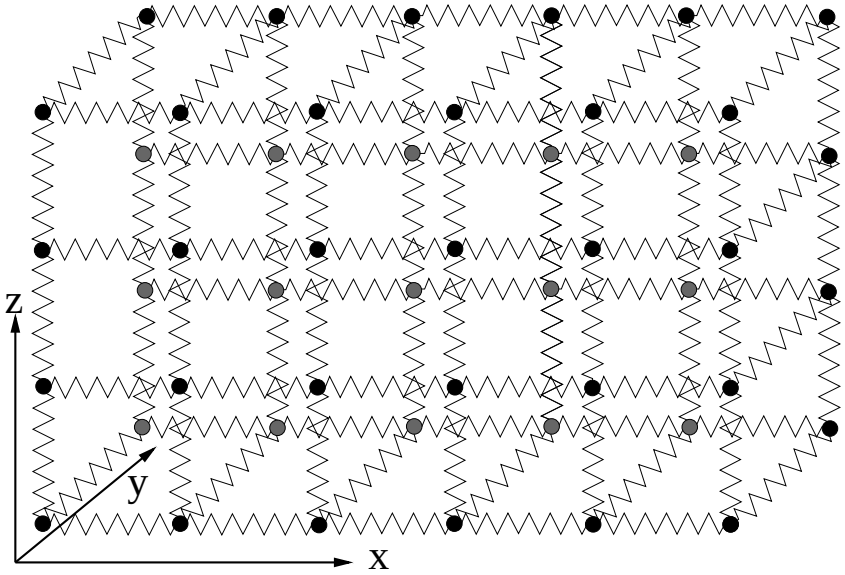
Elastizität fester Körper

Massenpunkt $\longrightarrow$ starrer Körper $\longrightarrow$ Gase $\longrightarrow$ "reale" Körper



"feste" Körper: Idealvorstellung Kristall

Der nebenan dargestellte Ausschnitt aus einem festen Körper verdeutlicht eine Modellvorstellung eines Kristalls. Die Verbindungen zwischen den Atomen/Molekülen in x-, y- und z-Richtung können verschiedene Federkonstanten (Rückstellkonstanten) aufweisen. Sind sie in alle Richtungen gleich, ist der Körper isotrop, es gibt keine ausgezeichnete Richtung. Die Atome/Moleküle schwingen um ihre Ruhelage mit $E_{\mathrm{kin}} = (1/2)kT$ pro Freiheitsgrad. Ist E_{kin} größer als die Bindungsenergie, ist der Körper gasförmig.

Zug-, Druck-, Tangential- und Schubspannung

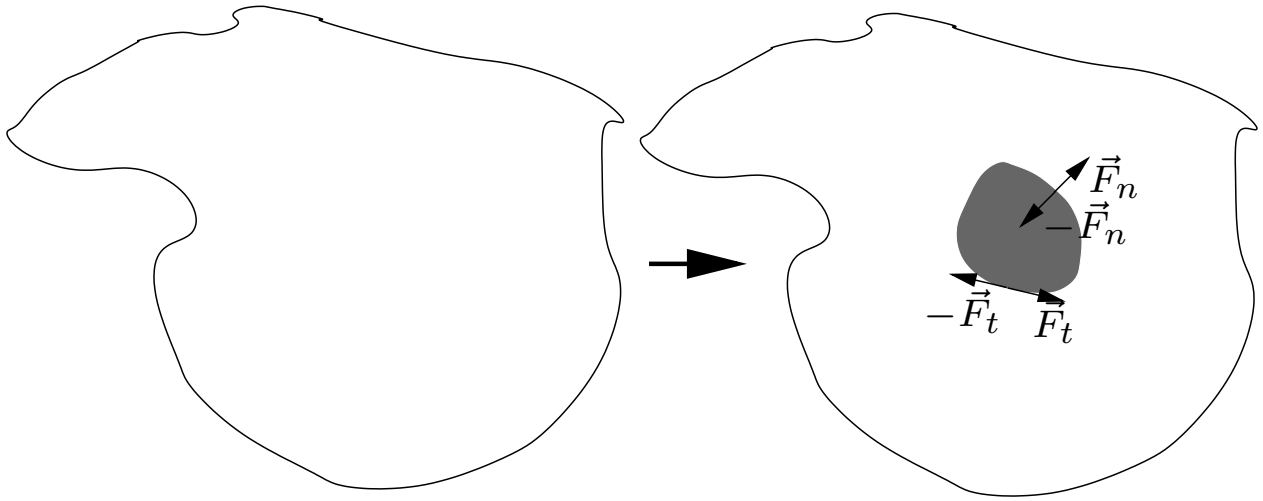
Neben Massenkräften wie z. B. die Gravitation können an Festkörpern auch Oberflächenkräfte angreifen, wie z.B.:

$$\vec{F} \perp A, \text{bzw. } \vec{F} \parallel \vec{A} \qquad \left.\begin{array}{c} \text{Zug: Zugspannung} \\ \text{Druck: Druckspannung} \end{array}\right\} \longrightarrow \sigma \doteq \frac{\text{Normalkraft } F_n}{\text{Fläche } A}$$

$$\vec{F} \parallel A, \text{bzw. } \vec{F} \perp \vec{A} \qquad \left.\begin{array}{c} \text{Tangentialspannung} \\ \text{Schubspannung} \end{array}\right\} \longrightarrow \tau \doteq \frac{\text{Tangentialkraft } F_n}{\text{Fläche } A}$$

$$[\sigma] = [\tau] = \text{Kraft pro Fläche} = \text{Druck} = \text{Pa}.$$

Spannungskräfte wirken nicht nur auf die Oberfläche eines Körpers, sondern auch auf das Innere!



Die äußeren Kräfte rufen im Inneren des Körpers Spannungen hervor. Der Körper ist nur in Ruhe, wenn sich alle Kräfte kompensieren ("actio = reactio") bzw. wenn die hervorgerufenen Verzerrungen Gegenkräfte hervorrufen, welche die inneren Spannungen kompensieren. Wir schauen hauptsächlich Situationen an, in denen sich die Spannungen im Inneren kompensieren.

Das Hooksche Gesetz

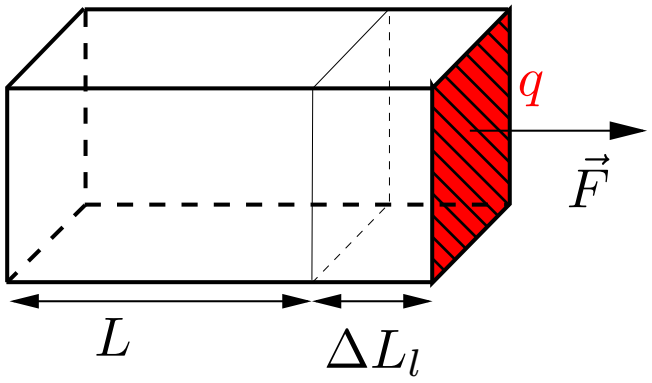
“Die Verzerrungen sind proportional den Spannungen”

$$F \propto A\frac{\Delta L}{L} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F}{A} = \sigma \propto \frac{\Delta L}{L} \quad \text{bzw.} \quad \sigma = E\frac{\Delta L}{L},$$

wo $\sigma = F/A$ die **Spannung** ist, gilt nur bis zur sog. Proportionalitätsgrenze. Verformungen bleiben reversibel bis zur Elastizitätsgrenze, darüber hinaus erfährt der Körper eine irreversible Deformation (z. B. Beule in Blech).

Im Proportionalitätsbereich hat die Proportionalitätskonstante E je nach Situation verschiedene Namen: Elastizitätsmodul (E), Schubmodul (G), Torsionsmodul (G), Kompressionsmodul (K), etc.

Elastizitätsmodul E und Zugspannung σ



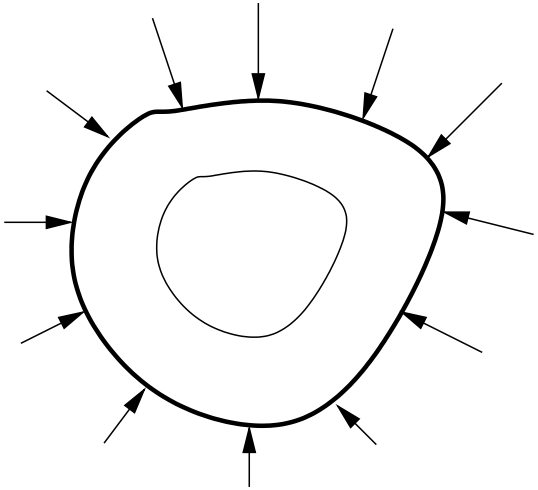
Wir betrachten einen Körper der Länge L und Querschnittsfläche q und ziehen an ihm mit einer Kraft F. Dabei ändert er seine Länge um ΔL. Solange ΔL genügend klein bleibt, gilt:

$$F = E \cdot q \cdot \frac{\Delta L}{L}.$$

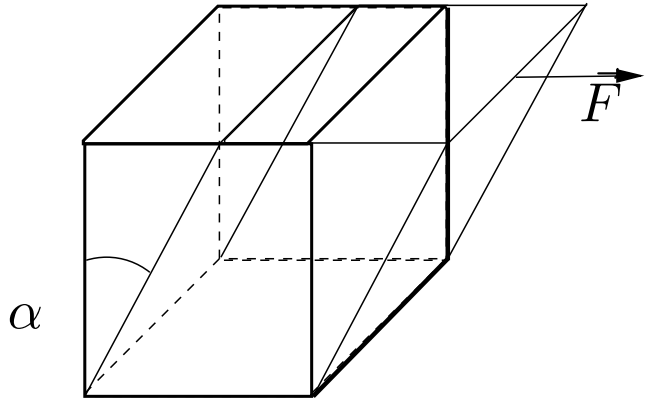
Die Proportionalitätskonstante E heisst **Elastizitätsmodul**. Definieren wir die relative Längenänderung $\epsilon \doteq \Delta L/L$, so ist die **Zugspannung** σ

$$\sigma \doteq \frac{F}{q} \quad \text{(Zugkraft pro Fläche) proportional zu } \epsilon, \quad \underline{\sigma = E \cdot \epsilon}.$$

Kompressionsmodul K und Schubmodul G

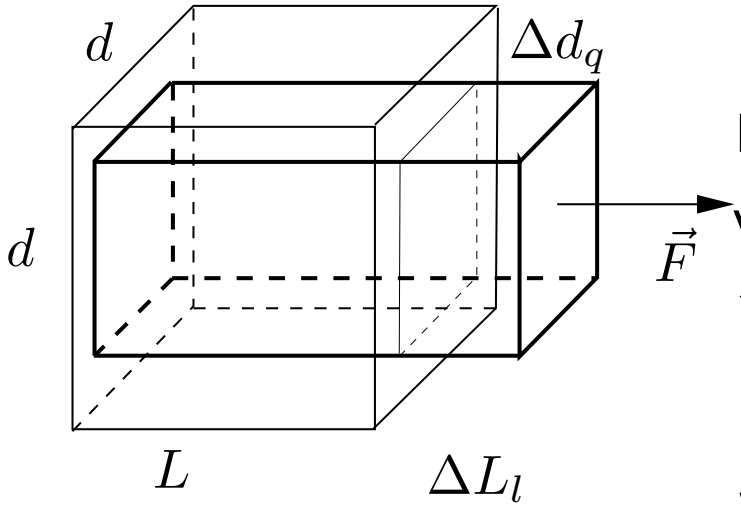


$$P = -K\frac{\Delta V}{V}$$



$$\tau = G\alpha$$

Dehnung und Kompression kombiniert



Poissonzahl $\mu \doteq -\frac{\epsilon_q}{\epsilon_l}$, wo q: quer, l: längs

Längenänderungen: $L\left(1+\frac{\sigma}{E}\right)$, $d\left(1-\frac{\mu\sigma}{E}\right)$, $d\left(1-\frac{\mu\sigma}{E}\right)$

Volumenänderung:

$V \longrightarrow V + \Delta V = Ld^2\left(1+\frac{\sigma}{E}\right)\left(1-\frac{\mu\sigma}{E}\right)^2$

$V + \Delta V \approx V\left(1+\frac{\sigma}{E}(1-2\mu)\right)$, bzw. $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{E}(1-2\mu)$

Weil sich das Volumen bei Zug vergrößern muss,

muss also $(1-2\mu) > 0$ gelten.

$\epsilon \doteq \frac{\Delta L}{L}$

$\sigma = E\epsilon$ (Seite 4)

E: Elastizitätsmodul

Damit $0 \leq \mu < \frac{1}{2}$

Kompression: Abhängigkeit von K, von E und μ

Zugspannung $\longrightarrow$ Druck: Veränderung einer Kantenlänge L oder d

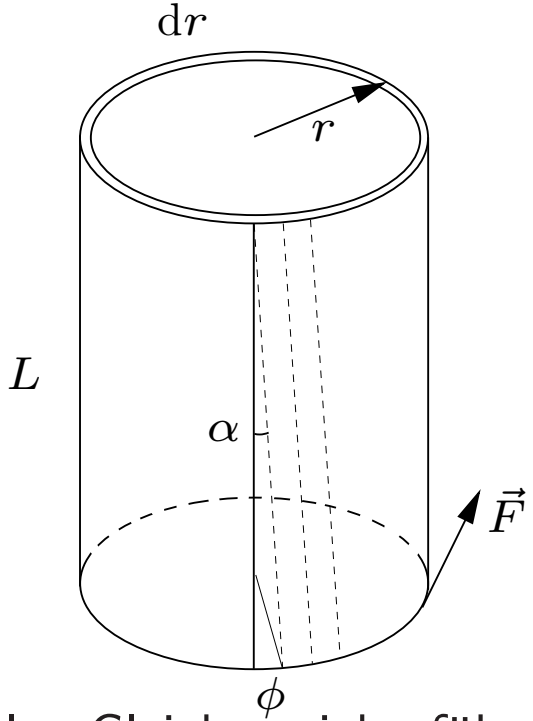
$$\text{längs: } L\left(1-\frac{\sigma}{E}\right), \text{ quer: } d\left(1+\frac{\mu\sigma}{E}\right) \quad \text{(bei Kompression!).}$$

Wirkt der Druck von allen Seiten, spürt jedes Seitenpaar die inverse Querkontraktion zwei Mal, also $(1+\frac{\mu\sigma}{E}) \longrightarrow (1+2\frac{\mu\sigma}{E})$ und damit verändert sich $L \longrightarrow L\left(1-\frac{\sigma}{E}(1-2\mu)\right)$. Die Volumenänderung beträgt also

$$V+\Delta V = Ld^2\left(1-\frac{\sigma}{E}(1-2\mu)\right)^3 \quad \text{also} \quad \frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{3\sigma}{E}(1-2\mu),$$

was aber wegen $-\frac{\Delta V}{V}=\frac{\sigma}{K}$ bedeutet $K=\frac{E}{3(1-2\mu)}$.

Bestimmung des Torsionsmoduls bzw. des Schubmoduls



Die **Scherspannung** τ ergibt sich aus dem **Scherwinkel** α und dem **Schermodul** G,

$$\tau = G\alpha = G\frac{r\cdot\Phi}{L}, \text{ wo die Kraft } \mathrm{d}F = G2\pi r^2\mathrm{d}r\frac{\Phi}{L}$$

erforderlich ist, um diese Verdrehung zu erreichen. Es greift also ein Drehmoment an:

$$\mathrm{d}|\vec{M}| = r\cdot\mathrm{d}F = \frac{2\pi\Phi}{L}Gr^3\mathrm{d}r \xrightarrow{\int_0^R} M = \frac{\pi}{2}G\frac{R^4}{L}\Phi.$$

Im Gleichgewicht führen die inneren Kräfte im Draht zu einem rücktreibenden

Drehmoment $M^\star$,

$$M^\star = -\frac{M}{\Phi} \cdot \Phi \;=\; -D \cdot \Phi, \;\; \text{wo} \;\; D = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L}$$

(das Drehmoment pro Winkeleinheit) das **Richtmoment** des Drahtes ist.

Nun kann man ans untere Ende des Drahtes einen Körper mit Trägheitsmoment I hängen und den Draht leicht verdrehen. Es kommt zu Drehschwingungen dieses **Drehpendels**:

$$I\ddot{\Phi} = -D\Phi \quad \longrightarrow \quad \ddot{\Phi} = -\frac{D}{I}\Phi.$$

Diese Schwingungsgleichung (Differentialgleichung) lösen wir z. B. wieder mit

einem $\sin\cos$-Ansatz

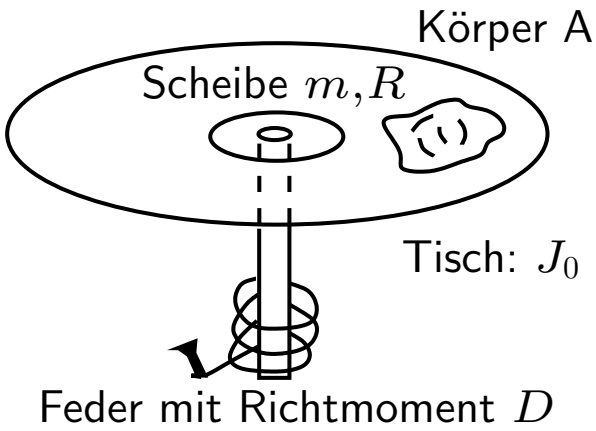
$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= A\sin\omega t \;+\; B\cos\omega t,\\
\dot{\Phi}(t) &= A\omega\cos\omega t \;-\; B\omega\sin\omega t,\\
\ddot{\Phi}(t) &= -A\omega^2\sin\omega t \;-\; B\omega^2\cos\omega t,\\
\ddot{\Phi}(t) &= -\omega^2\Phi(t),
\end{aligned}$$

womit wir die Schwingungsfrequenz ω und die Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$ finden:

$$\omega^2 = \frac{D}{I} \quad \text{und} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \;=\; \frac{2\pi}{R^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{IL}{G}},$$

wie dies z. B. bei der Gravitationswaage eingesetzt wurde.

Repe: Bestimmung des Trägheitsmoments – V5, S. 25/26



Die Auslenkung einer Feder mit Richtmoment D bewirkt ein Drehmoment $M = -D\phi$. Die Bewegungsgleichung für den Drehtisch lautet damit

$$J_0\ddot{\phi} = -D\phi,$$

wo J_0 das Trägheitmoment des Tisches ist. Die Lösung findet man z. B. mit einem Sinus-Ansatz,

$$\phi(t) = a\sin\left(\sqrt{(D/J_0)}t\right), \text{ also } \; T_0 = 2\pi\sqrt{J_0/D}.$$

Das Trägheitsmoment des Tisches finden wir, indem wir eine Scheibe der Masse

m und mit Radius R konzentrisch auf den Tisch legen:

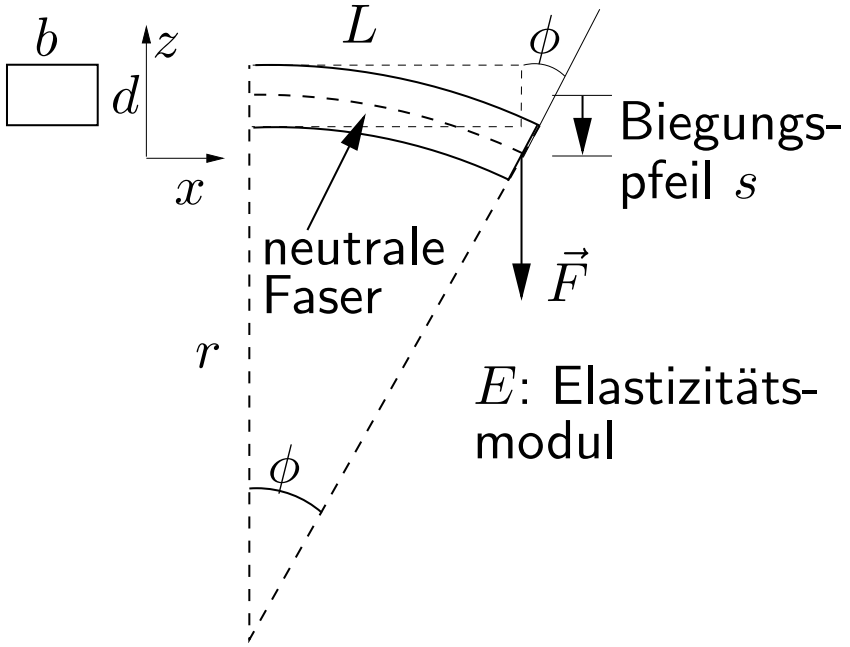
$$J_1 = J_0 + J_{\text{Scheibe}} = J_0 + \frac{1}{2}mR^2, \implies T_1 = 2\pi\sqrt{\left(J_0 + \frac{1}{2}mR^2\right)/D}.$$

Die Differenz $\Delta T^2 = T_1^2 - T_0^2 = 2\pi^2(mR^2)/D$ bestimmt das Richtmoment D. Nun kann ich einen Körper mit unbekanntem Trägheitsmoment J_A auf den Teller legen und dessen Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse über die Schwingungsdauer bestimmen:

$$T_A = 2\pi\sqrt{(J_0 + J_A)/D} \implies J_A = D\frac{T_A^2}{4\pi^2} - J_0.$$

Das Trägheitsmoment des Körpers bzgl."seiner Achse" findet sich dann über den Satz von Steiner.

Biegung



Bei der Durchbiegung eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt $A = bd$ und der Länge L wird die Oberkante um $\Delta l = z\phi$ länger gezogen, die Unterkante entsprechend "gestaucht". Die Länge der neutralen Faser beträgt $l = r\phi = L$, d.h. wir kennen den Krümmungsradius r und wir finden $\Delta l = z\phi = z(l/r)$. Die Zugspannung am Balken beträgt demnach oben: $\sigma = E \cdot (\Delta l/l) = z \cdot (E/r)$
und unten: $-\sigma = -|z| \cdot (E/r)$.

Auf eine infinitesimale Schicht der Breite b und Dicke $\mathrm{d}z$ wirkt also die Kraft

$$\mathrm{d}F = \sigma\ b\ \mathrm{d}z = \frac{zE}{r}\ b\ \mathrm{d}z \quad \text{(zeigt in } x - \text{Richtung)},$$

wo z der Abstand zur neutralen Faser ist. Diese Kraft übt ein Drehmoment in y-Richtung (nach hinten) aus:

$$\mathrm{d}M_y = \frac{Eb}{r} z^2 \, \mathrm{d}z, \quad \longrightarrow \quad M_y = \frac{Eb}{r} \int_{-d/2}^{+d/2} z^2 \, \mathrm{d}z \; = \frac{Eb}{r} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-d/2}^{+d/2} \; = \; \frac{Eb}{r} \frac{d^3}{12}.$$

Das Drehmoment wird durch die am Ende des Balkens angreifende Kraft F bewirkt, also $M_y(x) = F(L - x)$. Die elastischen Kräfte im Balken kompensieren dieses Drehmoment gerade (der Balken ist in Ruhe!):

$$\frac{Ebd^3}{12r} = F(L - x), \quad \xrightarrow{\text{Krümmungsradius}} \quad \frac{1}{r} = -\frac{12F}{Ed^3b}(L - x).$$

Die komplizierte Form der neutralen Faser findet man aus der Differentialgeome-

trie,

$$\frac{1}{r} = \frac{z''(x)}{(1+z'(x)^2)^{3/2}} \approx z''(x) \text{ für kleine } z'.$$

Biegt sich der Balken nur wenig durch, so ist $z'(x) \ll 1$ womit

$$z''(x) = -\frac{12\ F}{Ed^3b}(L-x),$$

mit den Randbedingungen $z(0) = 0$ und $z'(0) = 0$. Wir integrieren zweimal

$$\begin{aligned} z''(x) &= -\frac{12\ F}{E\ d^3\ b}(L-x), \\ z'(x) &= -\frac{12\ F}{E\ d^3\ b}Lx + \frac{6\ F}{E\ d^3\ b}x^2 + C_1, \\ z(x) &= -\frac{6\ F}{R\ d^3\ b}Lx^2 + \frac{2F}{E\ d^3\ b}x^3 + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

Setzen wir die Randbedingungen ein, so erhalten wir

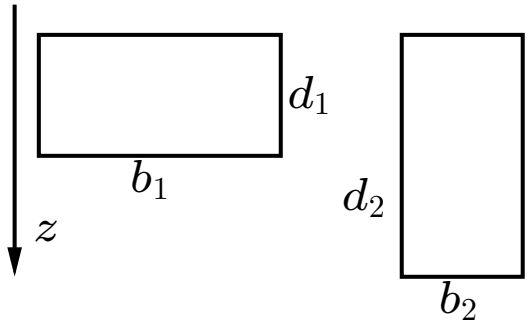
$$z(x) = -\frac{6F}{Ed^3b}Lx^2 + \frac{2F}{Ed^3b}x^3.$$

Der **Biegungspfeil** (Durchbiegung des Balkenendes bei $x = L$) beträgt also

$$s = z(L) = -\frac{4}{E} \cdot \frac{L^3}{d^3} \cdot \frac{F}{b}.$$

Damit verhält sich die Durchbiegung wie die dritte Potenz des Verhältnisses von Länge zur Balkendicke. Die Breite des Balkens b geht nur als $1/b$ ein. Aber Achtung – die Ausrichtung spielt eine Rolle! Was ist die Breite, was die Dicke?

Beispiel: Rechteckiger Träger



Derselbe Balken kann, je nach Orientierung, einen völlig anderen Biegungspfeil aufweisen, wie das Beispiel nebenan zeigt. Links ist ein Balken mit $d_1 = b_1/2$ dargestellt, rechts einer mit $d_2 = 2b_2$, was in den folgenden Biegungspfeilen resultiert:

$$s_1(L) = -\frac{4}{E} \cdot \frac{L^3}{(b/2)^3} \frac{1}{b} \qquad s_2(L) = -\frac{4}{E} \cdot \frac{L^3}{(2b)^3} \frac{1}{b},$$

$$s_1(L) = -\frac{4}{E} \cdot \frac{8\ L^3}{b^4} \qquad s_2(L) = -\frac{4}{E} \cdot \frac{L^3}{8b^4}.$$

Die Biegungspfeile und damit die Durchbiegung der beiden Balken unterscheiden sich um einen Faktor 64! Balken 1 (links) biegt sich 64 mal stärker durch!

Das Flächenträgheitsmoment

Die Eigenschaften bei Biegung anderer Formen als Balken und Zylinder können mit Hilfe des **Flächenträgheitsmomentes** I ermittelt werden.

$$I \doteq \int z^2 \, \mathrm{d}A = \int\int z^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \quad \underline{\text{wo } z \text{ in Richtung der angreifenden Kraft zeigt.}}$$

Für einen Balken der Breite b und Dicke d erhalten wir (vgl. S. 14):

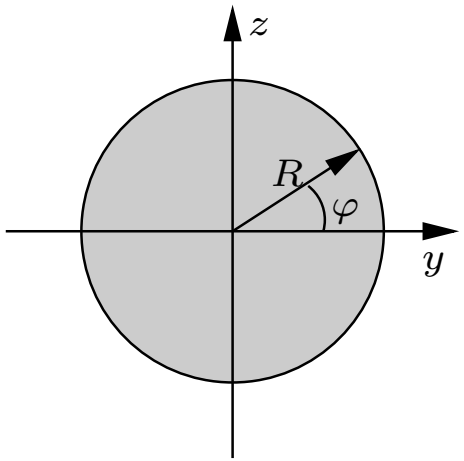
$$I = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-b/2}^{b/2} z^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y \int_{-d/2}^{d/2} z^2 \, \mathrm{d}z = b\frac{d^3}{12}.$$

Die Durchbiegung $s = z(L)$ eines solchen Balkens der Länge L, auf dessen Ende eine Kraft F wirkt, lautet unabhängig von der genauen Geometrie, aber natürlich

abhängig von deren Ausrichtung (in welche Richtung zeigt z?)

$$s = \frac{L^3}{3EI}F, \text{ wo } I \text{ das entsprechende Trägheitsmoment ist.}$$

Wir können das Trägheitsmoment auch für andere Balken berechnen, z. B. für einen zylinderförmigen Balken mit Radius R,



$$I \doteq \int\int z^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \text{ wo } y = R\cos\varphi,\ z = R\sin\varphi.$$

Dieses zweidimensionale (Flächen-) Integral bestimmen

wir wie folgt. Zunächst bestimmen wir die Jacobiante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

und integrieren

$$\begin{aligned} I &= \int\int z^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2\sin^2\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi, \\ &= \int_0^R r^3\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Nun ist nur noch das Integral über $\sin^2\varphi$ zu lösen, welches wir mit dem

bekannten Trick tun:

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi &= \int \sin\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\,\varphi, \quad \text{partiell integrieren} \\
&= -\cos\varphi \sin\varphi + \int \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi, \\
&= -\cos\varphi \sin\varphi + \int (1-\sin^2\varphi) \,\mathrm{d}\varphi, \\
&= -\cos\varphi \sin\varphi + \varphi - \int \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi, \\
2\int \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi &= -\cos\varphi \sin\varphi + \varphi, \\
\int \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi &= -\frac{1}{2}\left(\cos\varphi \sin\varphi - \varphi\right).
\end{aligned}
$$

Wir setzen die Integrationsgrenzen $(0,\, 2\pi)$ ein und erhalten für das Integral den Wert π. Damit erhalten wir das Flächenträgheitsmoment für einen kreisrunden Balken:

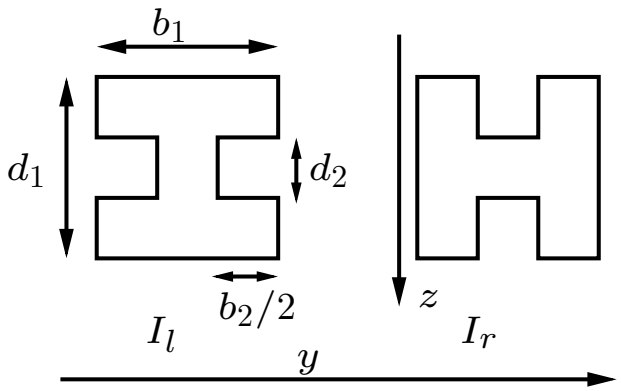
$$I = \pi \frac{R^4}{4}.$$

Für ein Rohr mit Außen- und Innenradius R_A und R_I erhalten wir

$$I = \frac{\pi}{2} R_A^4 - \frac{\pi}{2} R_I^4 = \frac{\pi}{2}(R_A^4 - R_I^4),$$

Flächenträgheitsmomente können addiert bzw. subtrahiert werden, wodurch sich die Berechnung komplizierterer Trägerformen vereinfacht.

Beispiel: Doppel-T-Träger



Welcher Doppel-T-Träger biegt sich weniger durch? Dazu berechnet man deren Flächenträgheitmomente I_l und I_r mit

$$I \doteq \int\int z^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Das linke kann man einfach oder kompliziert rechnen... Einfach geht es, indem man das Flächenträgheitsmoment des Rechtecks $d_1 \cdot b_1$ berechnet und davon 2 mal das des kleineren Rechteckes $d_2 \cdot b_2/2$ subtrahiert:

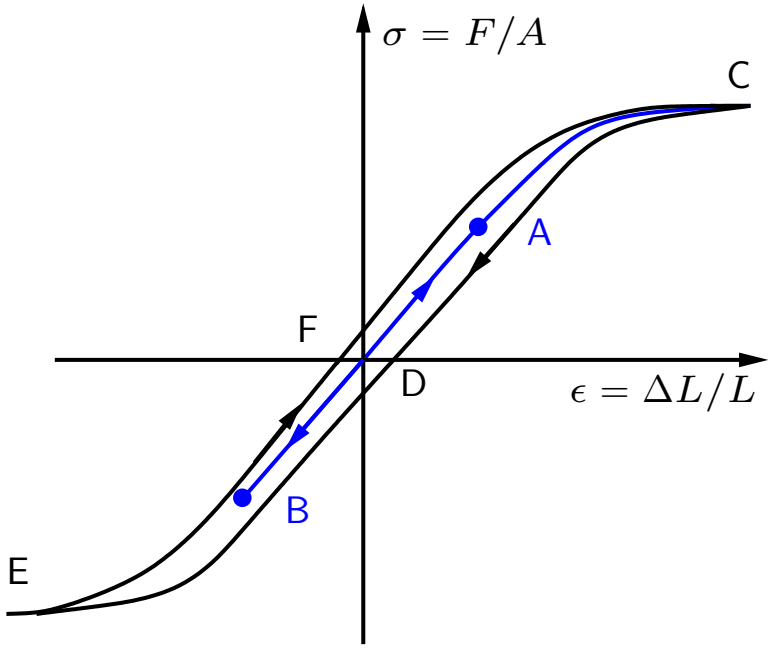
$$I_l = \frac{1}{12} d_1^3 b_1 - \frac{2}{12} d_2^3 \frac{b_2}{2} = \frac{1}{12} \left(d_1^3 b_1 - d_2^3 b_2 \right).$$

Komplizierter, aber allgemeiner geht es mit dem Satz von Steiner. Dazu unterteilt man den Doppel-T-Träger in drei rechteckige Träger: oben, Mitte, unten. Außerdem nutzen wir aus, dass die Träger unten und oben gleich sind, wie auch der Beitrag des Steinerschen Satzes.

$$
\begin{aligned}
I_l &= I_{\text{oben}} + \text{Steiner oben} + I_{\text{Mitte}} + I_{\text{unten}} + \text{Steiner unten}, \\
&= 2 \cdot \frac{b_1}{12} \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(d_1^3 - d_2^3\right) + 2 \cdot \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right) b_1 \cdot \left(\frac{d_1 + d_2}{4}\right)^2 + \frac{1}{12} d_2^3 \left(b_1 - b_2\right), \\
&= \frac{1}{12} \left(d_1^3 b_1 - d_2^3 b_2\right),
\end{aligned}
$$

wie man durch langweiliges Nachrechnen überprüft.
Das Flächenträgheitsmoment des rechten Doppel-T-Trägers berechnet man analog und findet (ja natürlich!), dass es kleiner ist, als das des linken. Der rechte Doppel-T-Träger biegt sich also stärker durch als der linke.

Deformation und Hysterese



Zieht man an einem Draht mit Querschnitt A mit einer Kraft F (einer Zugspannung σ), so dehnt er sich um $\epsilon = \Delta L/L$ aus. Staucht man ihn mit einem Druck $p = -\sigma$ zusammen, wird er um ϵ kürzer. Der Prozess ist reversibel solange man im linearen Bereich (zwischen den blauen Punkten A und B) bleibt. Es gilt das **Hooksche Gesetz** (siehe S. 4):

$$F/A = \sigma = E\Delta L/L.$$

Überdehnt man aber den Draht, z. B. bis zum Punkt C, und reduziert anschließend die Zugspannung wieder bis sie verschwindet, so kehrt er nicht mehr in die

Ruhelage zurück, sondern erreicht Punkt D. Er wird plastisch verformt. Versucht man ihn nun zu "reparieren", indem man ihn über den elastischen Bereich zusammendrückt, so erreicht man Punkt E. Lässt man ihn nun wieder los, so geht er in den kräftefreien Zustand über und erreicht Punkt F. Zieht man wieder genügend stark am Draht, so erreicht er wieder Punkt C. Dieses Phänomen nennt man Hysterese (oder Hysteresis).

Ziehen wir am Draht mit einer Kraft F und verlängern ihn um ΔL, so erfordert dies die Arbeit

$$W = \int_0^{\Delta L} F \, \mathrm{d}L \; = \; \int_0^{\Delta L} A\sigma \, \mathrm{d}L \; = \; \int_0^{\epsilon} A\sigma L \, \mathrm{d}\epsilon \; = \; V \int_0^{\epsilon} \sigma \, \mathrm{d}\epsilon.$$

Nun gilt ja im linearen Bereich $\sigma = E\epsilon$ (Seite 4), die Dehnung speichert also die

Energie

$$W = \frac{V}{2} E \epsilon^2,$$

die beim Loslassen wieder freigesetzt wird (Energieerhaltung). Im nicht-linearen Fall der Überdehnung gilt dies nicht mehr. Für die Dehnung bis zum Punkt C wird die Arbeit

$$W = V \int_0^{\epsilon_C} \sigma \, \mathrm{d}\epsilon$$

verrichtet, das ist die Fläche unter der blauen Kurve. Beim Loslassen kehrt der Draht aber nur zum Punkt D zurück, es wird nur die Energie

$$W = V \int_{\epsilon_D}^{\epsilon_C} \sigma \, \mathrm{d}\epsilon$$

freigesetzt, die der Fläche unter der schwarzen Kurve DC entspricht. Für einen Durchlauf einer Hysterese-Schleife CDEFC muss also die folgende Arbeit pro

Volumen aufgewendet werden:

$$\frac{W}{V} = \oint \sigma \, \mathrm{d}\epsilon,$$

wo das Kurvenintegral über die geschlossene Hystere-Schleife CDEFC läuft. Diese Energie entspricht der Fläche, die durch die Hysterese-Schleife eingeschlossen wird und wird in Wärme umgewandelt.

Dieser Prozess ist **irreversibel**, ein mehrfaches Durchlaufen kostet Arbeit, der Draht wird warm... und wird natürlich irgendwann reißen. Werkstücke sollen immer nur im linearen Bereich belastet werden und nur bis zu 2/3 ihrer Fließgrenze! Damit hält man sich einen Sicherheitfaktor 1,5. Die Fließgrenze liegt nur wenig oberhalb des Hookschen Proportionalitätbereichs.

Messung des Elastizitätsmoduls

Schallwellen pflanzen sich auch in einer Klaviersaite fort. Diese sind aus Federstahldraht gezogen und haben einen Elastizitätsmodul von ca. 210 GPa und einen Schubmodul von ca. 82 GPa, die Dichte beträgt $\rho = 7{,}86 \cdot 10^3$ kg/m^3. Nun gibt es zwei Sorten von Schallwellen in Festkörpern, longitudinale und transversale. Longitudinale sind kompressive Wellen, transversale sind Wellen, bei denen seitlich (transversal) ausgelenkt wird (siehe V9).
Die longitudinale und transversale Schallgeschwindigkeit in Festkörpern beträgt

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

wo $G = E/(2(1+\mu))$ der Schubmodul des Materials ist. Daraus lässt sich die

Poissonzahl $\mu = 0{,}28$ berechnen und wir finden für die Schallgeschwindigkeiten

$$c_l = \sqrt{\frac{210 \cdot 10^9}{7{,}86 \cdot 10^3} \cdot \frac{(1 - 0{,}28)}{(1 + 0{,}28)(1 - 2 \cdot 0{,}28)}} = 5{,}85 \text{ km/s},$$

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{82 \cdot 10^9}{7{,}86 \cdot 10^3}} = 3{,}23 \text{ km/s}.$$

Aus der Messung von c_l und c_t lassen sich also Materialeigenschaften wie G, E oder μ der Saite bestimmen. Diese Geschwindigkeiten sind deutlich größer als die Schallgeschwindigkeit in Luft von ungefähr 345 m/s, die sich aus (siehe V9)

$$c_{\text{Luft}} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \approx 340\text{m/s berechnet, und wo } \kappa = \frac{c_p}{c_V}$$

das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_V ist.

Schwingungen

Bereits früher (V3.pdf) haben wir gesehen, dass eine ausgelenkte Feder harmonisch schwingt. Die Bewegungsgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -Dx \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{D}{m}x \tag{1}$$

führte zu einer Schwingung

$$x(t) = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t}, \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{wo}$$

$$A = \left(\frac{x_0}{2} - \frac{i}{2}\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) e^{-i\omega t_0} \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{i}{2}\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) e^{i\omega t_0}.$$

Dabei haben wir auch gesehen, dass die Schwingung auch als $\sin$ oder $\cos$ Schwingung geschrieben werden kann. Im allgemeinsten Fall

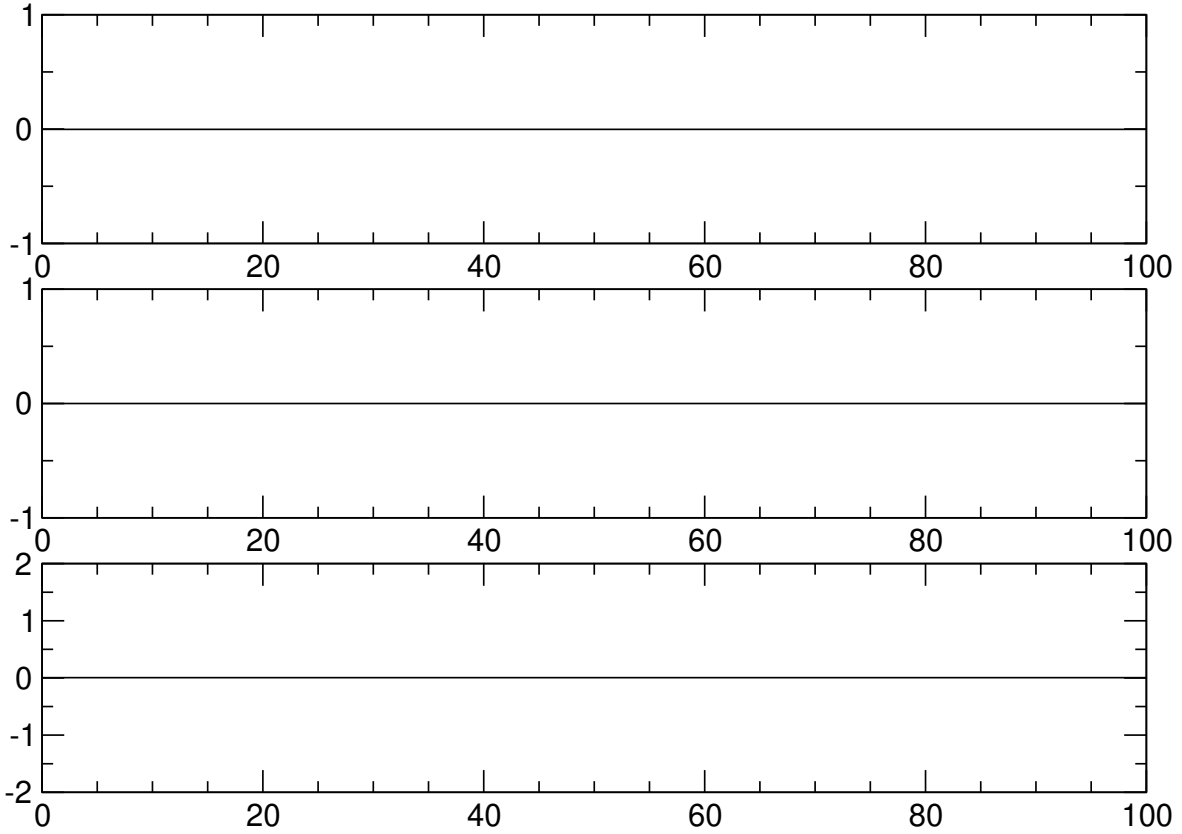
$$x(t) = a\cos(\omega t + \phi),$$

wo a die Amplitude, ω die Frequenz und ϕ die Phase der Schwingung bedeutet.

Zwei Schwingungen lassen sich auch überlagern, man spricht dabei von der **Superposition** von zwei Schwingungen,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1\cos(\omega_1 t + \phi_1), \\ x_2 &= a_2\cos(\omega_2 t + \phi_2), \\ x_3 &= x_1 + x_2, \\ x_3 &= a_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2\cos(\omega_2 t + \phi_2). \end{aligned}$$

Übung: Überlagerung zweier Schwingungen



Bei der Superposition spielen also sowohl die Frequenz, die Amplitude, wie

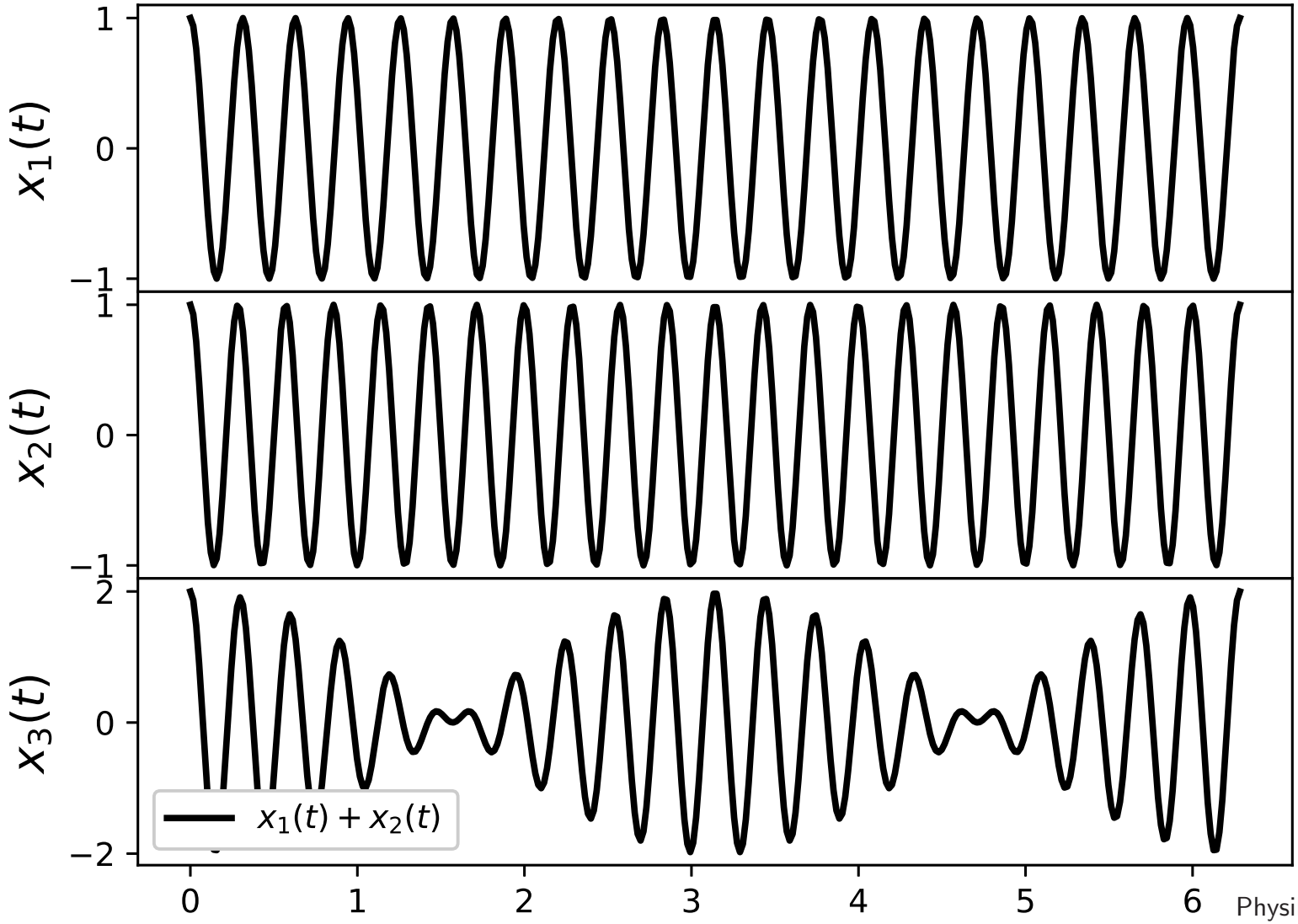
auch die Phase eine entscheidende Rolle für die entstehende Schwingung. Der wichtigste Spezialfall ist der der sog. Schwebung. Wir betrachten zwei Schwingungen derselben Amplitude, aber mit etwas verschiedener Frequenz (und der Einfachheit halber verschwindender Phase):

$$x_1(t) = a\cos\omega_1 t, \quad x_2(t) = a\cos\omega_2 t.$$

Nach dem Additionssatz für den $\cos$

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2a\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right),$$

also eine Modulation einer hochfrequenten Schwingung ($(\omega_1+\omega_2)/2$) durch eine niedrigfrequente ($(\omega_1-\omega_2)/2$) Schwingung.


$x_1(t)$
$x_2(t)$
$x_3(t)$
$x_1(t) + x_2(t)$
1
0
−1
2
−2
0
1
2
3
4
5
6

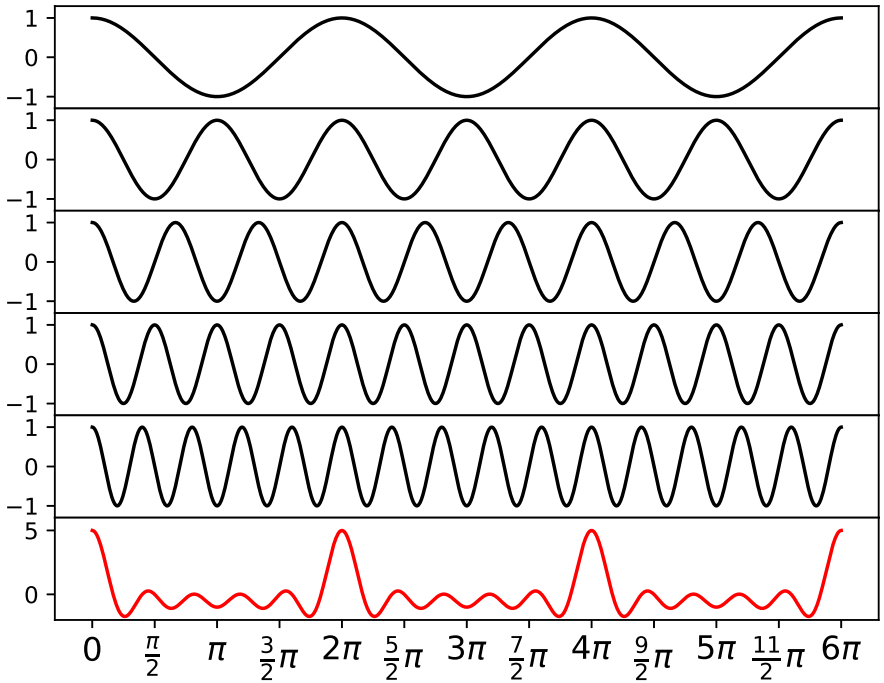
Mehrere Schwingungen können ebenfalls überlagert werden,

$$x(t) = \sum_n a_n \cos(\omega_n t + \phi_n).$$

Solange die Frequenzen untereinander rationale Verhältnisse aufweisen, so entsteht daraus immer eine periodische Schwingung! Umgekehrt lässt sich jede periodische Funktion $x(t) = x(t+T)$ immer in eine Summe der obigen Form bringen, in der die Frequenzen $\omega_n = n\omega_1$ erfüllen! Eine solche Zerlegung eines Signals heißt **Fourierzerlegung**, die obige Gleichung stellt eine **Fourierreihe** dar. Fourierzerlegungen sind ein äußerst wichtiges Werkzeug der Physik. Nicht-periodische Funktionen können durch sog. Fourierintegrale behandelt werden (siehe EMMP oder später).

Überlagerungen von zwei Schwingungen in zwei Richtungen (x und y) führen zu zweidimensionalen Figuren, sog. **Lissajousche Figuren** (siehe S. 61).

Beispiel für mehrere überlagerte Schwingungen

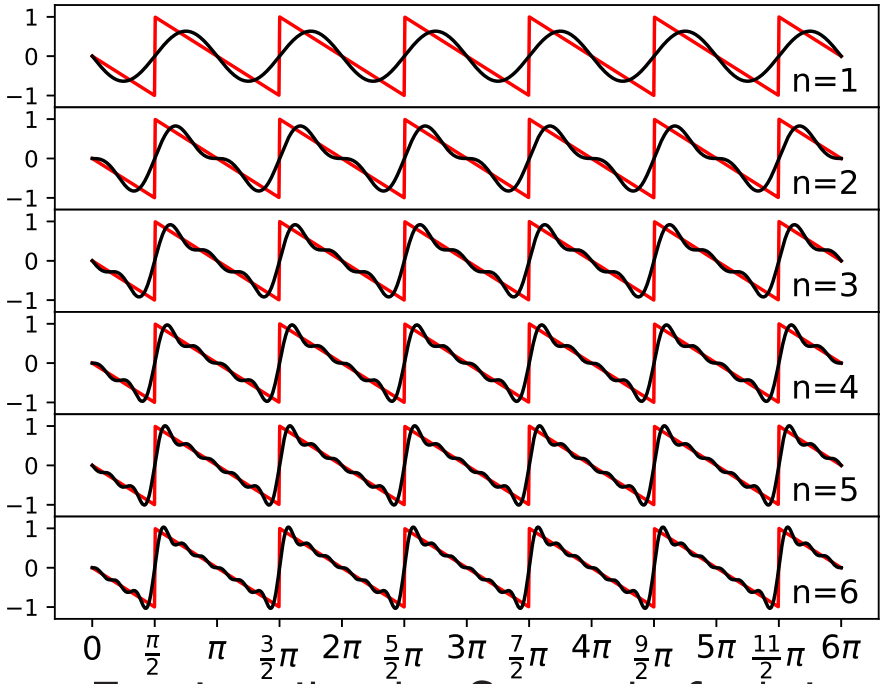


Links ist das Beispiel für die Überlagerung von fünf cos-Funktionen gegeben.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{5} \cos(n \cdot \omega_1 t)$$

Von oben nach unten sind die einzelnen Beiträge $\cos(n \cdot \omega_n)$ zu sehen, zuunterst in rot die Summe. Man sieht sehr schön, wie bei Mehrfachen von 2π ein Maximum erreicht wird und sich die verschiedenen Schwingungen zwischen diesen Werten immer stärker aufheben. Würde man in der Summe immer mehr Terme berücksichtigen, so ergäben sich immer schärfere Maxima bei Mehrfachen von 2π und dazwischen immer glättere Minima.

Beispiel Sägezahnfunktion



Links ist rot eine sogenannte Sägezahnfunktion dargestellt. Sie ist periodisch mit einer Periode von π. Schwarz überlagert sind von oben nach unten eine periodische Sinus-Funktion $(n = 1)$ und die Summe von n Sinus-Funktionen, gewichtet mit einem Faktor $-1^i \cdot 2/(i\pi)$. Die Sägezahnfunktion wird mit einer wachsenden Anzahl von Termen immer genauer angenähert. Die sog. Fourierreihe der Sägezahnfunktion ist gegeben durch den Grenzwert $n \to \infty$,

$$S(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-1^i}{i} \sin(i\omega x).$$

Gedämpfte Schwingungen

Reibungsverluste z. B. in Luft oder in einer Flüssigkeit führen zu einer Dämpfung jeder Schwingung. Zur rücktreibenden Kraft $\vec{F} = -D\vec{x}$ kommt z. B. die Reibungskraft nach Stokes dazu, $\vec{F}_R = -6\pi\eta r\vec{v} = -b\vec{v}$, die proportional zur momentanen Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Massenpunktes (oder des Pendels) ist. Die Bewegungsgleichung (Schwingungsgleichung, Glg. 1) wird deshalb zu

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - Dx,$$

welche oft vereinfacht geschrieben wird

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \text{wo} \;\; \omega_0^2 = \frac{D}{m} \;\; \text{und} \;\; 2\gamma = \frac{b}{m}.$$

Ansatz $x(t) = c\exp(\lambda t)$ und Einsetzen in die Schwingungsgleichung:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Die allgemeinste Lösung lautet nun

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2}t} + C_2 e^{-(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2}t}\right).$$

Eine reelle Lösung ist wiederum nur möglich, wenn C_1 und C_2 konjugiert komplex sind. Offensichtlich spielt das Verhältnis der rücktreibenden Kraft zur Reibungskraft für die Natur der Schwingung eine entscheidende Rolle:

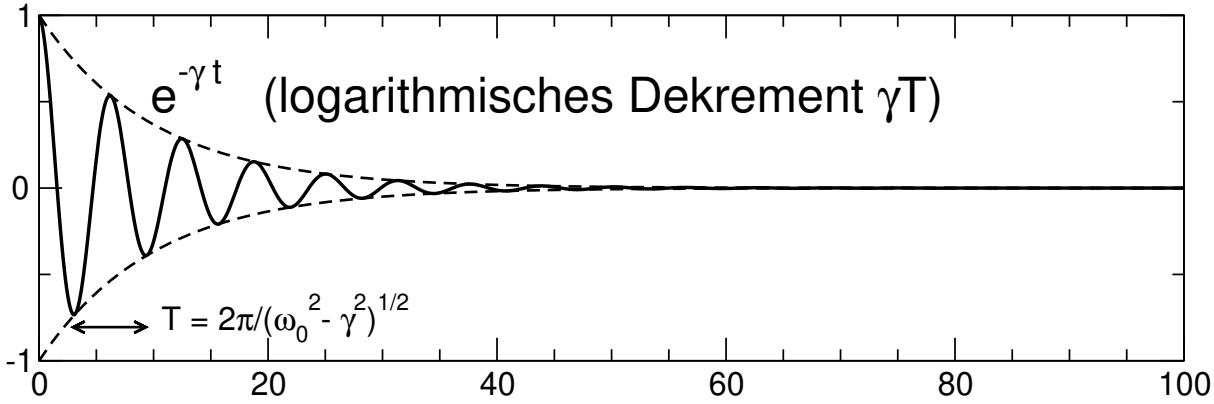
$\gamma < \omega_0$	schwache Dämpfung
$\gamma = \omega_0$	aperiodischer Grenzfall
$\gamma > \omega_0$	starke Dämpfung

Schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0$

Definiere $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 < \omega_0^2$, womit $\lambda = -\gamma \pm i\omega$. Damit

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ce^{i\omega t} + \bar{C}e^{-i\omega t}\right) = Ae^{-\gamma t}\cos\left(\omega t + \phi\right), \text{ wo } A = 2|C| \text{ und weil}$$

C als $|C|e^{i\phi}$ und $\bar{C}$ als $|C|e^{-i\phi}$ geschrieben werden kann. Dies beschreibt eine gedämpfte Schwingung, deren Amplitude exponentiell abnimmt, $A\exp(-\gamma t)$.



Starke Dämpfung: $\gamma > \omega_0$

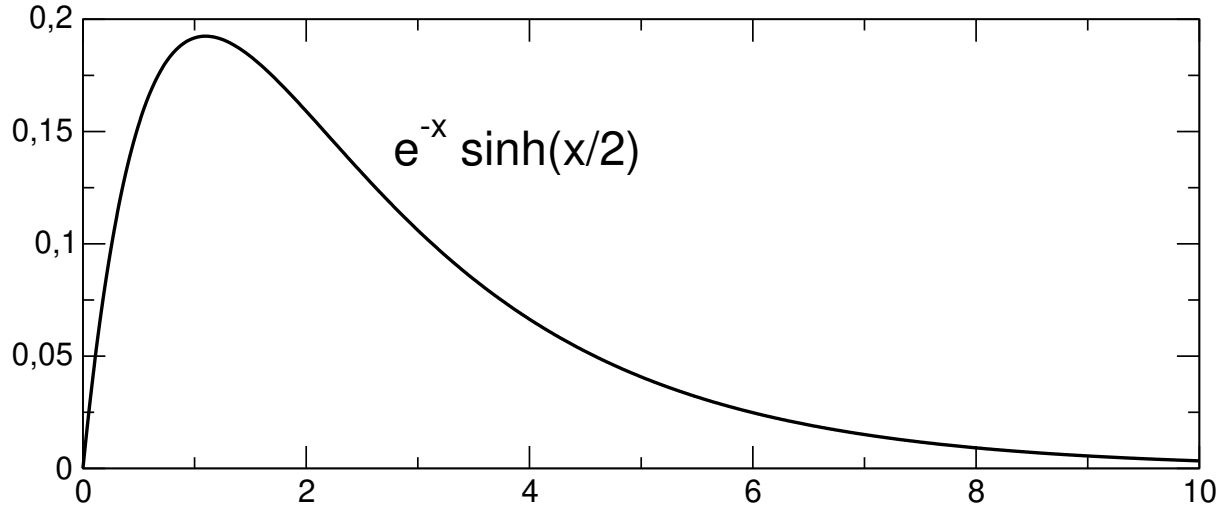
$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \alpha, \text{ wo } \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \text{ reell.}$$

Damit wird die allg. Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}\right).$$

Anfangsbedingungen: $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, woraus $C_1 + C_2 = 0$ und $C_1 - C_2 = \dot{x}_0/\alpha$ folgt. Damit

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{2\alpha} e^{-\gamma t}\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right) = \frac{\dot{x}_0}{\alpha} e^{-\gamma t} \sinh(\alpha t).$$



Die Amplitude zeigt ein einziges Maximum und kriecht dann sehr langsam gegen Null (für $t \longrightarrow \infty$), man nennt diesen Fall deshalb auch den "Kriechfall".

Der aperiodische Grenzfall: $\gamma = \omega_0$

λ entartet, d. h. $\lambda = -\gamma \pm 0$. Ansatz $x(t) = C(t)e^{\lambda t}$. Einsetzen in Schwingungsgleichung

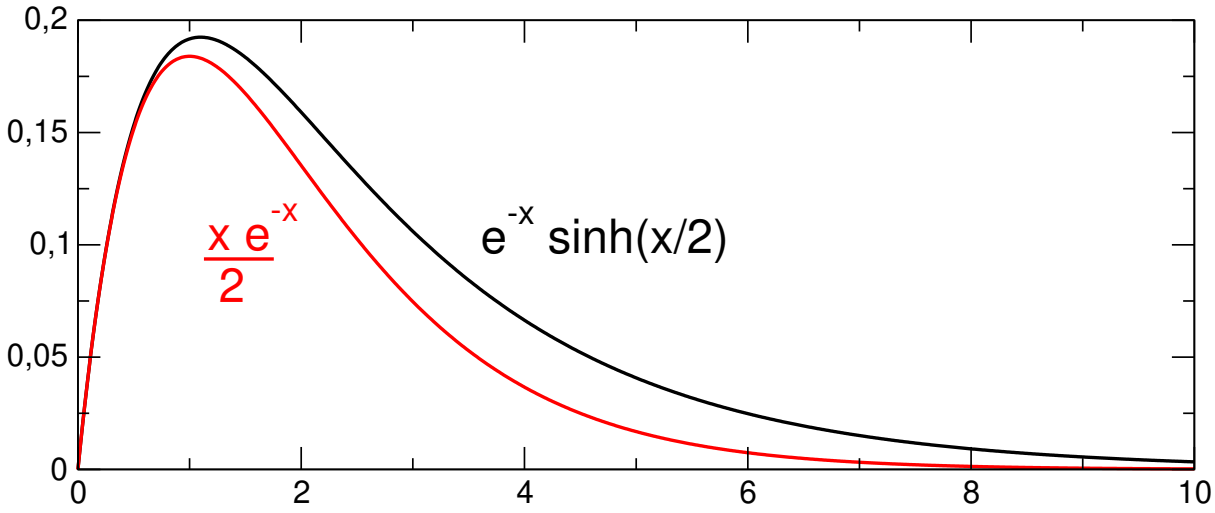
$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{C} + 2(\lambda+\gamma)\dot{C} + \left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right) C &= 0, \quad \text{wo} \quad \lambda = -\gamma = -\omega_0 \\ \ddot{C} &= 0, \quad \text{womit} \quad C(t) = C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Die allgemeinste Lösung ist also

$$x(t) = (C_1 t + C_2)\, e^{-\gamma t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ erhalten wir

$$x(t) = \dot{x}_0 t e^{-\gamma t}.$$


0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
2
4
6
8
10
x e^-x / 2
e^-x sinh(x/2)

Erzwungene Schwingungen

Oft wird eine Schwingung angeregt oder erzwungen durch eine ortsunabhängige, periodische Kraft $F = Fe^{i\omega t}$. Die nun inhomogene Schwingungsgleichung lautet dann

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = Ke^{i\omega t}, \text{ wo } K = \frac{F}{m},$$

Ansatz $x(t) = Ae^{i\omega t}$ einsetzen, 2 Integrationskonstanten

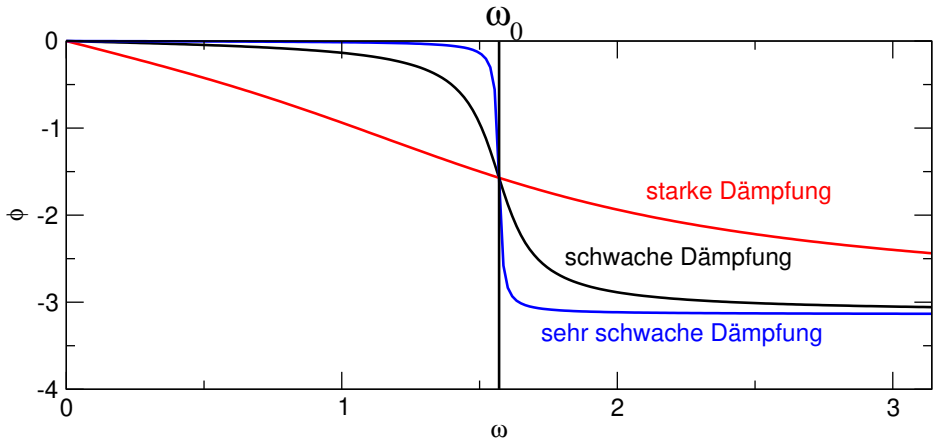
$$-A\omega^2 e^{i\omega t} + 2i\gamma\omega A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = Ke^{i\omega t}$$

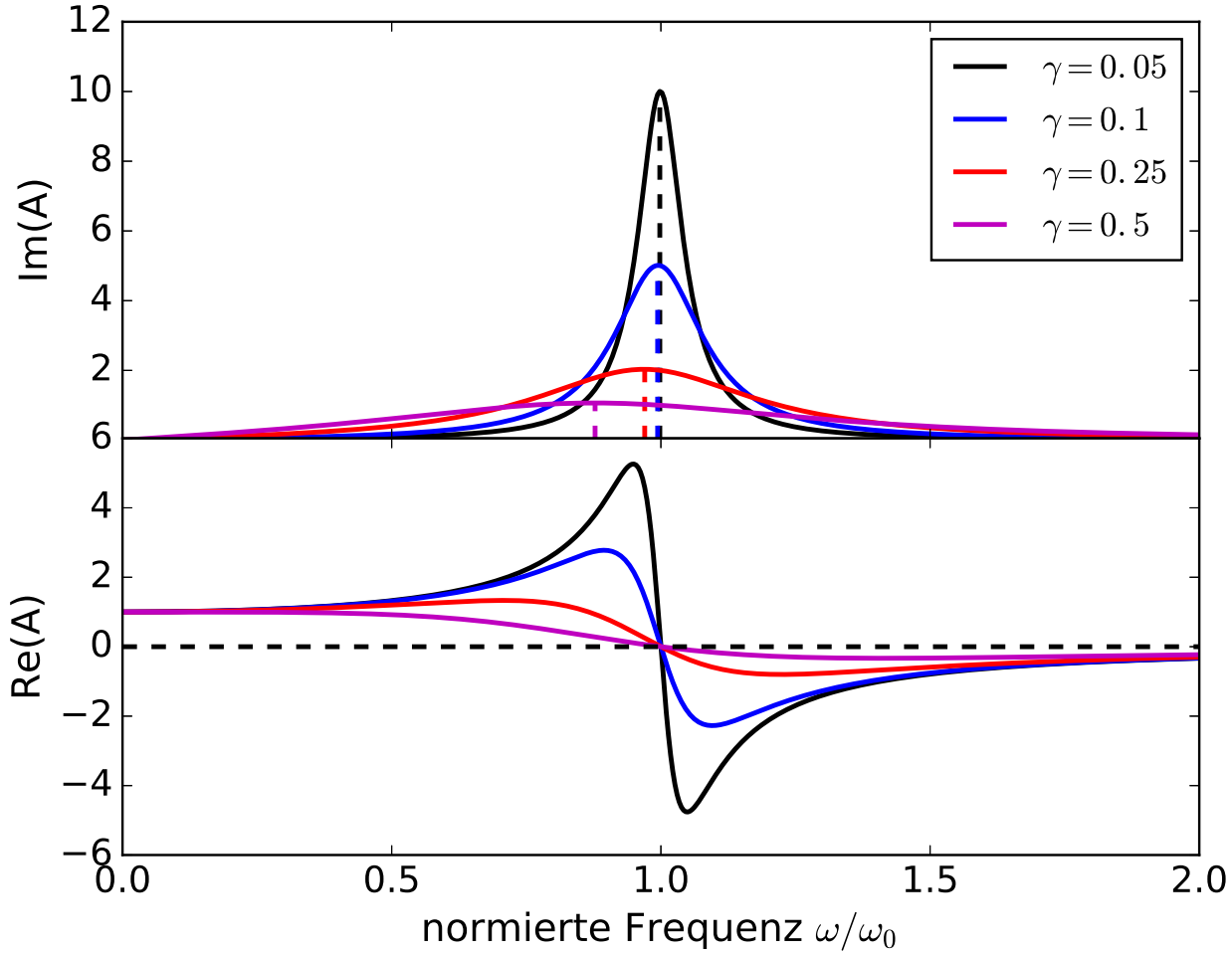
$$A = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - 2i\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega\right)^2} K, \longrightarrow A = |A|e^{i\phi}.$$

Damit sind die Phase ϕ und die Amplitude $|A| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(A) + \mathrm{Im}^2(A)}$ bekannt,

$$\tan\phi = \frac{\mathrm{Im}(A)}{\mathrm{Re}(A)} = \arctan\left(\frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad \text{und} \quad |A| = \frac{F/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega\right)^2}}$$

Die Phasenverschiebung zwischen der anregenden und erzwungenen Schwingung ist eine Funktion der Frequenz ω.




12
10
8
6
4
2
6
Im(A)
$\gamma = 0.05$
$\gamma = 0.1$
$\gamma = 0.25$
$\gamma = 0.5$
4
2
0
−2
−4
−6
Re(A)
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
normierte Frequenz ω/ω_0

Maximum der Resonanz bei $\omega = \omega_R$ durch Differentiation des Nenners von A: Aus

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + \left(2\gamma\omega\right)^2\right) = 0$$

folgt

$$\omega_m^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \quad \longrightarrow \quad \omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

Dies ist nicht *exakt* die Resonanzfrequenz, $\omega_R = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, für kleine Dämpfungskonstanten γ ist der Unterschied aber sehr klein. In der Abb. auf Seite 49 sind die Maxima vom Im(A) gestrichelt angedeutet.

Eine Resonanzkatastrophe ereignete sich bei der Brücke von Tacoma, als starke Böen diese Brücke 1940 in resonante Schwingungen versetzten. Ein beeindruckendes Video ist z. B. hier zu finden:
`https://archive.org/details/SF121`

Energie eines harmonischen Oszillators

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Mittelung über eine Schwingungsperiode T

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{4} A^2 \omega_0^2.$$

Dieselbe Überlegung für die potentielle Energie:

$$E_{\mathrm{pot}} = \int_0^x \mathrm{d}x F(x) = \frac{D}{2} x^2 = \frac{D}{2} A^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \cos^2 \omega_0 t.$$

Mittelung:

$$\langle E_{\mathrm{pot}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \frac{D}{2} x^2 = \frac{m}{4} A^2 \omega_0^2.$$

Die Summe ist erhalten:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} &= \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t + \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \cos^2 \omega_0 t \\ &= \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 = E = \text{const.} \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle = \langle E_{\mathrm{pot}} \rangle.$$

Energie in der erzwungenen Schwingung

Schwingungsgleichung mit $\dot{x}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} \ddot{x}\dot{x} + \omega_0^2 x\dot{x} &= -2\gamma\dot{x}^2 + F(t)\dot{x}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2\right) &= -2\gamma\dot{x}^2 + F(t)\dot{x}. \end{aligned}$$

Im stationären Fall ist

$$2\gamma\dot{x}^2 = F(t)\dot{x},$$

d. h. die eingeführte Energie wird durch Reibung vollständig in Wärme verwandelt. Mit dem Ansatz $x(t) = A\exp(i\omega t)$ lautet die pro Schwingung aufgenommene

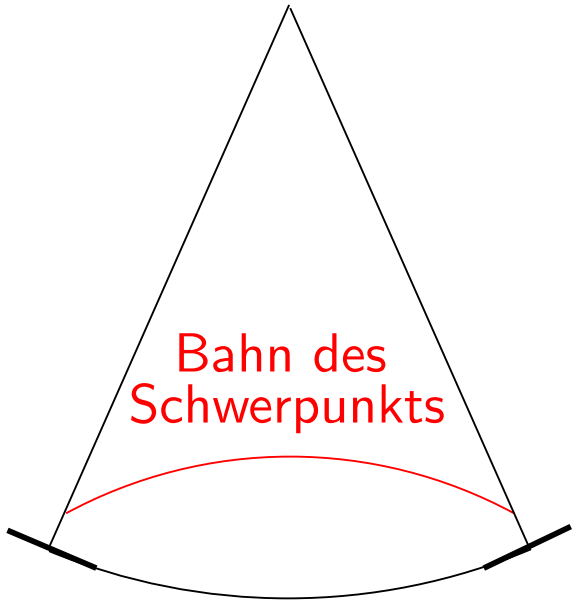
(und "verbratene") Energie dann

$$\begin{aligned} W &= 2\gamma m \int_0^T \mathrm{d}t \dot{x}^2 = -2\gamma m \omega^2 A^2 \int_0^T \mathrm{d}t e^{2i\omega t} \\ &= -2\gamma m \omega^2 A^2 \int_0^T \mathrm{d}t \left(\cos \omega t + i \sin \omega t\right)^2 \\ &= -2\gamma m \omega^2 A^2 T, \end{aligned}$$

die aufgenommene Leistung folglich

$$P = \frac{W}{T} = -2\gamma m \omega^2 A^2.$$

Kinderschaukel: parametrischer Oszillator



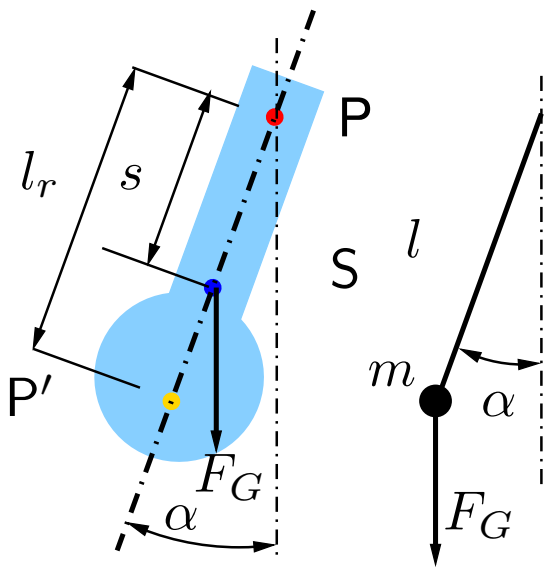
Bahn der Schaukel

Für das mathematische Pendel hatten wir gefunden (V7, Seite 12), dass $g\phi = -L\ddot{\phi}$, wo die Schwingungsfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Was passiert nun, wenn die Schwingungsfrequenz ω nicht mehr konstant ist? Dies geschieht z.B. beim Schaukeln. Hier bewegt sich der Schwerpunkt entlang des Seils "auf und ab", L ändert sich also periodisch und damit eben auch $\omega = \omega(t)$. Die (ungedämpfte) Schwingungsgleichung lautet deshalb

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x(t) = 0.$$

Die mathematische Lösung ist kompliziert, siehe Demtröder, die "intuitive" lernen wir bereits als Kind.

Das physikalische Pendel



Der Drehimpuls des Pendel lautet $L = J\omega$, wo J das Trägheitsmoment des Pendels relativ zu seinem Aufhängepunkt sei. Für den Massenpunkt rechts ist dies $J_P = ml^2$, für das physikalische Pendel links müsste J berechnet werden und hängt von seiner Form und Massenverteilung ab. Die Bewegungsgleichung für das mathematische Pendel rechts lautet (V7, p. 14)

$$ml\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha \quad \xrightarrow{\text{Näherung}} \quad l\ddot{\alpha} = -g\alpha,$$

die bekannte Schwingungsgleichung. Für das physikalische Pendel links lautet die Bewegungsgleichung

$$J\dot{\omega} = -m\,g\,s\,\sin\alpha, \;\; \text{wo } \omega = \dot{\alpha} \quad \xrightarrow{\text{Näherung}} \quad J\,\dot{\omega} = -m\,g\,s\,\alpha.$$

Am physikalischen Pendel greift ein Drehmoment $M = s\,m\,g\,\sin\alpha$ an, was zu einer Änderung des Drehimpulses $J\dot{\omega}$ führt. Wir können diese Schwingungsgleichung mit $\ddot{\alpha} = \dot{\omega}$ umschreiben,

$$J\ddot{\alpha} = -m\,g\,s\,\alpha \quad \longrightarrow \quad \ddot{\alpha} = -\frac{m\,g\,s}{J}\alpha,$$

womit wir sehen, dass die Größe $l_r \doteq J/(m\,s)$, der Länge eines mathematischen Pendels mit derselben Schwingungsdauer entspricht. Man nennt diese Länge l_r deshalb die **reduzierte Pendellänge**. Man könnte die gesamte Masse m des physikalischen Pendels im Punkte P′ vereinigen und hätte dieselbe Schwigungsdauer.

Dies bedeutet aber auch, dass man das physikalische Pendel auch im Punkt P′ aufhängen könnte und genau dieselbe Schwingungsdauer T' messen würde. Wir werden dies auf Seite 58 gleich zeigen.

Das physikalische Pendel II – die reduzierte Pendellänge

Das Trägheitsmoment des physikalischen Pendels relativ zum Aufhängepunkt lässt sich mit Hilfe des Satz von Steiner berechnen. Sei J_S das Trägheitsmoment relativ zu seinem Schwerpunkt, so ist

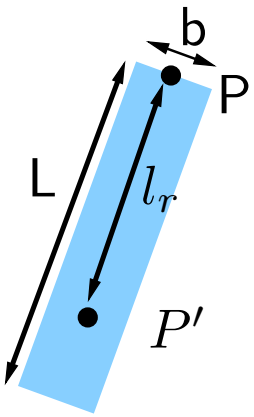
$$J = J_S + ms^2, \text{ womit } l_r = \frac{J}{m\,s} = \frac{J_S}{m\,s} + s. \tag{2}$$

Jetzt lassen wir das Pendel um den Punkt P′ schwingen, die reduzierte Pendellänge ist dann

$$l'_r = \frac{J_S}{m\,(l_r - s)} + (l_r - s) \xrightarrow{\text{Glg. 2}} l'_r = \frac{J_S}{m\frac{J_S}{m\,s}} + \frac{J_S}{m\,s} = s + \frac{J_S}{m\,s} = l_r,$$

wie man durch Einsetzen von l_r aus Glg.2 einfach findet. Folglich ist $T = T'$.

Übung: Holzstab als Pendel



Der homogene Holzstab links habe die Masse m und Länge L und soll um den Punkt P pendeln. In welcher Länge l_r muss ich ein Loch bohren, um dieselbe Schwingungsdauer zu erreichen, wenn ich den Holzstab dort (im Punkte P′) aufhänge? Im Folgenden setzen wir $m = \rho \cdot c \cdot b \cdot L$, wo ρ die Dichte und c die Dicke des Stabes seien.
Lösung: Das Trägheitsmoment J des Stabes um den Punkt P ist

$$I_P = \rho\, z \int l^2 \mathrm{d}A = \rho\, z \int_{-b/2}^{+b/2} \int_0^L l^2 \mathrm{d}L\, \mathrm{d}b = \rho\, z\, b \frac{L^3}{3} = \frac{L^2}{3} m.$$

Mit $s = L/2$ muss nach den vorherigen Überlegungen gelten,

$$l_r = \frac{J}{m\, s} = \frac{\frac{1}{3} m L^2}{\frac{1}{2} m L} = \frac{2}{3} L.$$

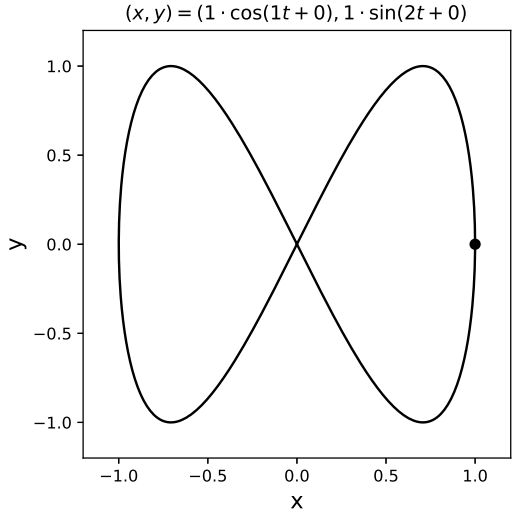
Das Flächenträgheitsmoment

Wie Sie sicher bemerkt haben, spielten die Dichte, die Breite und die Dicke des Holzstabes im Beispiel auf Seite 59 in der ganzen Rechnung überhaupt keine Rolle. Wichtig sind allein die Länge des Stabes und seine Masse bzw. seine Fläche. Man rechnet deshalb oft mit dem sogenannten **Flächenträgheitsmoment**

$$J = \int z^2 \mathrm{d}A \; = \; \int\int z^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z, \;\; \text{wo } A \text{ die Querschnittsfläche des Körpers ist..}$$

Achtung: Dies geht nur für homogene Körper mit gleichbleibender Dicke!
Für Rechnungen mit dem Flächenträgheitsmoment gilt der Satz von Steiner unverändert.

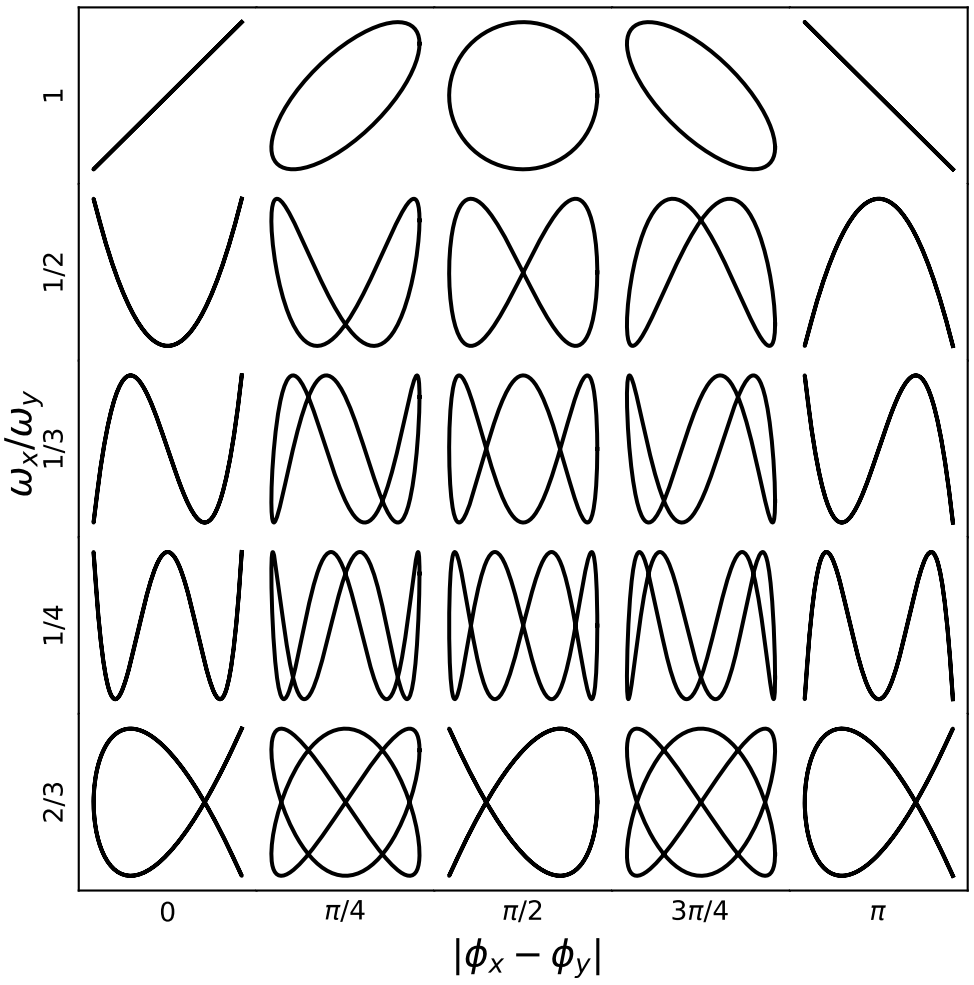
Überlagerung in zwei Dimensionen – Lissajous-Figuren



Wir überlagern nun zwei Schwingungen

$$x = A_x \cdot \cos(\omega_x \cdot t + \varphi_x); \quad y = A_y \cdot \sin(\omega_y \cdot t + \varphi_y),$$

die sich in ihrer Amplitude A, Frequenz ω und Phase φ unterscheiden können. Sind alle Parameter gleich, ergibt sich ein Kreis. Ist $\omega_y = 2\omega_x$, so ergibt sich die Abb. links. Der Punkt gibt den Startpunkt zur Zeit $t = 0$ an. Solange ω_x/ω_y eine rationale Zahl ist, so muss die Kurve geschlossen sein, man nennt solche Kurven **Lissajousche Kurven**. Ist das Verhältnis ω_x/ω_y irrational, so füllt die Kurve die ganze Fläche $-A_x \leq x \leq A_x; \quad -A_y \leq y \leq A_y$ aus. Stellt man sich diese Figuren dreidimensional vor, so bestimmt Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y$ den Blickwinkel. Eine Übersicht über das Zusammenspiel von ω_x/ω_y und $|\varphi_x - \varphi_y|$ ist auf der nächsten Seite gegeben. Dabei ist $A_x > A_y$.



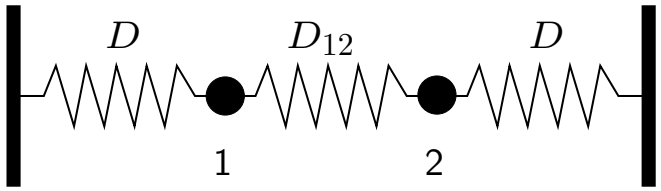
Auf der gewohnten Webseite steht auch ein python-Skript `lissajous.py` zur Verfügung, mit welchem Sie Lissajous-Figuren animieren können.

Für die Graphik links wurde

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \cdot \cos(\omega_x \cdot t + \varphi_x), \\ y(t) &= A_y \cdot \sin(\omega_y \cdot t + \varphi_y) \end{aligned}$$

mit $A_x = A_y = 1$ verwendet. Offensichtlich spielt das Verhältnis von ω_x zu ω_y und die Differenz $\Phi_x - \Phi_y$ eine Rolle.

Gekoppelte Pendel



Zwei Massen seien mit Federn (mit Federkonstanten D) an ihre Ruhelagen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ gekoppelt. Berücksichtigen wir nur die direkte Kopplung an die Wand ($D_{12} = 0$), so haben wir zwei separate Schwingungen, $m\ddot{x}_1 = -Dx_1$ und $m\ddot{x}_2 = -Dx_2$. Nun koppeln wir sie zusätzlich durch eine Feder mit D_{12}. Dann spürt Masse 1 zusätzlich eine Kraft $D_{12}(x_2 - x_1)$ und Masse 2 zusätzlich eine Kraft mit umgekehrtem Vorzeichen, $-D_{12}(x_2 - x_1)$. Es ergibt sich also das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -Dx_1 - D_{12}(x_1 - x_2), \\ m\ddot{x}_2 &= -Dx_2 - D_{12}(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Dies sind zwei gekoppelte Differentialgleichungen! Durch Addieren und Subtra-

hieren erhält man zwei neue Gleichungen,

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -D(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -D(x_1 - x_2) - 2D_{12}(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

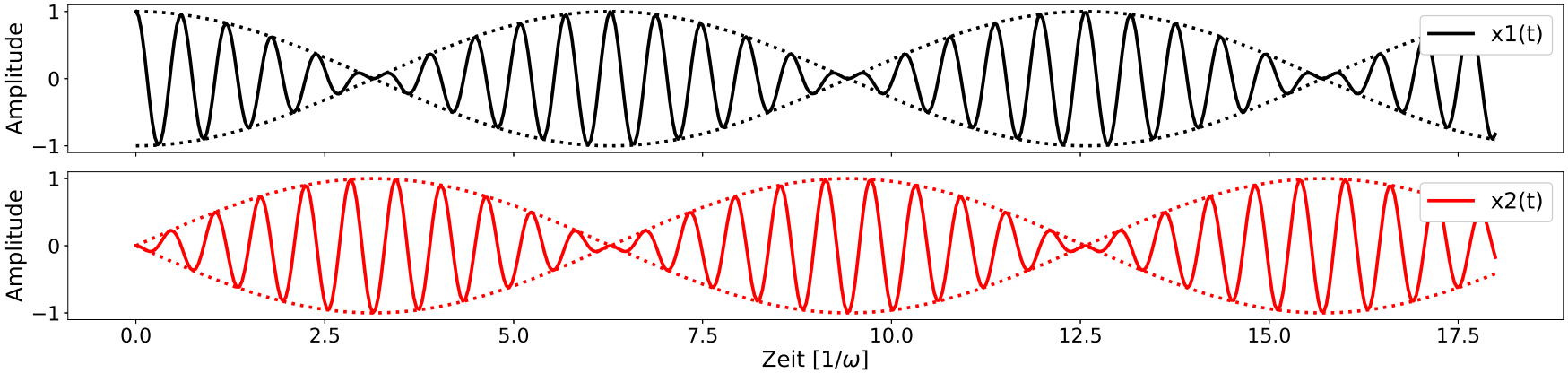
was dazu einlädt, neue Variablen $\xi^+ = (x_1 + x_2)/2$ und $\xi^- = (x_1 - x_2)/2$ einzuführen.

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}^+ &= -D\xi^+ \quad \text{mit} \quad \omega_1^2 = \frac{D}{m} \\ m\ddot{\xi}^- &= -(D + 2D_{12})\xi^- \quad \text{mit} \quad \omega_2^2 = \frac{D + 2D_{12}}{m} \end{aligned}$$

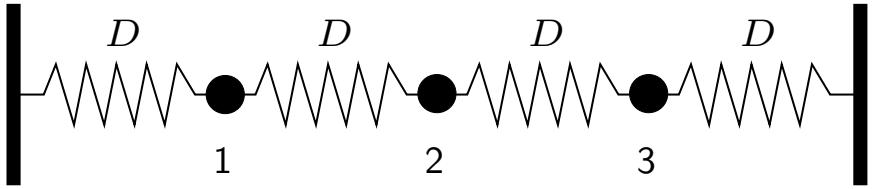
Die separierten Lösungen ξ^+ und ξ^- können zurücktransformiert werden nach

$x_1 = \xi^+ + \xi^-$ und $x_2 = \xi^+ - \xi^-$, und führen zu einer **Schwebung**.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \\
x_2 &= -2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right).
\end{aligned}
$$



Mehrere gekoppelte Pendel



Nun koppeln wir mehrere Pendel aneinander. In der Situation links koppelt Masse 1 an Masse 2 und Masse 2 wiederum and Masse 1 und 3. Mathematisch

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -Dx_1 - D(x_1 - x_2) = -2Dx_1 + Dx_2, \\ m\ddot{x}_2 &= Dx_1 - 2Dx_2 + Dx_3, \\ m\ddot{x}_3 &= Dx_2 - 2Dx_3. \end{aligned}$$

Dies kann einfacher in Matrixform geschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{D}{m}\right) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Nun haben wir hier aber noch keine Dämpfung vorgesehen, im Prinzip können die einzelnen Massen verschieden sein, wie auch die Federkonstanten. In diesem allgemeineren Fall sieht das System der Differentialgleichungen so aus:

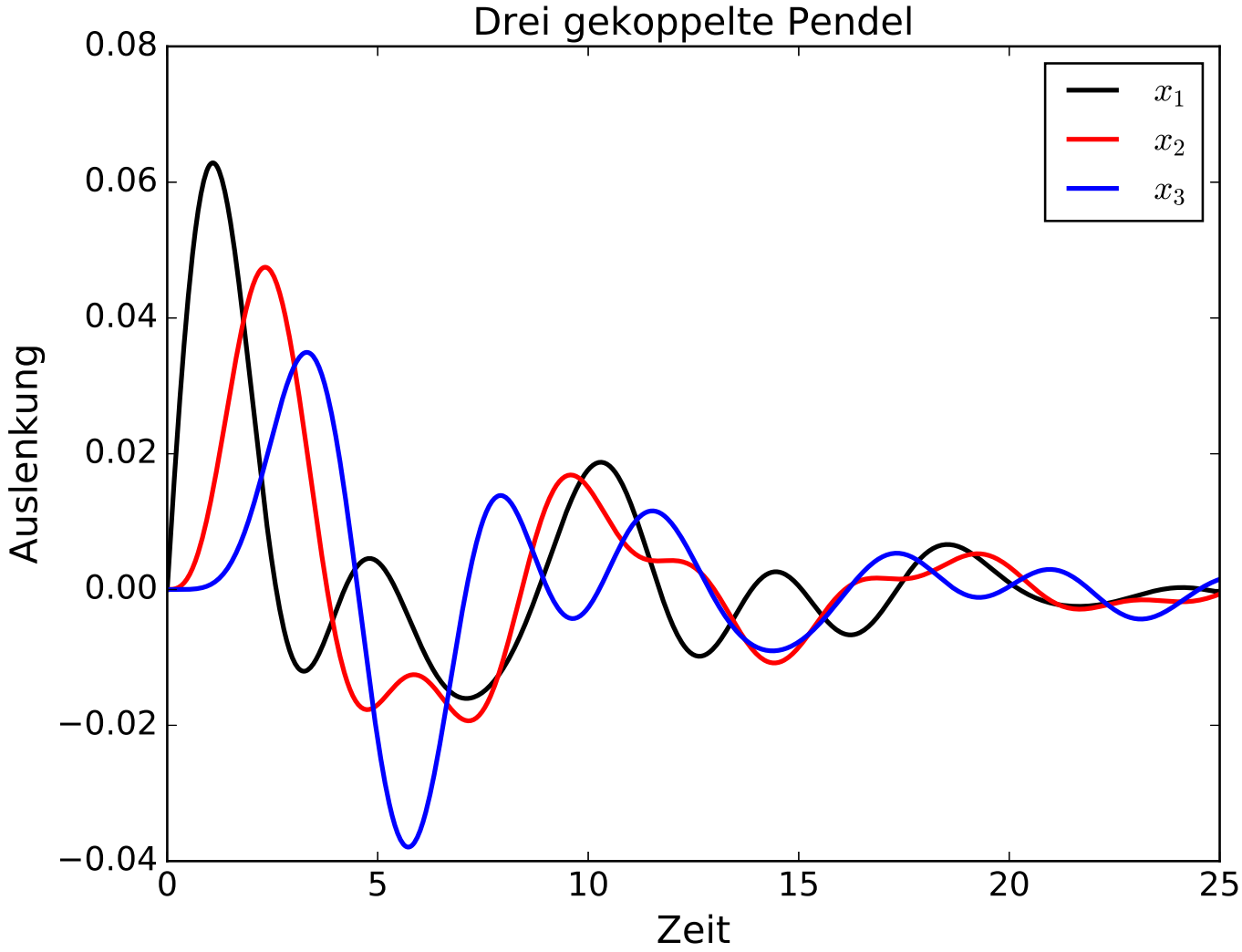
$$\begin{pmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 \\ m_3\ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1\dot{x}_1 \\ b_2\dot{x}_2 \\ b_3\dot{x}_3 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

wo die b_i die Dämpfungskonstanten sind. Dieses System von 3 gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung kann man nun in eines von 6 gekoppelten Differentialgleichungen ersten Grades überführen, indem wir $y_1 = \dot{x}_1$, $y_2 = \dot{x}_2$

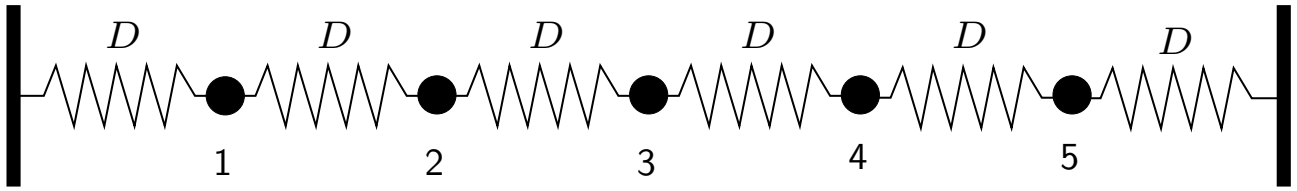
und $y_3 = \dot{x}_3$ definieren. Wir haben dann

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1, \\
\dot{y}_1 &= \frac{1}{m_1}\left[-b_1 y_1 - 2Dx_1 + Dx_2\right], \\
\dot{x}_2 &= y_2, \\
\dot{y}_2 &= \frac{1}{m_2}\left[-b_2 y_2 + x_1 - 2Dx_2 + x_3\right], \\
\dot{x}_3 &= y_3, \\
\dot{y}_3 &= \frac{1}{m_3}\left[-b_3 y_3 + x_2 - 2Dx_3\right].
\end{aligned}$$

Eine analytische Lösung ist mühsam, eine numerische erstaunlich einfach, siehe das python-Skript `drei-oszillatoren.py` auf der gewohnten Webseite. Die Lösung ist in der folgenden Figur abgebildet.


Drei gekoppelte Pendel
Auslenkung
Zeit
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
−0.02
−0.04
0
5
10
15
20
25
x_1
x_2
x_3

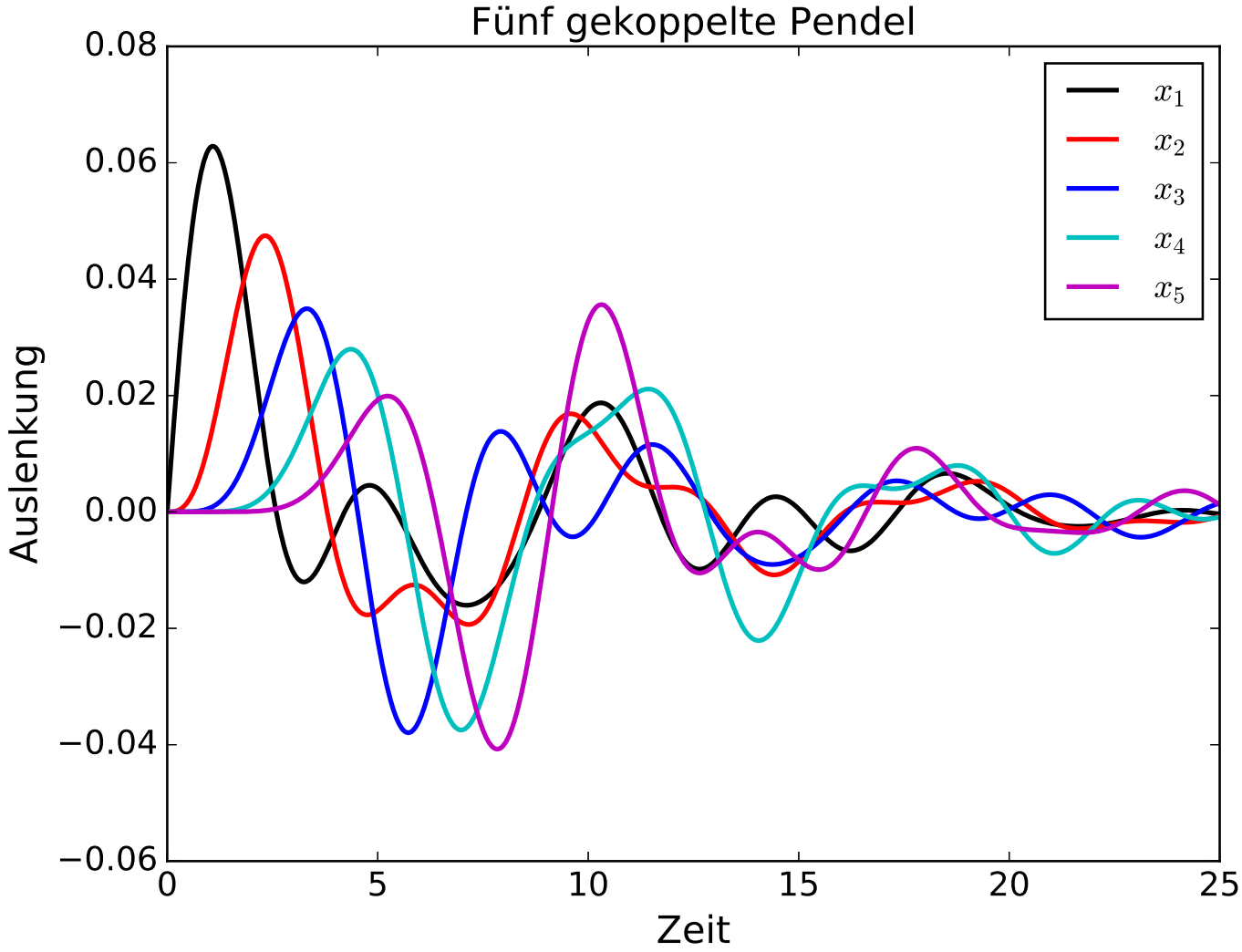
Mehrere gekoppelte Pendel II



Nach den Überlegungen der letzten Folie kann das System links geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 \\ m_3\ddot{x}_3 + b_3\dot{x}_3 \\ m_4\ddot{x}_4 + b_4\dot{x}_4 \\ m_5\ddot{x}_5 + b_5\dot{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2D & D & 0 & 0 & 0 \\ D & -2D & D & 0 & 0 \\ 0 & D & -2D & D & 0 \\ 0 & 0 & D & -2D & D \\ 0 & 0 & 0 & D & -2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix},$$

was auch wieder numerisch gelöst werden kann.


Fünf gekoppelte Pendel
Auslenkung
Zeit
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
−0.02
−0.04
−0.06
0
5
10
15
20
25
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5

Sie finden auf der gewohnten Web-Seite auch ein python-Skript, in welchem Sie für eine beliebige Anzahl n Oszillatoren das Verhalten berechnen können und auch die Amplitude und Kopplungen verändern können. Spielen Sie damit rum und überlegen Sie sich, was die Resultate bedeuten.

`https://www.ieap.uni-kiel.de/et/people/wimmer/teaching/PhysI/`

Verändern Sie insbesondere die Randbedingungen und untersuchen Sie, was dies bewirkt. Wie breitet sich das Maximum in der Amplitude der einzelnen Oszillatoren entlang der Reihe von Oszillatoren aus? Sie können und dürfen den Code natürlich auch verändern und verbessern!