluchtgeschwindigkeiten III

Die soeben gefundene Fluchtgeschwindigkeit heisst **zweite Fluchtgeschwindigkeit** oder **zweite kritische Geschwindigkeit**. Um das Gravitationsfeld der massiven Sonne überwinden, muss eine Rakete natürlich noch schneller sein:

$$v_\odot = \sqrt{2GM_\odot/R} = 617{,}284 \text{ km/s}$$

Aber halt, das ist die Geschwindigkeit, die eine Raumsonde braucht um **von der Oberfläche der Sonne aus** das Sonnensystem zu verlassen. Von der Erdumlaufbahn bei einer astronomischen Einheit (AE) aus ($R = 1$ AE) braucht sie

$$v_E = \sqrt{2GM/R_E} = 42{,}07 \text{ km/s}.$$

Man nennt dies die **dritte Fluchtgeschwindigkeit** oder **dritte kritische Geschwindigkeit**.

Fluchtgeschwindigkeiten IV

Die **erste Fluchtgeschwindigkeit** oder **erste kritische Geschwindigkeit** ist die Geschwindigkeit, die ein Körper braucht, um gerade die Erde zu umkreisen, also die Geschwindigkeit, mit der eine stabile Kreisbahn möglich ist. Dazu muss die Zentrifugalkraft auf das kreisförmig bewegte (also beschleunigte) Raumschiff gerade die Gravitationskraft kompensieren, also

$$\frac{mv_1^2}{R_\oplus} = \frac{GMm}{R_\oplus^2} \quad \text{und damit} \quad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_\oplus}}$$

für ein "Raumschiff", welches haarscharf über der Erdoberfläche um die Erde saust. Bei tangentialem Abschuss reicht diese Geschwindigkeit, bei Vernachlässigung der Reibung, gerade aus, damit die Rakete nicht auf den Erdboden zurückfällt.

Verbesserte Formulierung des Gravitationgesetzes

Der Schwerpunkt Erde-Sonne oder Erde-Mond bleibt kräftefrei, d. h. dass sich die Bewegung der Erde und Sonne unterteilen lässt in Bewegung des Schwerpunktes und eine überlagerte Bewegung des Planeten. Wir hatten in V4 (S. 32) schon gesehen, dass man dieses Problem am besten mit der reduzierten Masse μ behandelt,

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GMm\vec{r}}{r^2}\frac{}{r}.$$

Die Bewegung ist gleich der Bewegung eines Satelliten der reduzierten Masse $\mu = Mm/(M+m)$ um die im Schwerpunkt festgehaltene Masse $\mathcal{M} = M + m$. Beide Körper bewegen sich auf Ellipsen; der Schwerpunkt des Systems sitzt im gemeinsamen Brennpunkt. Wir diskutieren im Folgenden, wie man diese Fragestellung behandelt.

Wiederholung: Bewegung zweier Teilchen im Schwerpunktsystem

Nach Voraussetzung wirken keine äußeren Kräfte auf das System, d. h. es wirken nur die inneren Kräfte $\vec{F}_{12}$ und $\vec{F}_{21}$. Beispiel: Zentralstern mit nur einem Planeten.

$$\vec{F}_{12}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = m_1\ddot{\vec{x}}_1, \qquad (5) \qquad\qquad \vec{F}_{21}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = m_2\ddot{\vec{x}}_2, \qquad (6)$$

Wir bilden nun die Summe und die Differenz dieser beiden Gleichungen.

$$(5)+(6) = m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2 = 0, \quad (7) \qquad\qquad (5)-(6) = m_1\ddot{\vec{x}}_1 - m_2\ddot{\vec{x}}_2, \quad (8)$$

Nach Newton 3 verschwindet $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$. Mit der Definition von $\vec{R}$ (der Ort des Schwerpunktes) kann ich Glg.7 schreiben als

$$\vec{R} \doteq \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \Longrightarrow m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2 = (m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = 0. \qquad (9)$$

Wir haben also aus den Gleichungen 5 und 6 eine Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt isoliert. Aus der Differenz der Gleichungen 5 und 6 isolieren wir nun eine Gleichung, welche die Relativbewegung der beiden Massenpunkte beschreibt. Ich definiere den Vektor $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, der von m_2 zu m_1 zeigt. Die Beschleunigung, die der eine Körper auf den anderen auswirkt, ist

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}, \text{ weil } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Die Summe der beiden Kräfte $\vec{F}_{12}$ und $\vec{F}_{21}$ ist nichts anderes als die Gesamtkraft,

die auf den Schwerpunkt wirkt, und die verschwindet nach Voraussetzung, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. $\ddot{\vec{r}}$ stellt die Änderung der Relativgeschwindigkeit zwischen den Körpern 1 und 2 mit der Zeit dar. Mit der Definition der reduzierten Masse μ kann eine besonders einfache Bewegungsgleichung gefunden werden

$$\mu \doteq \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \implies \vec{F}_{12} = \mu \ddot{\vec{r}}. \tag{10}$$

Dieses Problem ist nun mathematisch einfach zu behandeln. Es beschreibt die Bahn eines Körpers der Masse μ im Gravitationspotential eines massiveren Körpers der Masse $M = m_1 + m_2$. Wenn ich dann die Lösung für $\vec{r}$ gefunden habe, kann ich die Bahn der Körper 1 und 2 wiederum schreiben als (Übung!)

$$\vec{x}_1(t) = \vec{R}(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}(t), \tag{11}$$

$$\vec{x}_2(t) = \vec{R}(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}(t). \tag{12}$$

Mathematische Behandlung

Wir haben also nur noch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu lösen, allerdings auch in zwei Dimensionen. Dies ist heute selbst mit einfachen PCs ohne weiteres möglich. Die zu lösende Differentialgleichung lautet also

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}^2|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad \text{wo} \quad \vec{r} \doteq \vec{x}_1 - \vec{x}_2. \tag{13}$$

Effektiv haben wir also "gleichzeitig" zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu lösen:

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 r_x}{\mathrm{d}t^2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}^2|} \frac{r_x}{|\vec{r}|},$$

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 r_y}{\mathrm{d}t^2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}^2|} \frac{r_y}{|\vec{r}|}.$$

Das in solchen Fällen bewährte Lösungsschema besteht nun darin, dass man jede dieser Differentialgleichungen zweiten Grades in zwei Differentialgleichungen ersten Grades überführt:

$$\frac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t} = v_x, \tag{14}$$

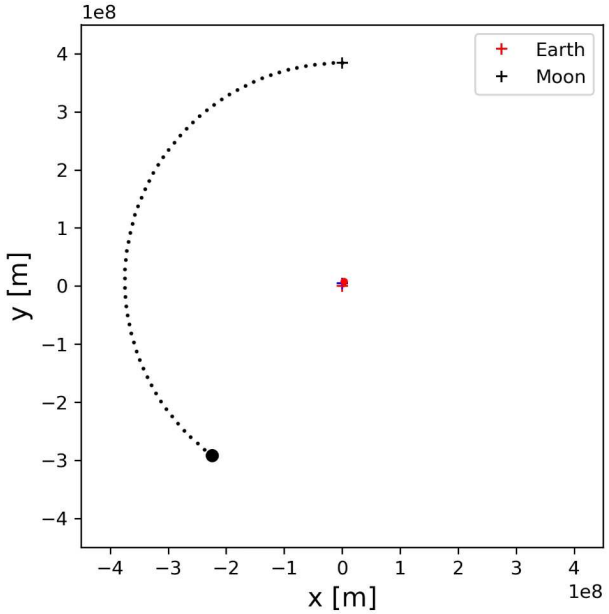
$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{G}{\mu}\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}^2|}\frac{r_x}{|\vec{r}|}, \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}r_y}{\mathrm{d}t} = v_y, \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{G}{\mu}\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}^2|}\frac{r_y}{|\vec{r}|}. \tag{17}$$

Die Anfangsbedingungen $r_{x0} = r_{x0}$, $v_{x0} = v_{x0}$, $r_{y0} = r_{y0}$ und $v_{y0} = v_{y0}$ müssen bekannt sein damit dieses System von Gleichungen integriert werden kann.

Dieses System von Differentialgleichungen ersten Grades kann z.B. numerisch gelöst werden. Die Skripting-Sprache python erlaubt dies mit den Zusatzpaketen numpy und scipy in ein paar Zeilen. Ein Beispiel-Skript `animate_earth_moon.py` habe ich am gewohnten Ort abgelegt. Spielen Sie damit und finden Sie heraus, wie es funktioniert!



Mit diesem Skript können Sie verfolgen, wie sich Mond und Erde unter dem Einfluss der Gravitation im Erde-Mond-System bewegen. Achtung: Die Simulation ist stark vereinfacht! Der Mond ist als schwarzer Punkt sichtbar, die Erde als kleiner roter Punkt und der gemeinsame Schwerpunkt als blaues "+". Damit man die Dynamik besser sieht, kann man im Skript die Masse des Mondes vervielfachen – was man numerisch nicht alles tun kann!

Elastische Stöße im Schwerpunktsystem

Bei einem solchen Stoß muss wegen $\vec{p}_{S,S} = \vec{0}$ auch vor und nach dem Stoß gelten

$$\text{vorher:} \quad \vec{p}_{1,S} = -\vec{p}_{2,S} \quad \text{und nachher:} \quad \vec{p}'_{1,S} = -\vec{p}'_{2,S}.$$

Einsetzen in die Energieerhaltung ergibt mit $p_i = m_i v_i$

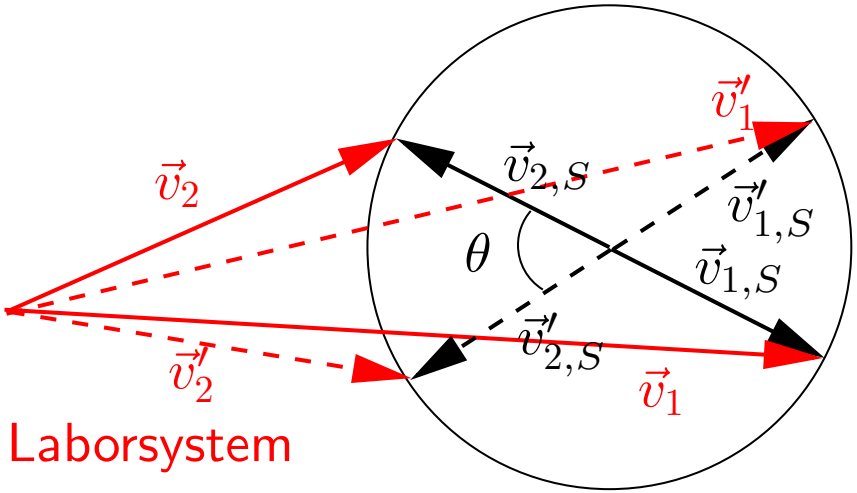
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) p'^2_{1,S} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) p^2_{1,S} + Q,$$

wo Q eine mögliche Änderung der Energie bei inelastischen Stößen bedeute. Verwenden wir die reduzierte Masse μ, so

$$\frac{p'^2_{1,S}}{2\mu} = \frac{p^2_{1,S}}{2\mu} + Q.$$

Für elastische Stöße ist $Q = 0$ (nach Definition), folglich $p'^2_{1,S} = p^2_{1,S}$ und $p'^2_{2,S} = p^2_{2,S}$.

Dies lässt lediglich eine Drehung der Impulse zu!



Laborsystem

Schwerpunktsystem

Planetenbahnen

Zur Berechnung nutzen wir aus, dass die totale Energie sowie der Drehimpuls erhalten sein müssen.

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.} \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 + E_{\text{pot}}, \text{ wo } r\dot{\phi} = v_\phi \\ E_{\text{tot}} &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + E_{\text{pot}} \quad \text{denn} \quad L = mr^2\dot{\phi}. \end{aligned}$$

Also verändert sich die Geschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_{\text{pot}} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}, \quad \text{wo} \quad E = E_{\text{tot}}$$

und die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{mr^2} \quad \text{denn} \quad L = mr^2\dot{\phi}.$$

Division ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{L}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_{\mathrm{pot}} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}.$$

Mittels Integration erhält man nun eine Polardarstellung der Planetenbahn $r = r(\phi)$.

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \mathrm{d}\phi = \phi - \phi_0 = \frac{L}{m}\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_{\mathrm{pot}} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

Mit $\phi_0 = 0$ und $E_{\rm pot} = -GMm/r$ wird das Integral lösbar (nachschlagbar. . .)

$$\phi = \arccos\left(\frac{L^2/r - Gm^2M}{\sqrt{(Gm^2M)^2 + 2mEL^2}}\right),$$

was mit den Abkürzungen

$$a = -\frac{GmM}{2E} \quad \text{und} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2m^3M^2}}$$

einfacher aussieht

$$\phi = \arccos\left(\frac{a(1-\epsilon^2) - r}{\epsilon r}\right).$$

Auflösung nach $1/r$ liefert eine Gleichung für Kegelschnitte:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \epsilon \cos \phi}{a(1 - \epsilon^2)}.$$

Dies kann einfach gesehen werden: Obige Gleichung beschreibt z. B. eine Ellipse mit großer Halbachse a und Exzentrizität ϵ. Wir können in ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung im Brennpunkt S umrechnen, indem wir schreiben $\xi = r \cos \phi$ und $\eta = r \sin \phi$

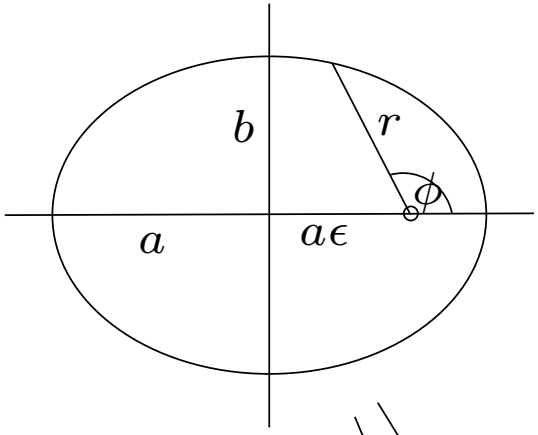
$$\begin{aligned} a(1 - \epsilon^2) &= r(1 + \epsilon \cos \phi) \\ a(1 - \epsilon^2) - \xi\epsilon &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \end{aligned}$$

Eine Translation des Ursprungs in den Mittelpunkt der Ellipse (des Kegelschnittes) erreichen wir mit der Transformation $\xi = x - a\epsilon$ und $\eta = y$, womit nach Quadrieren

obiger Gleichung und Sammlung aller Terme mit ξ auf der linken Seite

$$
\begin{aligned}
\xi^2 + 2a\epsilon\xi - 2a\epsilon^3\xi - \epsilon^2\xi^2 &= -y^2 + a^2(1-\epsilon^2)^2 \\
\xi^2 + 2a\epsilon\xi + a^2\epsilon^2 - a^2\epsilon^2 \; - \; \epsilon^2(\xi^2 + 2a\epsilon\xi + a^2\epsilon^2 - a^2\epsilon^2) &= -y^2 + a^2(1-\epsilon^2)^2 \\
(\xi + a\epsilon)^2 - \epsilon^2(\xi + a\epsilon)^2 - a^2\epsilon^2(1-\epsilon^2) &= -y^2 + a^2(1-\epsilon^2)^2 \\
(\xi + a\epsilon)^2(1-\epsilon^2) + y^2 &= a^2(1-\epsilon^2)^2 + a^2\epsilon^2(1-\epsilon^2) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}
$$

Kegelschnitte

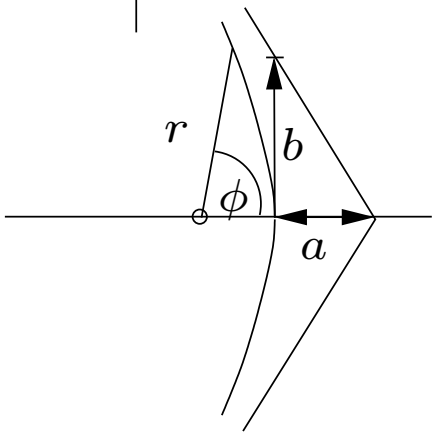


$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\phi}$

$0 < \epsilon < 1$

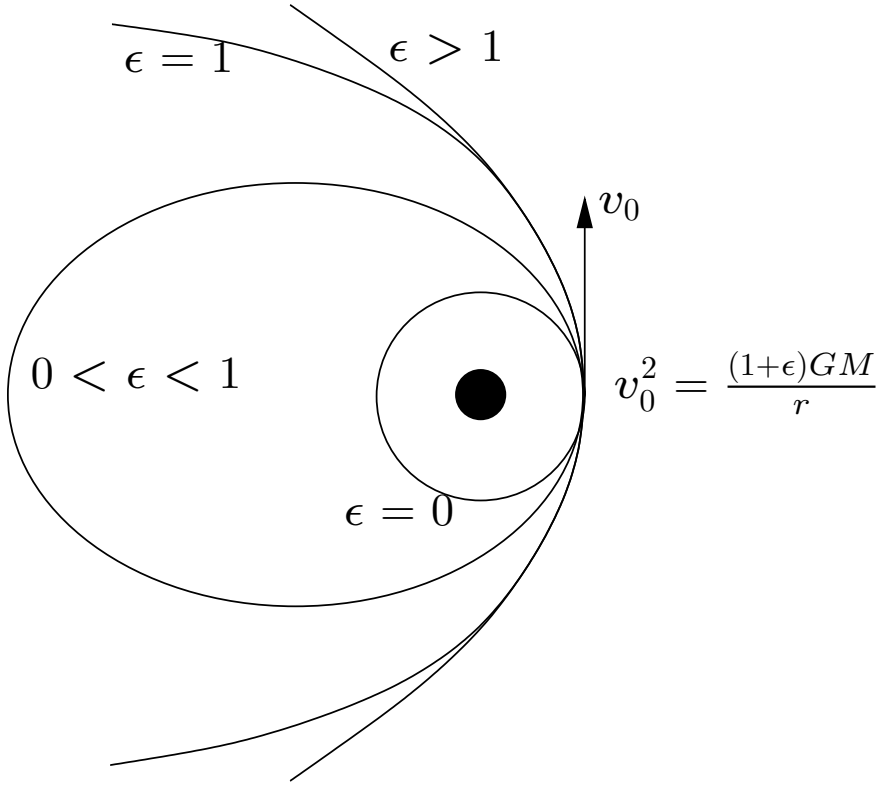
Kreis für $\epsilon = 0$

Parabel für $\epsilon = 1$

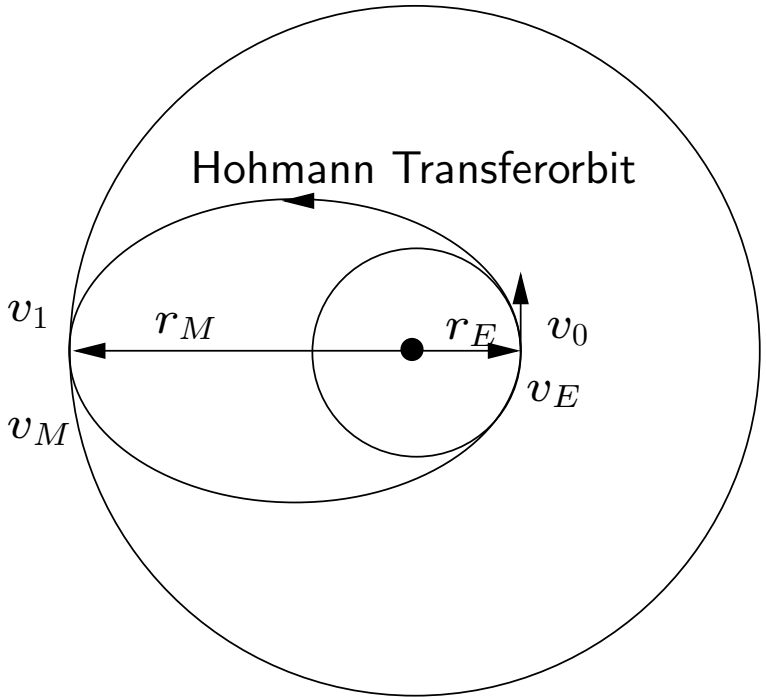


$r = \frac{a(\epsilon^2-1)}{1+\epsilon\cos\phi}$

$\epsilon > 1$



Mars 2020



Aus den Anfangsbedingungen folgt

$\epsilon = \frac{r_E v_0^2}{GM} - 1$

Für r_E und r_M die Ellipsengleichung anwenden und dividieren führt zu

$\frac{r_M}{r_E} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$

Obiges Resultat für ϵ einsetzen ergibt

$v_0^2 = \frac{GM}{r_E} \frac{2r_M/r_e}{1+r_M/r_E}$

Drehimpulserhaltung besagt $r_E v_0 = r_M v_1$ und damit

$\frac{r_M v_1^2}{GM} = \frac{r_E}{r_M} \frac{r_E v_E^2}{GM} = \frac{2}{1+r_M/r_e} < 1$

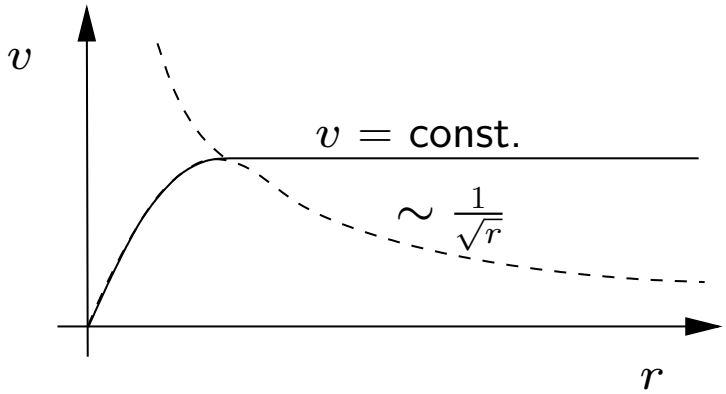
Damit kann nun einfach ausgerechnet werden, um wieviel Mars 2020 bei der Erde und bei Mars beschleunigt werden muss. Bei der Erde muss die Trägerrakete also

eine Geschwindigkeit v_0 erreichen, die um $\Delta v_0 = v_0 - v_E$ größer ist als v_e. Bei Mars muss der "Bus" die Sonde auf die Umlaufgeschwindigkeit beschleunigen um $\Delta v_1 = v_1 - v_M$.

$$\begin{aligned} \Delta v_0 = v_0 - v_E &= \sqrt{\frac{GM}{r_E}} \left(\sqrt{\frac{2r_M/r_E}{1 - r_M/r_E}} \right) \\ \Delta v_1 = v_1 - v_M &= \sqrt{\frac{GM}{r_M}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + r_M/r_E}} \right) \end{aligned}$$

und die total notwendige Geschwindigkeitsänderung $\Delta v_{\text{tot}} = \Delta v_0 + \Delta v_1$.
Weitere Informationen: `https://mars.nasa.gov/mars2020/`

Die Rotation von Galaxien



Um auf einer Kreisbahn zu bleiben, muss gelten

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \text{ also } v^2 = \frac{GM}{r} \implies v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Interessanterweise zeigen aber Beobachtungen von Rotationskurven von Galaxien ein anderes Verhalten, nämlich $v \approx$ const. Dies kann mit der Newtonschen Gravitation nur dadurch erklärt werden, dass die gravitative Masse mit galaktozentrischen Abstand zunimmt:

$$M(r) \propto (v^2 r)/(G).$$

Das Problem ist, dass die sichtbare Masse sich nicht so verhält! Gibt es in Galaxien einen Halo von "Dunkler Materie"?

Der Virialsatz

Der Virialsatz erlaubt es, für ein hochkomplexes System von wechselwirkenden Teilchen die mittlere totale kinetische Energie $\bar{K}$ mit der mittleren potentiellen zu vergleichen.

$$2K = \sum_i p_i v_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i p_i r_i\right) - \sum_i r_i \dot{p}_i, \tag{18}$$

wo K die ungemittelte kinetische Energie des Systems sei. Zudem wissen wir ja, dass nach Glg. 1 die Kraft, $F = \dot{p} = (\partial/\partial r)U$. Der erste Term auf der rechten Seite von Glg. 18 verschwindet, wenn ich über genügend große Zeiten mittle. Wir definieren deshalb den zeitlichen Mittelwert

einer Funktion g,

$$\bar{g} \doteq \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\infty \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}, \text{ wo } g = \dot{G}. \tag{19}$$

Ist G (im mathematischen Sinne) beschränkt, so gilt $\bar{g} = 0$, was die Behauptung beweist. Somit "überlebt" nur der zweite Term auf der rechten Seite von Glg. 18 und wir schreiben mit $F = \dot{p} = (\partial/\partial r)U$,

$$2K = \sum_i r_i \frac{\partial U}{\partial r_i}.$$

Wir mitteln nun wie in Glg. 19 definiert und verwenden, dass das Gravitationspotential $U \sim 1/r$,

$$2\bar{K} = -\bar{U}, \text{ der sog. } \textbf{Virialsatz}. \tag{20}$$

Jeans-Kollaps und die Entstehung des Sonnensystems

Für eine kugelförmige und homogene interstellare Molekularwolke lässt sich die potentielle Energie einfach berechnen. Die mittlere Dichte

$$\rho = \bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} \quad \text{und damit} \quad M(r) \approx \frac{4\pi}{3} r^3 \bar{\rho}.$$

Die potentielle Energie eines Massenelementes $\mathrm{d}m = 4\pi r^2 \rho \mathrm{d}r$ in einer Kugelschale beträgt (Glg. 3)

$$\mathrm{d}U = -4\pi G\bar{\rho}\frac{M(r)r^2}{r}\mathrm{d}r \quad \text{also} \quad U = -4\pi G\bar{\rho}\int_0^R \mathrm{d}r M(r) r.$$

Integration ergibt

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{4\pi}{3} 4\pi \bar{\rho}^2 G \int_0^R \mathrm{d}r r^4 \\
\bar{U} &= -\frac{16\pi^2 G}{15} \bar{\rho}^2 R^5 = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \text{ und nach Virialsatz} \\
\bar{K} &= \frac{3}{10}\frac{GM^2}{R}.
\end{aligned}
$$

Wir kennen aber die mittlere kinetische Energie in der Wolke!

$$
\bar{K} = \frac{3}{2} N k T, \quad \text{wo} \quad N = \frac{M}{\mu m_H}.
$$

Ist nun $2\bar{K} < \bar{U}$, so kollabiert die Wolke.

$$
\begin{aligned}
3\frac{M}{\mu m_H}kT &< \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}, \text{ wo } R = \left(\frac{4\pi}{3}\frac{M}{\rho}\right)^{1/3} \\
\frac{5kT}{G\mu m_H}\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)^{1/3} &< M^{2/3} \text{ also} \\
M_J \doteq \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)^{1/2} &< M.
\end{aligned}
$$

Für $M > M_J$, die Jeans-Masse, ist die Wolke instabil, kollabiert, und bildet einen Stern (evtl. mit Planetensystem).

Das Olbers'sche Paradoxon

Im Universum seien Sterne homogen mit einer Dichte von n Sternen pro Volumeneinheit verteilt, z. B. n Sterne pro Mpc^3. Deren durchschnittliche Leuchtkraft betrage L, womit die bei der Erde gemessene Intensität eines Sternes

$$I = \frac{L}{4\pi r^2} \quad \text{ist.}$$

In einer Kugelschale zwischen r und $r + \mathrm{d}r$ befinden sich $N = n4\pi r^2 \mathrm{d}r$ Sterne. Die Summe der Intensitäten des bei der Erde ankommenden Lichtes aller Sterne ist also

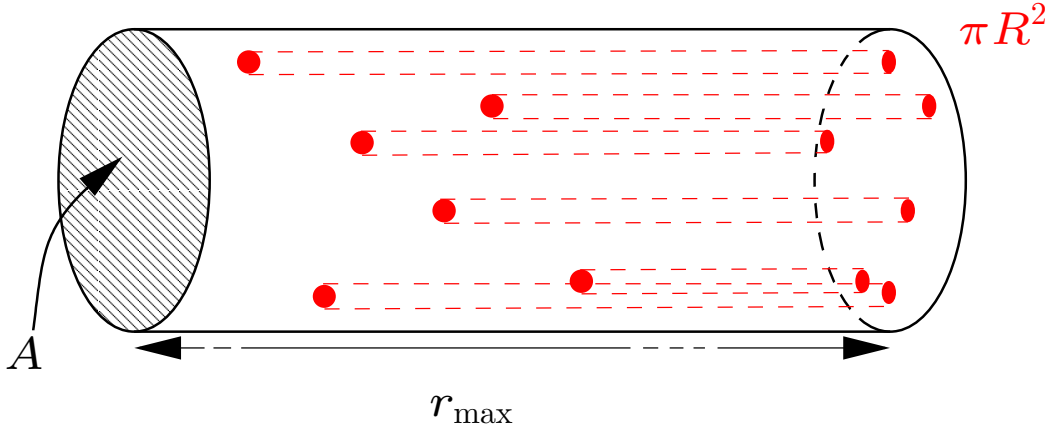
$$\mathrm{d}I = \frac{L}{4\pi r^2} \cdot n \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = n \cdot L \cdot \mathrm{d}r,$$

was, über alle Abstände summiert, ergibt,

$$I = \int_0^\infty \mathrm{d}rnLr = \infty.$$

Das Integral divergiert, was offensichtlich nicht sein darf. So heiß ist die Erde nun auch wieder nicht! Damit haben wir ein Problem, das sog. Olbers'sche Paradoxon (1758 – 1840).

“Ausrede 1”: Sterne verdecken sich gegenseitig

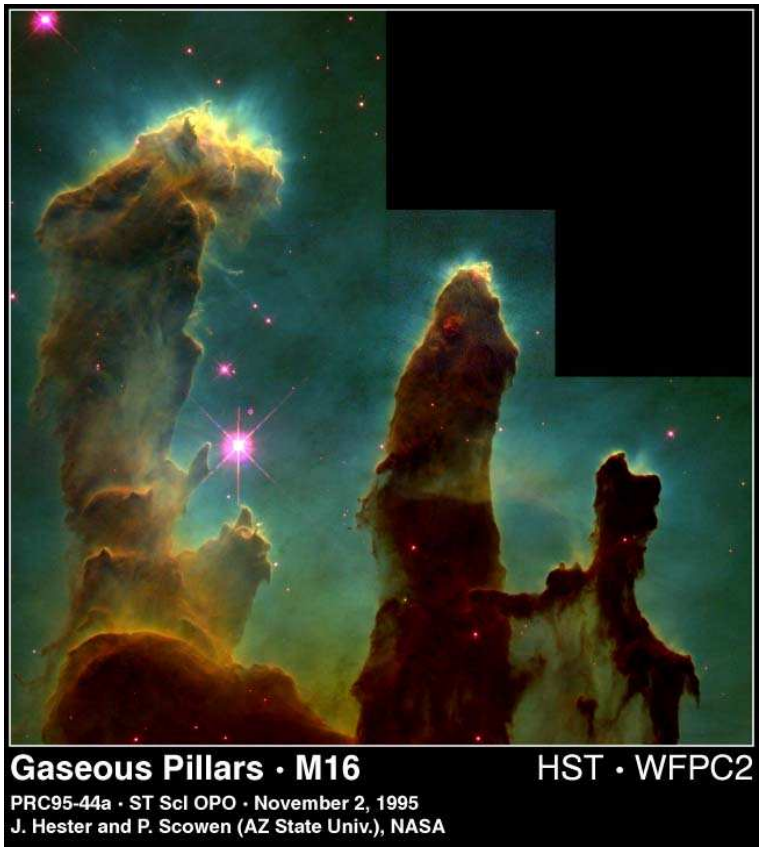


Als Ausrede wurde oft genannt, dass sich Sterne gegenseitig bedecken würden und also nicht das Licht von allen Sternen die Erde erreichen könne. Ein solches Argument kann folgendermaßen leicht entkräftet werden. Der mittlere Sternradius betrage R. Eine vollständige Bedeckung entsteht also erst, wenn der Abstand $r_{\max}$ überschritten wird. Dann sind im Zylinder links $N = nAr_{\max}$ Sterne und es muss gelten

$$N\pi R^2 = A = n \cdot A \cdot r_{\max}\pi R^2 \quad \Longrightarrow r_{\max} = \frac{1}{n\pi R^2}.$$

Die Intensität, die bei der Erde von allen Sternen bis zu einem Abstand $r_{\max}$

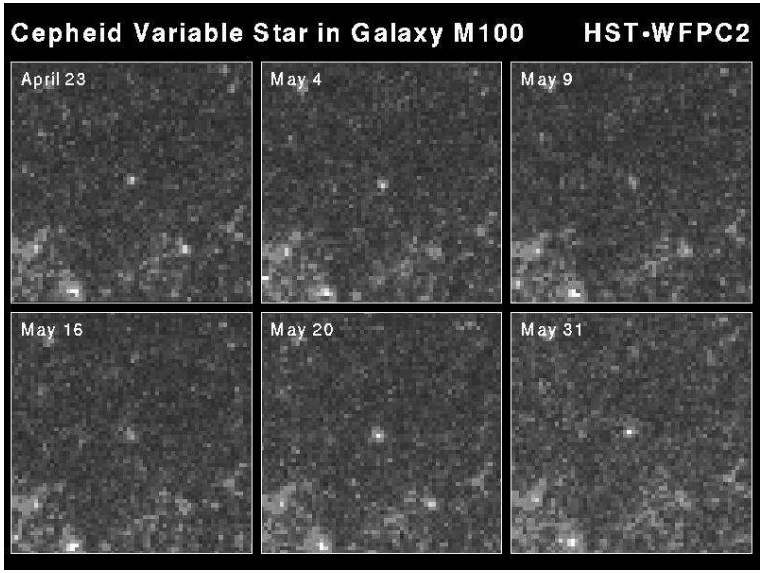
auftrifft, ist $I(r_{\max}) = n{\cdot}L{\cdot}r_{\max} = L/(\pi R^2)$, was gerade die sog. Flächenhelligkeit ist. Diese ist aber vom Abstand unabhängig, wie man leicht einsieht, denn die sichtbare Fläche, wie auch die intensität nehmen mit $1/r^2$ ab. Aus dieser Überlegung, ja aus dieser "Ausrede" erscheint das Olbers'sche Paradoxon schärfer denn je: Der Himmel müsste in jeder Richtung gleich hell sein wie die Sonne!



Eine weitere "Ausrede" funktioniert auch nicht, nämlich die, dass dichte interstellare Wolken, wie die links abgebildete, das Licht der Sterne absorbieren würden. Wir wissen ja jetzt, dass Energie erhalten bleibt und nicht "einfach verschwindet". Das Licht der dahinterliegenden Sterne wird also die Wolken aufwärmen (das der davorliegenden natürlich auch). Diese heizen sich auf, bis sie gleich viel Energie abstrahlen, wie sie aufnehmen, bis sie sich

also im Gleichgewicht mit ihrer Umgebung befinden. Wenn sie sich aber im Gleichgewicht befinden, strahlen sie nach den Überlegungen auf der vorigen Folie gleich hell, wie die Sterne. Deshalb funktioniert auch diese "Ausrede" nicht. Vielmehr zeigt sich ein Ausweg aus dem Olbers'schen Paradoxon: Wenn das Universum nicht unendlich alt, bzw. nicht unendlich groß ist, kann das Olbers'sche Paradoxon gelöst werden.

Techniken der Entfernungsmessung



Zwei Methoden zur Entfernungsbestimmung wurden bis vor kurzem genutzt um die Hubble-Konstante zu bestimmen, die Methode der variablen Cepheiden und die Methode der Supernovae Typ Ia. Frau Leavitt hat 1912 entdeckt, dass diese Sorte von Sternen in der Magellanschen Wolke eine Periode in ihrer scheinbaren Helligkeit hatten und dass diese Periode mit der scheinbaren Helligkeit in einer Beziehung stand. Wegen des bekannten Abstandes zur kleinen Magellanschen Wolke, war damit die Periode-Leuchtkraft Beziehung gefunden und konnte für Entfernungsmessungen verwendet werden.
Supernovae vom Typ Ia können wegen ihrer bekannten Helligkeit bis in weite Entfernungen als “Standardkerzen” verwendet werden.

Die Hubble-Konstante

Slipher hat bereits 1914 herausgefunden, dass das Licht von "Nebeln" rotverschoben war, was er als Dopplereffekt interpretierte, der entehe, wenn sich diese Nebel von uns wegbewegen.

Hubble hat sowohl die Entfernung zu fernen Galaxien gemessen wie auch die Rotverschiebung von Spektrallinien, die durch diese Galaxien emittiert wurden.

Er fand, dass die Spektrallinien einer Galaxie rotverschoben waren. Dies wurde auf einen Dopplereffekt zurückgeführt. Die Rotverschiebung kann dadurch erklärt werden, dass die Wellenlänge des Lichtes verschoben wird, wenn sich die Quelle mit einer Geschwindigkeit v von einem entfernt, ähnlich wie sich der Sirenenton eines Feuerwehrautos verändert, wenn sich dieses auf uns zu oder von uns weg bewegt.

Hubble fand, dass die auf diese Weise bestimmten Geschwindigkeiten der Galaxien

nach dem Abstand der Galaxien ordnen ließen und dass

$$v = H \cdot r, \quad \text{(Das Hubble-Gesetz)},$$

wor r der Abstand von der Erde ist. Aus den Messungen von WMAP wissen wir heute, dass $H_0 = 69.32 \pm 0.8$ (km/s)/Mpc beträgt, aus Messungen vom Hubble Space Telescope , dass $H_0 = 72.1 \pm 2.0$ (km/s)/Mpc. Damit ist experimentell bestätigt, dass sich das Universum ausdehnt.

Wird die Hubble-Konstante mit anderen Techniken gemessen, so zeigen sich signifikante Differenzen! Wir wissen also auch, dass wir das Universum nicht verstehen.