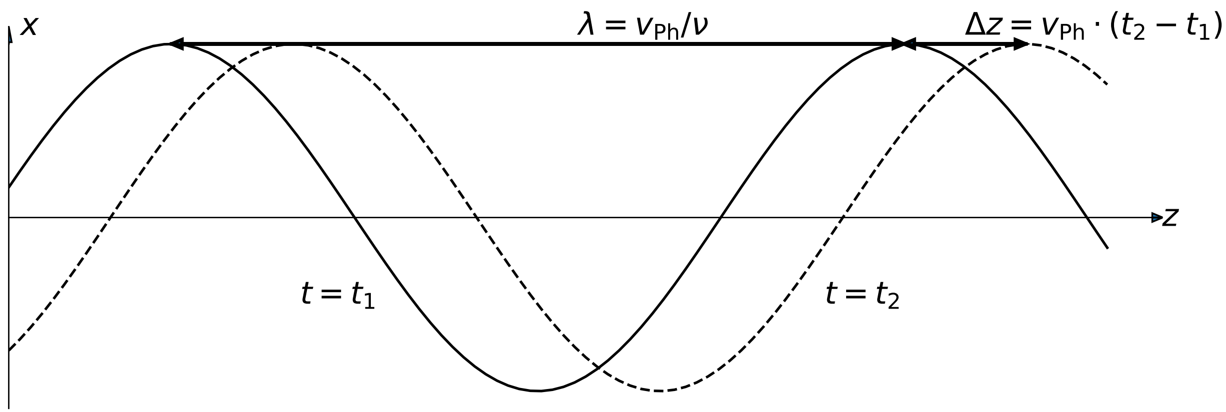
Wie beschreibt man Wellen?

Die in V8 beschriebenen gekoppelten Pendel illustrieren, wie die Schwingung von einem Pendel zum nächsten übertragen wird. Auf diese Art und Weise wird die Energie in der Schwingung von einem Pendel zum nächsten transportiert. Man nennt diese räumliche Ausbreitung von Schwingungen eine **Welle**. Wie schnell sie sich ausbreitet hängt von der Kopplung zwischen den einzelnen schwingenden Systemen und von deren Massen ab.

Zu Beschreibung von Wellen führen wir vier wichtige Größen ein. Die **Wellenlänge** λ ist der Abstand von Wellenberg zu Wellenberg, die **Amplitude** A ist die Auslenkung der Welle von der Ruhelage. Natürlich kann man die Wellenlänge auch anders definieren. Sie ist immer der Abstand zwischen zwei äquivalenten Punkten der Welle. Beschreiben wir die Welle z. B. durch eine Funktion $f(z,t)$, so gilt $f(z,t) = f(z+\lambda,t)$. Die Phasen der Schwingung sind alle gleich.



Wir betrachten nun eine Schwingung $x(t) = A \sin \omega t$ der Frequenz ω und bewegen einen Stift so hin und her. Ziehen wir darunter ein Blatt Papier mit einer konstanten Geschwindigkeit v hindurch, so sehen wir eine schöne Darstellung der $\sin$-Funktion. Je nach Geschwindigkeit v erscheinen mehr oder weniger Wellen pro Längeneinheit auf dem Papier. Die Schwingung erscheint auf dem Papier als eine Funktion $x(z,t) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t - z/v))$, eine **Welle** mit Amplitude A und Wellenlänge $\lambda = vT$, wo $T = 2\pi/\omega = 1/\nu$ die Periode der Schwingung ist.

Wenn sich alle Punkte dieser Welle “in Phase” bewegen, spricht man von deren **Phasengeschwindigkeit** v_{Ph}. Diese ist also die Geschwindigkeit, mit der sich auch die Wellenberge und -täler einer Welle bewegen. Die Wellenberge einer Welle sind dann für eine bestimmte Zeit t_1 an den Orten z_1, z_2, ..., die sich jeweils um eine Phase 2π unterscheiden.

$$\frac{\omega z_1}{v} + 2\pi = \frac{\omega z_2}{v} \Longrightarrow 2\pi = \frac{\omega}{v}(z_2 - z_1) = \frac{\omega}{v} \cdot \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2\pi \frac{v}{\omega} = \frac{v}{\nu}, \qquad (1)$$

wo die Frequenz $\nu = \omega/(2\pi)$ die Anzahl Wellenberge pro Zeiteinheit zählt, während die Kreisfrequenz ω die Anzahl Radian pro Zeiteinheit zählt. Die Phasengeschwindigkeit ist demnach auch $v_{\mathrm{Ph}} = \lambda \cdot \nu = \lambda/T$ und ist in Glg. 1 nur mit v bezeichnet. Sie gibt also die Geschwindigkeit “Wellenlänge / Wellenperiode” an und ist deshalb mit der Wellenlänge verknüpft.

Wir führen nun auch die wichtige Größe der **Wellenzahl** $k = 2\pi/\lambda$ ein, die die Anzahl Wellen pro Längeneinheit angibt. Damit können wir die Beschreibung der

Welle einfacher darstellen,

$$x(z,t) = A\sin(\omega t - \omega z/v) \;=\; A\sin\left(\omega t - \omega z\frac{2\pi}{\lambda\omega}\right) \;=\; A\sin(\omega t - kz), \quad (2)$$

wo wir $v = \lambda\omega/(2\pi)$ aus Glg. 1 eingesetzt haben. Zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = t_0$ ist die Phase $\omega t_0 - kz$ für alle Punkte mit $z = 0$ gleich. Fasst man k und z als dreidimensionale Vektoren $\vec{k}$ und $\vec{z}$ auf, so beschreibt Glg. 2 eine sog. **ebene Welle** weil alle Orte mit $z = \mathrm{const.}$ dieselbe Phase haben. Die Orte mit gleicher Phase bilden eine Ebene (s. S.13).

Man kann nun ebene Wellen wie folgt äquivalent darstellen:

$$x(z,t) = A\sin(\omega t - kz) \;=\; A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(v_{\mathrm{Ph}}t - z)\right) \;=\; A\sin(2\pi(\nu t - z/\lambda)). \quad (3)$$

Für einen Wellenberg bleibt die Phase immer konstant, deshalb muss $(\omega t - kz)$ konstant sein. Also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t - kz) = 0, \quad \Longrightarrow \omega - k\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k},$$

was auch wieder die Phasengeschwindigkeit angibt:

$$v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu.$$

Nochmals: Die Phasengeschwindigkeit gibt die Geschwindigkeit an, mit der sich die einzelnen Phasen einer Welle (wie z.B. Wellenberge und -täler) ausbreiten. Sie hängt ab von der Stärke der Kopplung zwischen den gekoppelten Teilchen des Mediums, in welchem sich die Welle ausbreitet und auch von deren Masse und Dichte.

Beschreibung von Wellen

Eigentlich bewegen sich Wellen ja immer in drei Dimensionen – wie alle anderen Dinge ja auch. Wir müssen sie also auch in 3D darstellen. Breitet sich eine Welle mit einer Phasengeschwindigkeit v_{Ph} aus, so können wir sie beschreiben durch

$$f(z_1,t_1) = f(z_1 - v_{\mathrm{Ph}} t_1, 0) = f(z_0, 0).$$

Dabei stllen wir uns vor, dass die Welle (Störung) bei $z = z_0$ und $t = t_0$ ihren Ursprung hat und sich mit der Geschwindigkeite $v = v_{\mathrm{Ph}}$ ausbreitet. Sie ist also zur Zeit $t = t_1$ am Ort $z_1 = z_0 + v_{\mathrm{Ph}} t_1$. Weil sich ihre Form nicht ändern soll, gilt die Gleichung oben. Die Wellenfunktion $f(z,t)$ bleibt also konstant für alle Werte $z - v_{\mathrm{Ph}} t = z_0$, bzw. $z = v_{\mathrm{Ph}} t + z_0$. Sie ist deshalb eine Funktion der Form

$$f(z,t) = f(z - v_{\mathrm{Ph}} t).$$

Die Wellengleichung

Die Funktion $\xi(z,t)$, die die Welle beschreibt, wird durch die sog. **Wellengleichung** beschrieben, die wir hier herleiten. Wir differenzieren $\xi(z,t) = f(z - vt)$ je zwei mal nach der Zeit und auch zweimal nach dem Ort. Dazu schreiben wir $u = z - vt$ und

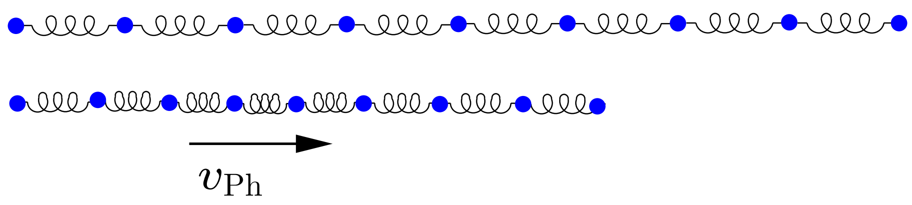
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}, \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(-v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = v^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}, \qquad (4) \\
\frac{\partial \xi}{\partial z} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot 1, \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot 1\right)\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Nun setzen wir

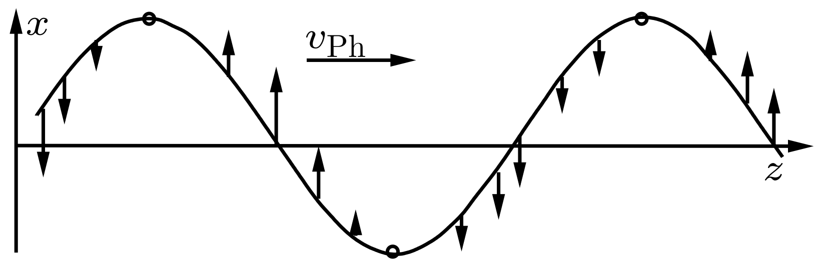
$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}_{\text{Glg. 5}} = \underbrace{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}}_{\text{Aus Glg. 4}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{6}$$

Voilà, die Wellengleichung! Keine Angst, wir werden sie auch noch mit physikalischen Argumenten herleiten... Diese partielle Differentialgleichung zweiten Grades beschreibt, wie sich eine Welle in z-Richtung mit einer Phasengeschwindigkeit v ausbreitet. Die Gleichung hat viele Lösungen, die Randbedingungen legen die "richtige" fest. Diese Gleichung gilt auch für elektromagnetische Wellen (Licht!).

1D Wellen



In der Abbildung links sieht man ein Sinnbild für eine eindimensionale, **longitudinale** Welle. Dabei ist die Auslenkung der einzelnen Elemente der Welle entlang (longitudinal) zur Ausbreitungsrichtung. Die Kompression und Expansion der einzelnen Federn pflanzt sich durch die Federkette fort, wie durch den Pfeil angedeutet. Ein Slinky ist ein gutes Beispiel, wie auch Schallwellen.



Ein Beispiel für eine **transversale** Welle ist z. B. ein Seil, dessen Ende ich kurz energisch auf und ab bewege. Es bewegt sich eine transversale Welle durch das Seil, die einzelnen Seilelemente werden seitlich (transversal) ausgelenkt, wie hier durch Pfeile illustriert.

Eindimensionale Wellen sind mathematisch besonders einfach zu behandeln, physikalisch kann man sie durch Kollimation von 3D-Wellen annähern oder, im Fall von Licht, durch einen Laser fast perfekt erzeugen.
Eine Welle $\xi(z,t) = A \cdot \hat{\vec{z}} \sin(\omega t - kz)$, wo $\hat{\vec{z}}$ der Einheitsvektor in z-Richtung sei, breitet sich in z-Richtung aus. Dabei ist $\xi(z,t)$ die Kompression, die die Welle erfährt, man könnte also auch schreiben

$$\Delta z(z,t) = A \cdot \hat{\vec{z}} \sin(\omega t - kz), \text{ (longitudinale Welle).}$$

Die Kompression (oder auch "Störung" genannt) breitet sich in z-Richtung aus. Bei einer tansversalen Welle, die sich in z-Richtung bewegt, schreiben wir

$$\Delta x(z,t) = A \cdot \hat{\vec{x}} \sin(\omega t - kz), \text{ (transversale Welle).} \tag{7}$$

Die Auslenkung geschieht hier in x-Richtung (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung).

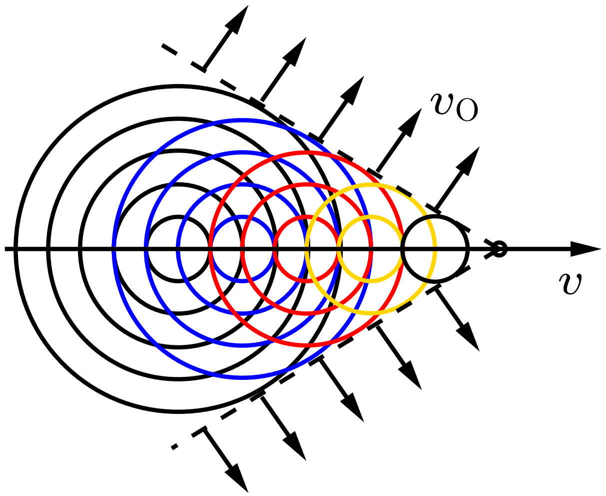
2D Wellen

Genaues Betrachten zeigt: Es sind nicht konzentrische Wellen.
(Bild: stackexchange)

Beispiele für 2D-Wellen lernen wir bereits als Kind kennen, indem wir Steine in einen Tümpel werfen. Es bilden sich Oberflächenwellen, die sich konzentrisch vom Auftreffpunkt des Steines weg mit der entsprechenden Phasengeschwindigkeit ausbreiten (siehe S. 49). Auch 2D-Wellen breiten sich gemäß der Wellengleichung aus, allerdings müssen wir die zweite Dimension explizit berücksichtigen,

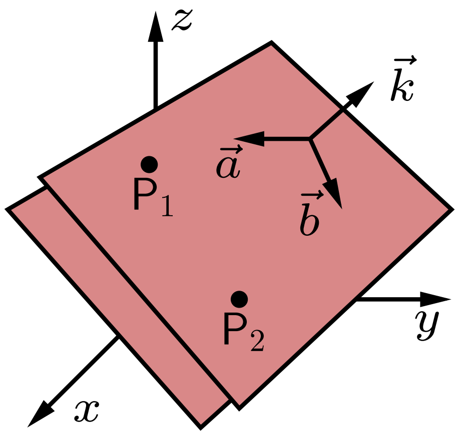
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) .$$

In Wasserläufen können sich Oberflächenwellen auch wie kollimierte 1D-Wellen fortbewegen, als sog. Solitonen. Letztere sind *nicht-lineare* Phänomene, die durch die sog. Korteweg-de-Vries-Gleichung beschrieben werden, die wir hier nicht behandeln werden. Die Mathematik wird kompliziert...



Bewegt sich ein kleines Schiff schneller als die Wellengeschwindigkeit der Oberflächenwellen durch ruhiges Wasser, so beobachtet man eine Überlagerung von Kreiswellen, wie links skizziert. Wie Geschwindigkeit der Oberflächenwellen ist die Phasengeschwindigkeit der Wellen. Diese hängt (für Wasserwellen) von deren Wellenlänge und der Wassertiefe ab, was die Beschreibung erheblich komplizierter macht, als hier skizziert (siehe auch Seite 49). Diese Abhängigkeit bedeutet natürlich, dass Wellen mit verschiedener Wellenlänge sich verschieden schnell ausbreiten, man sagt, die Wellen zeigen **Dispersion** (s. Seite 25), was mit ein Grund dafür ist, dass sich Wellen in Ufernähe brechen. Oberflächenwellen aus Wasser sind aber in Tat und Wahrheit noch einiges komplizierter.

Ebene Wellen in 3 D



Die Ausbreitungsrichtung der hier skizzierten ebenen Welle wird durch den **Wellenvektor** $\vec{k} \doteq \{k_x,k_y,k_z\}$ beschrieben. Dessen Betrag ist die **Wellenzahl** $|\vec{k}| = k = (2\pi)/\lambda$ und gibt die Anzahl Wellenberge (oder -täler) pro Längeneinheit (in der Regel Meter) an. Die skizzierten Ebenen sind Ebenen mit konstanter Phase und stehen senkrecht auf $\vec{k}$. Für die Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ der Punkte P_1 und P_2 muss daher gelten, $\vec{k} \cdot \vec{r}$ =const. Denn $\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \vec{k} \cdot \vec{r}_2 = \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$, weil $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ja in der Ebene der Welle liegt. Man stellt deshalb eine ebene Welle z. B. wie folgt dar:

$$\xi(\vec{r},t) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}).$$

Zu einem gegebenen Zeitpunkt $t = t_0$ hat dann die Phase der Welle einen auf der gesamten Fläche $\vec{k} \cdot \vec{r}$ denselben konstanten Wert. Man schreibt oft noch kompakter

$$\xi(\vec{r},t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \text{ wo } A = \mathrm{Re}(A) + i\,\mathrm{Im}(A) \text{ eine komplexe Zahl ist.}$$

Der Betrag $|A|$ ist die Amplitude der Welle. Wir können wieder wie auf Seite 7 die partiellen Ableitungen nach x,y,z und t bilden. Mit $u \doteq \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$ erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = Ak_x^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = Ak_y^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2},$$
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = Ak_z^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A\omega^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2}.$$

Mit $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ und $v = \omega/k$ erhalten wir so die 3D-Wellengleichung für ebene Wellen:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\xi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \tag{8}$$

wo Δ der Laplaceoperator ist und v die Phasengeschwindigkeit der Welle.

Solche ebene Wellen spielen in der Physik eine äußerst wichtige Rolle als Modelle für Wellen. Schließlich kann jede 3D-Welle als ebene Welle genähert werden, wenn ich nur genügend weit weg von ihrem Ursprung bin. Der Horizont in St. Peter Ording sieht ja auch flach aus!

Trotzdem untersuchen wir in den folgenden Seiten auch die Ausbreitung von 3D-Kugelwellen.

3D Wellen

Beipsiele für Wellen, die sich in drei Dimensionen ausbreiten, sind Schall- oder Lichtwellen. Expandieren sie in alle Richtungen gleich schnell (also in einem sog. isotropen Medium), so verteilt sich ihre Energie jeweils auf eine expandierende Kugeloberfläche. Ihr Energiefluss muss sich deshalb wie $1/r^2$ verhalten.

Am 24. Februar 1987 wurde eine Supernova in der großen Magellanschen Wolke entdeckt[1]. Diese ist etwa 48.000 ± 5.000 pc (Parsec, bzw. etwa 157.000 Lichtjahre) von uns entfernt. Der Lichtblitz war also 157.000 Jahre zu uns unterwegs und das Licht der Supernova hat sich auf einer Kugel-

[1] Bildnachweis: NASA

schale mit einem Radius von 157.000 Lichtjahren verteilt. Im Maximum[2] lag die Luminosität bei $L \approx 1.5 - 2.5 \times 10^{41}$ erg/s. Ein erg ist die Energieeinheit im veralteten cgs-System und entspricht 1 g $(\mathrm{cm/s})^2$ also 10^{-7}J. Die Leistung lag also bei $L \approx 1.5 - 2.5 \times 10^{34}$ W. Zum Vergleich – die Luminosität der Sonne beträgt 3.826×10^{26} Watt. Die Supernova 1987a hatte also kurzfristig etwa die 2.7×10^7-fache Leistung der Sonne.

Diese einfache Abschätzung machte die Annahme, dass sich das Licht der Supernova mit einer in allen Richtungen gleichen und konstanten, Lichtgeschwindigkeit ausgebreitet hat, wie wir dies für Lichtwellen in homogenen Medien (wie insbesondere dem Vakuum im Weltraum) gemeinhin annehmen dürfen. Man sagt, das Licht breitet sich "isotrop" aus. Damit breitet sich auch der Energiefluss von der Supernova mit konstanter Geschwindigkeit in alle Richtungen gleich aus und muss sich auf eine immer größer werdende Fläche verteilen.

---

[2] Schaeffler et al., Astron. Astrophys, **184**, L1 – L4, (1987)

Wir beschreiben deshalb eine solche **Kugelwelle** wie folgt,

$$\xi(r,t) = f(r)\sin(\omega t - kr),$$

wo $f(r)$ eine kugelsymmetrische Funktion sein muss, die mit der Amplitude der Welle verknüpft ist.

In V8 (S. 51) haben wir gesehen, dass die Energie von Schwingungen quadratisch mit der Amplitude der Schwingung wächst. Stellen wir uns eine Kugelwelle als eine Explosionswelle vor, so ist klar, dass sich die instantane Energiefreisetzung auf einer expandierenden Kugeloberfläche durch den Raum ausbreitet. Wegen Energieerhaltung muss gelten

$$f^2(r)4\pi r^2 = A^2 = \text{const.}, \quad \text{folglich} \quad f(r) = \frac{A}{r}, \text{ wo } A \text{ die Amplitude ist.}$$

Wir können deshalb eine Kugelwelle, die sich aus dem Ursprung $r = 0$ ausbreitet schreiben als

$$\xi(r,t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}, \text{ oder auch } \xi(r,t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr).$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem für ebene Wellen durch den zusätzlichen Faktor $1/r$ und dadurch, dass in der Phase nur kr steht und keine Winkelabhängigkeit, wie bei der ebenen Welle, wo $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos\vartheta$ steht. Das bedeutet, dass die Phase einer Kugelwelle nicht von der Richtung abhängt, wie dies ja auch zu erwarten war.

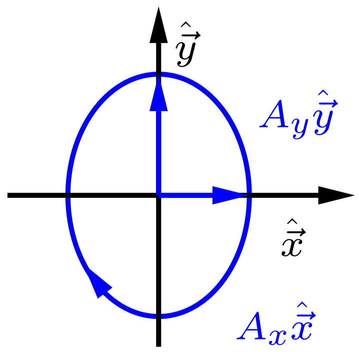
Beschreibung von Wellen II: Polarisation

Wir haben bereits gesehen, dass es longitudinale Wellen gibt, bei denen z. B. das Gas, durch welches sich die Schallwelle bewegt, verdichtet und wieder ausgedehnt wird. Transversale Wellen wiederum konnten wir durch ein bewegtes Seil oder eine Saite illustrieren. Nun gibt es noch eine wichtige Eigenschaft, die wir einführen müssen – die Polarisation.

Wellen können linear oder elliptisch (zirkular) polarisiert sein. Geschieht die Auslenkung einer transversalen Welle in einer Ebene, so nennt man sie **linear polarisiert**. Die 1D-Welle, die durch Glg. 7 beschrieben wird,

$$\Delta x(z,t) = A \cdot \hat{\vec{x}} \sin(\omega t - kz),$$

ist linear polarisiert. Die Auslenkung erfolgt in $\hat{\vec{x}}$-Richtung, die Welle pflanzt sich in $\hat{\vec{z}}$-Richtung fort. Alle Auslenkungen der Welle erfolgen in einer Ebene, hier der durch $\hat{\vec{x}}$ und $\hat{\vec{z}}$ aufgespannten Ebene.



Nun können wir aber auch zwei Wellen mit verschiedener Amplitude und linearer Polarisationsebene überlagern,

$$\xi(z,t) = A_x\hat{\vec{x}}\sin(\omega t - kz + \varphi_1), \quad \eta(z,t) = A_y\hat{\vec{y}}\sin(\omega t - kz + \varphi_2),$$

beide bewegen sich in $\hat{\vec{z}}$-Richtung. Wir haben also den Spezialfall einer Lissajous-Figur mit einer gemeinsamen Kreisfrequenz ω (siehe V8, S. 61), die Welle ist **elliptisch polarisiert**. Der Ort der maximalen Auslenkung pflanzt sich entlang einer Spirale in $\hat{\vec{z}}$-Richtung fort (elliptisch angeregte Seilschwingung). Sind die beiden Amplituden $A_x = A_y = A$ gleich, und unterscheiden sich die beiden Phase nur um $\pi/2$, $|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi/2$, so beschreibt die Spitze des Vektors

$$x(t) = A\hat{\vec{x}}\sin(\omega t) \text{ und } y(t) = A\hat{\vec{y}}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

einen Kreis, man nennt die Welle dann **zirkular polarisiert**.

Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit und Dispersion

Wir haben auf Seite 3 die Phasengeschwindigkeit eingeführt, die Geschwindigkeit, mit der sich Wellentäler und -berge (und eben auch alle Phasen) bewegen. Ist die Phasengeschwindigkeit für alle Wellenlängen gleich, so wird eine Welle sich bis ins Unendliche fortpflanzen.

Eine Welle $\xi(z,t) = A\sin(\omega t - kz)$ hat in einer Zeit t $\omega t/2\pi = \nu t$ Schwingungen durchgeführt. In dieser Zeit hat sie sich um den Abstand z von der Quelle wegbewegt. In diesem Abstand müssen kz Schwingungen "Platz haben", also $kz = \omega t$. Die Differenz $kz - \omega t = \varphi$ ist der Ort einer konstanten Phase der Welle,

$$\omega t - kz = \varphi \implies z = \frac{1}{k}(\omega t - \varphi), \implies v_{\mathrm{Ph}} \doteq \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{k}\,\frac{\partial}{\partial t}(\omega t - \varphi) = \frac{\omega}{k}.$$

Man kann dies auch anders sehen. Wir setzen das Argument der Welle, $(\omega t - kz)$

der Einfachheit gleich Null, wir betrachten also den Fall einer Phase 0, $(\omega t - kz) = 0$. Dies ist äquivalent zu $(\omega t - kz) = \varphi$, aber halt ein Spezialfall.

$$\omega t - kz = 0 \implies \omega t = kz \implies \frac{\omega}{k} = \frac{z}{t} = \frac{\lambda}{T} = v_{\mathrm{Ph}},$$

wo λ eine Wellenlänge und T eine Wellenperiode sind. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle der Frequenz ω (und nur diese!) fortpflanzt, ist also $v_{\mathrm{Ph}} = \lambda/T = z/t = \omega/k$, die Phasengeschwindigkeit.

Nun kann aber eine harmonische Welle keine Information übertragen, sie wiederholt sich ja bis ins Unendliche. Um Information zu übertragen muss die Frequenz oder die Amplitude moduliert werden (FM: Frequency Modulation, AM: Amplitude Modulation, “Uraltbegriffe” aus Zeiten, in denen es noch Radio gab!)

Wir haben in V8 (Seite 65) eine solche Modulation gesehen. Dabei wurde ein Wellenpaar mit leicht verschiedener Frequenz in der Amplitude moduliert. Diese

Modulation kann genutzt werden, um Information zu übertragen. Wir betrachten deshalb wieder die Summe zweier Schwingungen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen und Wellenzahlen,

$$\begin{aligned}
S(z,t) &= A\sin((\omega-\Delta\omega)t-(k-\Delta k)z)+A\sin((\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)z), \\
&= A(\sin\alpha+\sin\beta), \\
&= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \\
&= 2\sin(\omega t-kz)\cdot\cos(-\Delta\omega t+\Delta kz) = 2\sin(\omega t-kz)\cdot\cos(\Delta\omega t-\Delta kz).
\end{aligned}$$

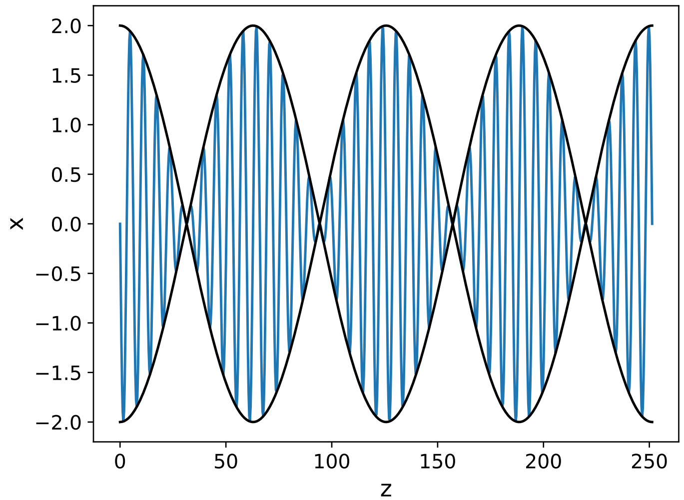
Wir sehen wieder eine hochfrequente Schwingung, die durch eine niedrigfrequente moduliert wird. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Modulationswelle fortpflanzt ist $v=\Delta\omega/\Delta k$. Sie beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich eine Gruppe von Wellen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen und Wellenzahlen bewegt, sie heisst deshalb die **Gruppengeschwindigkeit**,

$$v_{\mathrm{G}} \doteq \lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\partial\omega}{\partial k}. \tag{9}$$

Stimmen die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit überein, so bleibt ein Wellenpaket immer erhalten. Dies ist z. B. bei Licht im Vakuum der Fall. Die Phasengeschwindigkeit und die Gruppengeschwindigkeit ist für alle Wellenlängen oder Frequenzen gleich. Darum sehen wir Dinge auch von Weitem in ihren echten Farben!

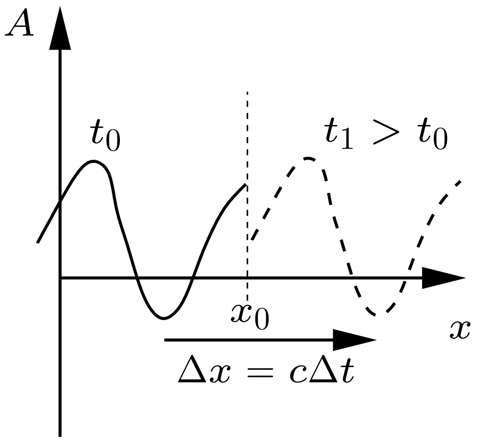
Unterscheiden sich aber die Phasengeschwindigkeiten der einzelnen Wellenlängen (oder Frequenzen), so "läuft die Welle auseinander", man sagt, sie zeigt **Dispersion**.

Solange sie noch existiert, bewegt sich die aus Schwingungen mit mehreren Frequenzen aufgebaute Welle mit ihrer **Gruppengeschwindigkeit** fort. Die Phasengeschwindigkeit ist also die Geschwindigkeit, mit der sich eine **monochromatische** Welle (mit nur einer Frequenz) fortbewegt. Die Gruppengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich eine aus Frequenzen aus einem Intervall $[\omega,\omega+\Delta\omega]$ zusammengesetzte Welle fortbewegt. Sie ist die Geschwindigkeit, mit der Information übertragen werden kann.



Für die Abbildung nebenan wurden $\omega_1 = 1.07$ Hz und $\omega_2 = 1.13$ Hz verwendet, sowie $k_1 = 0.95$ m^{-1} und $k_2 = 1.05$ m^{-1}. Man sieht schön die Einhüllende (schwarz) und auch die Überlagerung der beiden $\sin$-Schwingungen (blau). Die Phasengeschwindigkeit $v_{\mathrm{Ph}} \approx (\omega_1+\omega_2)/(k_1+k_2) = 1.1$ m/s, die Gruppengeschwindigkeit $v_{\mathrm{G}} \approx (\omega_2-\omega_1)/(k_2-k_1) = 0.06/0.1 = 0.6$ m/s. Die einzelnen Wellen laufen deshalb der schwarzen Einhüllenden davon.

Akustik



Wir betrachten vorerst die Ausbreitung von Wellen. In der Abbildung nebenan bewegt sich eine Welle von links nach rechts und legt in einer Zeit $\Delta t = t_1 - t_0$ den Weg $\Delta x = c\Delta t$ zurück, wo c ihre Geschwindigkeit ist. Der Teil der Welle, der zur Zeit t_0 an der Stelle x_0 war hat sich zur Zeit t_1 nach $x_0 + \Delta x$ bewegt, allg. $x = x_0 + ct$. Zur Zeit t_0 ist die Welle eine Funktion $A(x)$; eine Zeit Δt später hat sie sich um Δx nach rechts bewegt, sich aber sonst nicht verändert, folglich

$$A(x_0) = A(x - ct) = A\left(x + \Delta x - c(t + \Delta t)\right).$$

Wenn sie sich nach links bewegt, ändert sich nur das Vorzeichen von c. Nun wollen wir diese rein kinematische Beschreibung ersetzen durch eine Herleitung der Ausbreitungseigenschaften von Wellen. Dazu brauchen wir eine Beschreibung von drei Prozessen:

I Das Gas bewegt sich, dabei ändert sich die Dichte

II Der Dichteänderung entspricht eine Druckänderung

III Das Ungleichgewicht im Druck führt zu einem Druckgradienten und damit zu einer Kraft und Bewegung.

Herleitung der Ausbreitung von Wellen – II

Wir folgen Feynman und besprechen zuerst den zweiten Punkt, II. Der Druck in einem Gas ist u. a. eine Funktion der Dichte im Gas, $P = P(\rho)$. Der durch Schall erzeugte Druck ist sehr klein, zur Charakterisierung verwendet man deshalb die Größe Dezibel

$$\text{Schalldruckpegel:} \quad L_p = 20 \log \frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{eff},0}} \, \text{dB},$$

wo $p_{\text{eff},0} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa, bzw. etwa zwei zehn-Milliardstel des Atmosphärendrucks. Ein Druckunterschied von $2 \cdot 10^{-7}$ bar entspricht etwa 60 dB, dem Schalldruckpegel eines deutlichen Gesprächs. Unser Sprechen ist also mit einer Druckveränderung von 2 Teilen in zehn Millionen verbunden, unsere Ohren haben keine Mühe, dies selbst auf eine größere Distanz zu hören, bzw. zu messen.

Wegen der sehr kleinen Druckamplituden, die mit Schall verbunden sind, ist es möglich, sog. linearisierte Gleichungen zu verwenden. Dichte und Druck seien also gegeben durch

$$P = P_0 + P_S \text{ sowie } \rho = \rho_0 + \rho_S,$$

wo die Größen mit Index 0 für den ungestörten Hintergrund gelten und die mit Index S für die durch den Schall hervorgerufene Störung. Nach den vorigen Überlegungen muss der Druck P eine Funktion der Dichte ρ sein

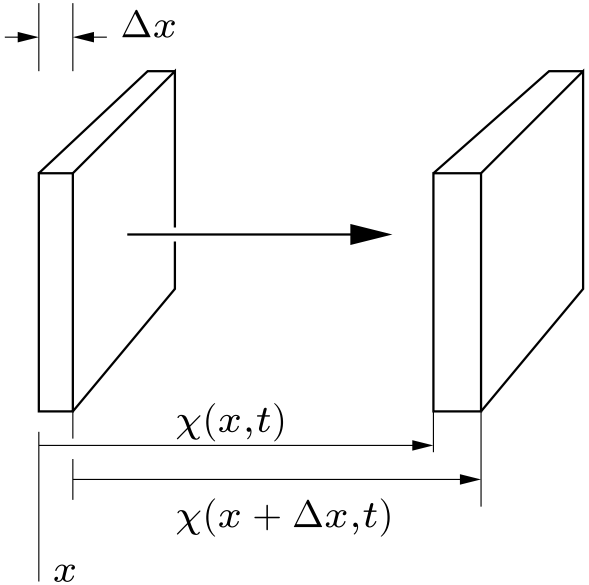
$$P = P_0 + P_S = P(\rho_0 + \rho_S) = P(\rho_0) + \rho_S\ P'(\rho_0),$$

denn die höheren Ableitungen sind verschwindend klein. Die Gleichung ist linear in der Störung ρ_S. Die Störung im Druck ist also

$$P_S = \rho_S\ P'(\rho_0) = \kappa \rho_S, \text{ wo } \kappa = P'(\rho_0) = \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\right)_0,$$

womit der zweite Punkt (II) abgehakt werden kann.

Herleitung der Ausbreitung von Wellen – I



Der erste Punkt ist ähnlich einfach, wenn wir ein Kontinuitätsargument verwenden, d. h. uns überlegen, dass die Gasmenge, die Anzahl Moleküle, erhalten bleiben muss. Die Gasmenge, die sich in einer Region Δx um eine Stelle x befindet (z. B. pro Quadratmeter) ist $\Delta x \rho_0$. Wird diese Menge nun von x um $\chi(x,t)$ verschoben, so befindet sie sich jetzt zwischen $x+\chi(x,t)$ und $x+\Delta x+\chi(x+\Delta x,t)$. Ist nun ρ die neue (z. B. komprimierte) Dichte, so muss nun gelten

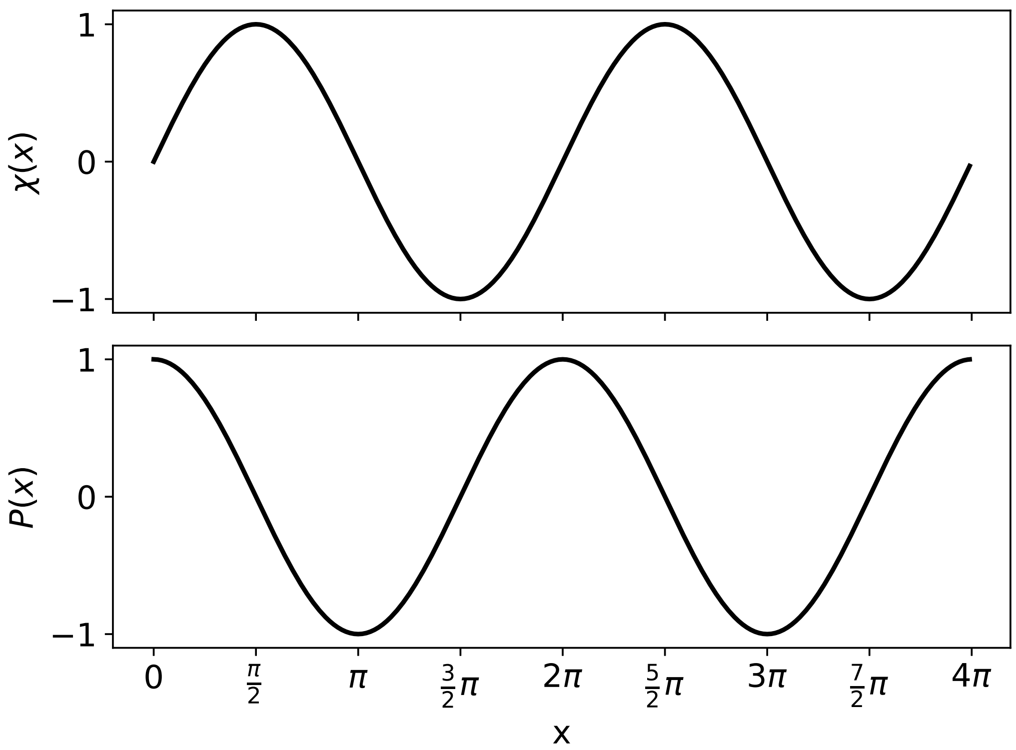
$$\rho_0 \Delta x = \rho\left(x+\Delta x+\chi(x+\Delta x,t)-x-\chi(x,t)\right).$$

Nun ist Δx ja klein, und folglich können wir $\chi(x+\Delta x)$ schreiben als $\chi(x)+(\partial\chi/\partial x)\Delta x$ (die partielle Ableitung ist nötig, weil χ ja von t und x abhängt).

Also

$$
\begin{aligned}
\rho_0 \Delta x &= \rho \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \Delta x + \Delta x \right) \\
\rho_0 &= \left(\rho_0 + \rho_S\right) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \rho_0 + \rho_S \\
\rho_S &= -\left(\rho_0 + \rho_S\right) \frac{\partial \chi}{\partial x} \\
\rho_S &\approx -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x},
\end{aligned}
$$

was unseren Erwartungen entspricht, ρ_S, die Dichte, nimmt zu, wenn $\chi(x,t)$, die Verschiebung des ursprünglichen Luftpaketes, mit x abnimmt, die Luft also komprimiert wird.



Setzen wir hier nun $P_S = \kappa\rho_S$ hier ein, so erhalten wir

$$P_S = \kappa\rho_0 \frac{\partial\chi}{\partial x},$$

die Druckstörung ist also gleich der örtlichen Änderung (Ableitung) der Verschiebungen (mit der damit einhergehenden Verdichtung oder Verdünnung) der Luftmoleküle. Wo die Verschiebung maximal ist ($\partial\chi/\partial x = 0$), verschwindet die Druckstörung. Die Druckstörung ist also gegenüber der Verschiebung der Moleküle verschoben.

Herleitung der Ausbreitung von Wellen – III

Nun brauchen wir noch eine Beschreibung der Bewegung in Folge des Druckungleichgewichtes (Punkt III). Eine dünne Scheibe Luft der Masse $\rho_0 \Delta x$ erfährt eine Beschleunigung $\partial^2\chi/\partial t^2$, die entsprechende Kraft ist natürlich $\rho_0 \Delta x \cdot \partial^2\chi/\partial t^2$. Diese Kraft muss durch den Druckgradienten entstehen, bei x wirkt in die positive x-Richtung der Druck $P(x,t)$, bei $x + \Delta x$ wirkt in die negative x-Richtung der Druck $P(x + \Delta x,t)$, auf das Volumenelement wirkt also netto

$$P(x,t) - P(x + \Delta x,t) = -\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x = -\frac{\partial P_S}{\partial x}\Delta x,$$

denn bei $P = P_0 + P_S$ ändert sich nach Voraussetzung ja nur P_S. Also haben wir

$$\rho_0 \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_S}{\partial x}.$$

Nun ist alles bekannt, wir stecken den Ausdruck $P_S = \kappa\rho_S$ in diese Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial \rho_S}{\partial x}.$$

Als nächstes werfen wir mit $\rho_S = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}$ die Variable ρ_S raus,

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}.$$

Was bedeutet das nun? Dazu schauen wir uns die Bewegung einer Welle nochmals an. Wir haben gesehen, dass $A(x-ct) = A(x,t)$. Wir differenzieren diese Gleichung zweimal nach x und zweimal nach t und kürzen ab $u = x - ct$:

$$\frac{\partial A}{\partial x} \quad = \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x} = A'(u,t) \cdot 1,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= \frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}u^2}, \\
\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = -cA'(u,t), \\
\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}u^2}c^2,
\end{aligned}
$$

also gilt

$$
\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 A}{\partial x^2},}
$$

die sog. **Wellengleichung**. Die Welle breitet sich nach links oder rechts in x-Richtung mit der Geschwindigkeit c aus. Die Wellengleichung gilt übrigens viel allgemeiner nicht nur für ein Gas, sondern insbesondere auch für Licht, Schwingungen in Festkörpern, Flüssigkeiten, Oberflächenwellen, etc. In drei Dimensionen lautet sie, wie erwartet,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \ \Delta A, \text{ wo } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ der Laplace-Operator ist.}$$

Die Schallgeschwindigkeit c gibt an, wie schnell sich ein Wellenberg von links nach rechts oder umgekehrt bewegt. Diese heisst auch **Phasengeschwindigkeit**, weil in diesem Falle die Phase der Welle sich so schnell bewegt. Denn für zwei benachbarte Wellenberge bei x_1 und x_2 gilt

$$\lambda = x_2 - x_1 = v_{\mathrm{Ph}}/\nu,$$

wo λ die Wellenlänge und ν die Frequenz der Welle ist. Also gilt auch

$$\lambda = v_{\mathrm{Ph}}/\nu, \tag{10}$$

eine wichtige Beziehung, die wir auch schon verwendet haben.

In der hergeleiteten Wellengleichung für das Verhalten von Luft bei einer Störung finden wir also, dass die Geschwindigkeit einer Druckstörung, also von Schall, gerade gleich

$$c = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\right)_0}.$$

Damit ist die Schallgeschwindigkeit gerade gleich der Druckänderung bei einer Dichteänderung. Wie groß ist diese? Die hohen Frequenzen von Schall und die große Geschwindigkeit bedeuten, dass die Druckänderung adiabatisch verläuft,

$$P \propto \rho^\gamma.$$

Ableiten ergibt $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\rho = \gamma P/\rho$ und folglich

$$c^2 = \frac{\gamma P}{\rho} = \lambda^2 \nu^2.$$

Bei konstantem Druck ist die Schallgeschwindigkeit also invers proportional zur Dichte, die Frequenz nimmt mit abnehmender Dichte zu.

Übung: Vergleichen Sie c, bzw. v_{Ph} mit der mittleren Geschwindigkeit der Moleküle im Gas. Tip: $\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}kT$ [$c = \sqrt{\gamma/3}\sqrt{\langle v^2\rangle}$]

Wie sieht denn nun eine Lösung der Wellengleichung aus? Die zweite Ableitung nach der Zeit muss gleich sein der Schallgeschwindigkeit im Quadrat mal die zweite Ableitung nach dem Ort. Dies ist z. B. mit harmonischen Schwingungen erfüllt,

$$A(x,t) = A_0 \sin(\omega(t - x/c)) = A_0 \sin(\omega t - kx),$$

wo wir die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ eingeführt haben, die angibt, wieviele Wellenberge oder Täler pro Längeneinheit gezählt werden und die Einheit 1/m hat. Die Phasengeschwindigkeit c kann auch geschrieben werden als

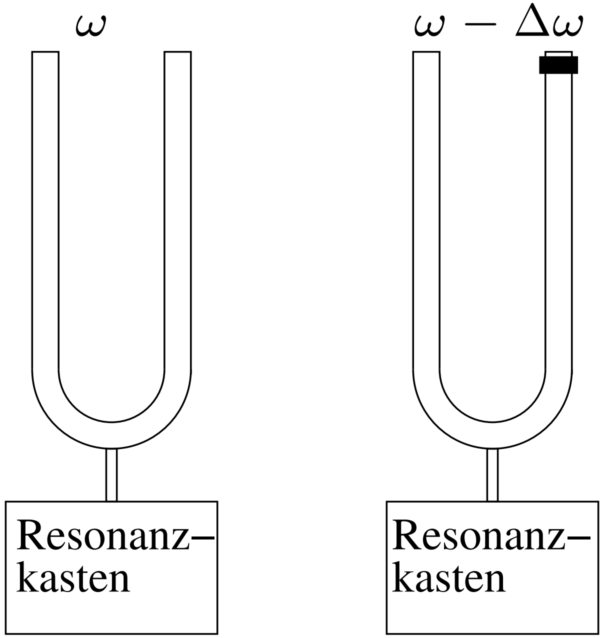
$$v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\omega}{k} = \nu\ \lambda.$$

Natürlich kann eine Lösung der Wellengleichung auch komplex geschrieben werden,

$$A(x,t) = C\ e^{i(\omega t - kx)}\ +\ C^*\ e^{-i(\omega t - kx)}.$$

<u>Übung:</u> Obwohl in einer Schallwelle keine Materie transportiert wird, findet eine Energieübertragung statt. Wie groß ist diese? Tip: Bestimmen Sie die kinetische und potentielle Energie der Schwingungen der Teilchen und mitteln Sie über eine Schwingung. [$\langle E/\Delta V\rangle = \frac{1}{2}\ \rho A_0^2\omega^2$]

Schwebung



Wir stellen zwei Stimmgabeln nebeneinander, die beide *fast* auf dieselbe Frequenz ω gestimmt sind. Wir können beide Schwingungen hörbar machen, indem wir sie mit Resonanzkästen fest verbinden. Wir beschreiben beide Schwingungen durch

$$x_1 = A \cdot \cos \omega t, \quad \text{und} \quad x_2 = A \cdot \cos(\omega - \Delta\omega)t.$$

Wie klingt es denn, wenn wir beide Stimmgabeln in Schwingung versetzen? Interessant! Was ist das? Wir berechnen die resultierende Schwingung und verwenden

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

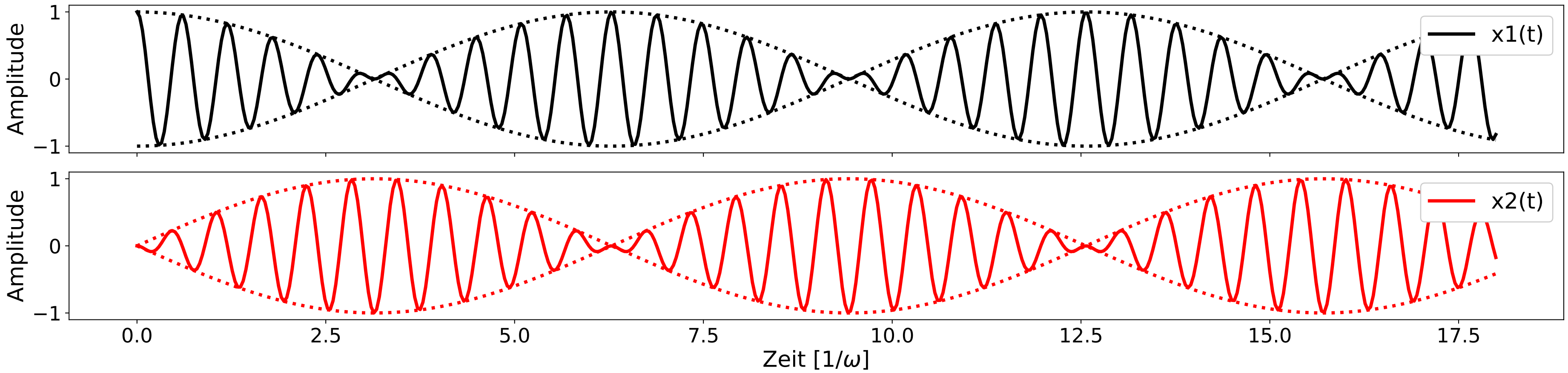
und erhalten für $\alpha = \omega$ und $\beta = \omega - \Delta\omega$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega - \omega - \Delta\omega}{1} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega + \omega - \Delta\omega}{2} t\right), \\ &\approx 2A\cos\left(\frac{-\Delta\omega}{1} t\right) \cdot \cos\left(\omega t\right). \end{aligned}$$

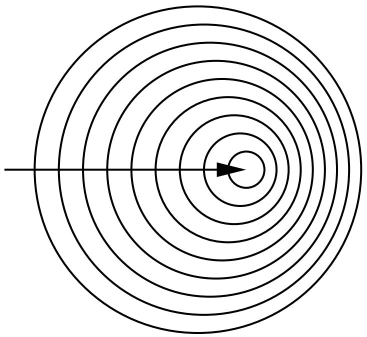
Dies ist dieselbe Lösung und dasselbe Phänomen wie die **Schwebung** von zwei Oszillatoren, die wir in V8 beschrieben hatten.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \\ x_2 &= -2A\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Der Unterschied ist, dass wir diese jetzt hörbar machen können!



Der Dopplereffekt



Christian Doppler hat 1842 entdeckt, dass die Anzahl Wellenberge, die von einem Beobachter pro Zeiteinheit wahrgenommen werden, von der Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter abhängt. Sendet eine Quelle Schallwellen der Frequenz ν_0 aus, so ist die Schwingungsdauer (im System der Quelle) gerade $T = 1/\nu_0$, die Welle bewegt sich in dieser Zeit um $\lambda_0 = v_{\mathrm{Ph}} \cdot T$. Bewegt sich nun die Quelle mit einer Geschwindigkeit v_Q auf einen Beobachter zu, so verringert sich der Abstand zwischen zwei Wellentälern (oder -bergen) innerhalb von T um $v_Q \cdot T$, dem Beobachter erscheint die Wellenlänge verkürzt:

$$\lambda = \lambda_0 - v_Q \cdot T = \frac{v_{\mathrm{Ph}} - v_Q}{\nu_0}. \qquad (11)$$

Die vom Beobachter gemessene Frequenz der Welle ist

$$\nu = \frac{v_{\mathrm{Ph}}}{\lambda} = \nu_0 \frac{v_{\mathrm{Ph}}}{v_{\mathrm{Ph}} - v_Q} = \nu_0 \frac{1}{1 - v_Q/v_{\mathrm{Ph}}}, \tag{12}$$

und damit höher als die Frequenz im Bezugssystem der Quelle. Die Frequenzverschiebung $\delta\nu = \nu - \nu_0$ heißt **Dopplerverschiebung**. Wir kennen diesen Effekt z. B. von vorbeifahrenden Ambulanzwagen. Bewegt sich die Quelle von uns fort, so erscheint die Frequenz tiefer,

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 + v_Q/v_{\mathrm{Ph}}}. \tag{13}$$

Bewegt sich der Beobachter auf die Quelle zu, so verringert sich der Abstand zwischen Beobachter und Quelle während einer Schwingungsdauer $T = 1/\nu_0$ um

$\delta x = v_B \cdot T$, er misst also in dieser Zeit $\delta n = \delta x/\lambda_0$ zusätzliche Wellenberge (Schwingungen). Er nimmt also die Quelle bei einer Frequenz

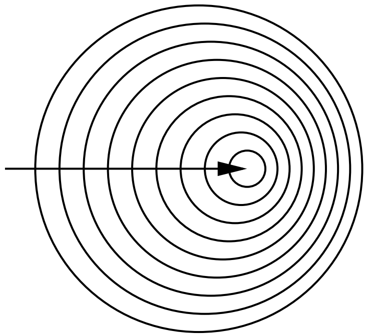
$$\nu = \nu_0 + \frac{\delta n}{T} = \nu_0 + \frac{\delta x}{\lambda_0}\frac{1}{T} = \nu_0 + \frac{v_B \cdot T}{\lambda_0 \cdot T} = \nu_0 + \frac{v_B}{v_{\mathrm{Ph}}}\nu_0 = \nu_0\left(1 + \frac{v_B}{v_{\mathrm{Ph}}}\right), \quad (14)$$

wo wir im zweitletzten Schritt Glg. 10 verwendet haben. Bewegt er sich von der Quelle weg, so hört er diese bei einer Frequenz

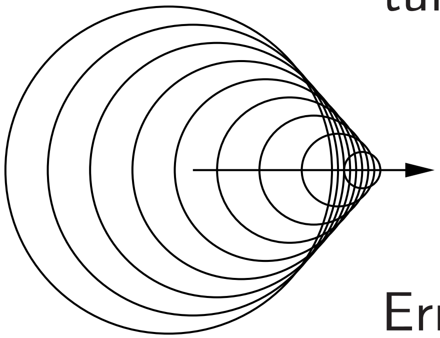
$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{v_B}{v_{\mathrm{Ph}}}\right). \quad (15)$$

Gleichungen 14 und 15 sind **nicht** dieselben wie Glg. 12 oder 13 weil die Ausbreitung von Schallwellen an ein Medium (oft Luft) gebunden ist und sich Quelle und Beobachter verschieden zum ruhenden Medium bewegen können.

Der Machsche Kegel



Bewegt sich die Schallquelle mit einer Geschwindigkeit u relativ zur umgebenden Luft, so führt das, wie wir beim Dopplereffekt gesehen haben, dass der Abstand von zwei Flächen gleicher Phase von der Richtung zum Beobachter abhängt. Dasselbe gilt natürlich auch für die Frequenz und Wellenlänge. Diese können wir für jeden Winkel α zwischen Beobachter und Bewegungsrichtung berechnen:



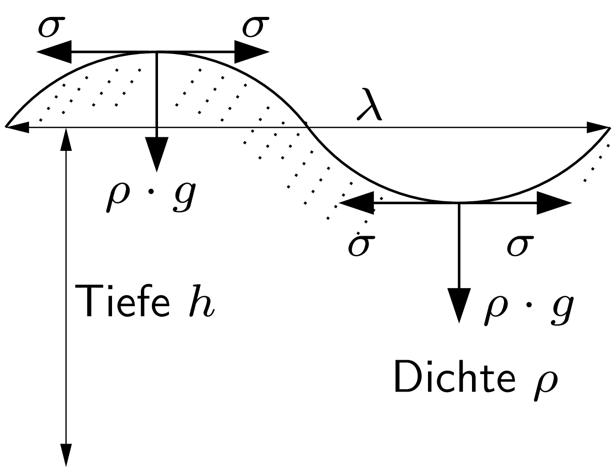
$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{\nu_0} \left(v_{\mathrm{Ph}} - v \cdot \cos\alpha \right).$$

Erreicht nun die Geschwindigkeit v gerade die Schallgeschwindigkeit v_{Ph}, so ist $\lambda(\alpha = 0) = 0$. Die Kugelwellen "stauen" sich an der vordersten Front. Ist die Quelle sogar noch schneller, so tritt die Situation links auf und es bildet sich eine Stoßfront an den Orten, an denen $\lambda(\alpha) = 0$ ist, also wo $\cos(\alpha) = v_{\mathrm{Ph}}/v$. Das Verhältnis $M = v/v_{\mathrm{Ph}}$ heißt **Machzahl**.

Solche **Machkegel** kann man nicht nur hören, sondern Sie haben sie auch schon gesehen, nämlich wenn Sie die Bugwelle von Schiffen beobachtet haben. Diese sind oft schneller unterwegs, als die Geschwindigkeit, mit der sich Wellen auf der Oberfläche von Wasser fortpflanzen können. Versuchen Sie es selber in der Badewanne und bewegen Sie Ihren Finger zuerst langsam durchs ruhige Wasser und anschließend schnell.

Die Physik von (Oberflächen-) Wellen von Wasser ist im Detail kompliziert und wird unter anderem von der Tiefe des Wassers beeinflusst, weshalb wir diese im Folgenden nur oberflächlich behandeln.

Oberflächenwellen an Trennflächen



Ja, so können wir Wasserwellen auch nennen... Bei diesen Wellen wirkt die Gravitation und die Oberflächenspannung σ als rückstellende Kraft. Wir können die komplizierte Physik von solchen Wellen hier nicht behandeln, der wesentliche Punkt ist, dass ihre Phasengeschwindigkeit

$$v_{\mathrm{Ph}} = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{g\lambda}\right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)},$$

von der Wassertiefe h und der Wellenlänge λ abhängt. Man sagt, Wasserwellen zeigen **Dispersion**!

Dispersion, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer monochromatischen Wasserwelle sei $v_{\mathrm{Ph}} = c(\lambda)$. Setzt sich eine echte Welle aus mehreren Frequenzen zusammen, so weisen diese alle ihre eigene Ausbreitungsgeschwindigkeit $c(\lambda)$ auf. Die **Phasengeschwindigkeit** der einzelnen Wellenanteile ist definiert durch $v_{\mathrm{Ph}i} \doteq \omega_i/k_i$. Sind die Phasengeschwindigkeiten der verscheidenen Wellen verschieden, läuft die Welle "auseinander", man sagt, sie zeigt **Dispersion**. Um die Welle dennoch charakterisiern zu können, definiert man die sog. **Gruppengeschwindigkeit**, $v_G \doteq \partial\omega/\partial k$.

Der Unterschied zwischen den beiden Geschwindigkeiten ist bei der **Schwebung** besonders deutlich. Die einzelnen hochfrequenten Wellenberge pflanzen sich mit der Phasengeschwindigkeit fort, die Einhüllende mit der Gruppengeschwindigkeit, vgl. S. 26.

Wellen im Festkörper

Ähnlich wie im Gas können Wellen auch durch einen Festkörper dringen. Teilchen an der Stelle x sollen eine Schwingungsamplitude A aufweisen, dann haben die Teilchen bei $x+\mathrm{d}x$ eine Amplitude $A+\mathrm{d}A = A+\partial A/\partial x\mathrm{d}x$. Bei der Schwingung ändert sich die Dicke des Volumenelements $\mathrm{d}V = \Sigma\mathrm{d}x$ (wo Σ die Fläche sei), dabei tritt eine rücktreibende Kraft auf $F = \sigma\Sigma$. Die Spannung, die bei der Längenänderung der Länge $\mathrm{d}x$ um $\partial A/\partial x\mathrm{d}x$ auftritt ist nach dem Hookeschen Gesetz

$$\sigma = E\frac{\partial A}{\partial x}$$

An der Stelle $x + \mathrm{d}x$

$$\sigma + \mathrm{d}\sigma = \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\mathrm{d}x = \sigma + E\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

womit auf das Volumenelement die Kraft

$$\mathrm{d}F = \Sigma\ (\sigma + \mathrm{d}\sigma - \sigma) = \Sigma \mathrm{d}\sigma = \Sigma\ E\ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

wirkt. E ist der Elastizitätsmodul. Diese Kraft führt zu einer Beschleunigung $\partial^2 A/\partial t^2$ des Massenelementes $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$, also

$$\mathrm{d}F = \rho \mathrm{d}V \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \rho \Sigma \mathrm{d}x \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

Wir können nun einsetzen und erhalten

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

für Longitudinalschwingungen im Festkörper. Die Phasengeschwindigkeit lautet $v_{\mathrm{Ph}} = \sqrt{E/\rho}$. Berücksichtigt man noch die auftretende Querkontraktion, so erhält man

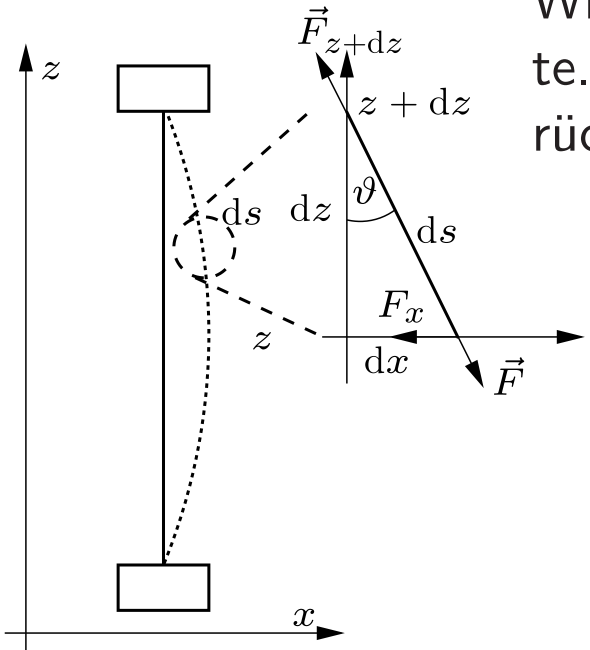
$$v_{\mathrm{Ph}} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)\ (1-2\mu)}}.$$

Für Transversalwellen erhält man analog

$$v_{\mathrm{Ph}} = \sqrt{G/\rho},$$

wo G der Schermodul ist.

Eine gespannte Saite



Wir betrachten nun eine in $x-$-Richtung ausgelenkte Saite. Auf ein infinitesimales Längenelement $\mathrm{d}s$ wirkt eine rücktreibende Kraft in x-Richtung

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F_x &= (F\sin\vartheta)_{z+\mathrm{d}z} - (F\sin\vartheta)_z \\
&= (F\sin\vartheta)_z + \frac{\partial}{\partial z}(F\sin\vartheta)\,\mathrm{d}z - (F\sin\vartheta)_z \\
&= \frac{\partial}{\partial z}(F\sin\vartheta)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Für kleine Auslenkungen ist der $\sin\vartheta \approx \tan\vartheta = \partial x/\partial z$, womit wir oben haben

$$\mathrm{d}F_x = F\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\mathrm{d}z.$$

Ist μ die Masse der Saite pro Längeneinheit, so muss wegen $\mathrm{d}s \approx \mathrm{d}z$ und dem zweiten Newtonschen Gesetz gelten

$$\mu \, \mathrm{d}z \, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F \, \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \mathrm{d}z.$$

Dies ist auch wieder eine Wellengleichung, die Phasengeschwindigkeit ist also

$$v_{\mathrm{Ph}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Halten wir nun die Länge der Saite fest und erlauben nur die Grundschwingung, z. B. durch Streichen eines Bogens, so muss also ν wegen $v_{\mathrm{Ph}} = \lambda\nu$ bei zunehmender Kraft steigen - der Effekt, der bei Saiten einer Gitarre oder Geige, etc. zum Stimmen ausgenutzt wird.

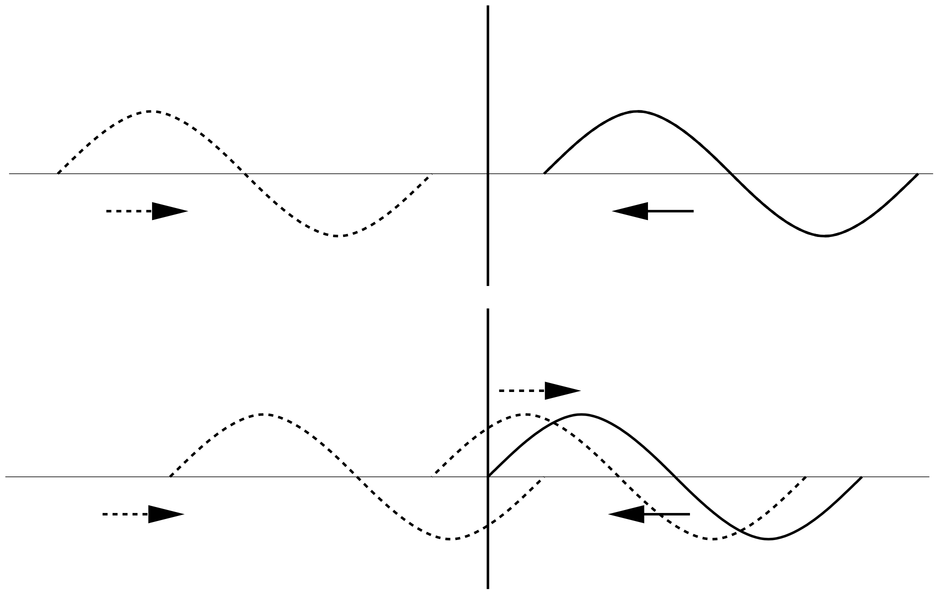
Reflexion von Wellen, stehende Wellen

Wir haben bereits diskutiert, dass die Überlagerung von Wellen linear geschehen soll, jedenfalls solange die Amplituden klein sind (Superpositionsprinzip). Betrachten wir nun eine Welle A_1, die sich in $-x$-Richtung bewegt und bei $x = 0$ auf eine reflektierende Stelle stößt. Sie kehrt dann als Welle A_2 zurück, die Superposition (Überlagerung) der beiden Wellen lautet daher

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= A \sin(\omega t + kx) + A \sin(\omega t - kx + \varphi)\,, \\ &= 2A \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\, \cos\left(-kx\; - \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

wo eine mögliche Phasenverschiebung φ berücksichtigt wird. Diese muss durch die Randbedingungen festgelegt werden.

Die Reflexion lässt sich als Superposition von zwei gegenläufigen Wellen auffassen. Lassen wir ein Seil mit einem freien Ende schwingen, so kann es dort um die volle Amplitude ausgelenkt werden. Wird es an diesem Ende aber festgehalten, muss die Amplitude der Schwingung dort verschwinden (für immer, d. h. alle Zeiten t).



Beim freien Ende lautet die Randbedingung $A(x = 0) = 2A_0$, folglich muss $\varphi = 0$

gelten, also

$$A(x,t) = 2A_0 \sin(\omega t) \cos(-kx),$$

d. h. am freien Ende tritt kein Phasensprung auf.

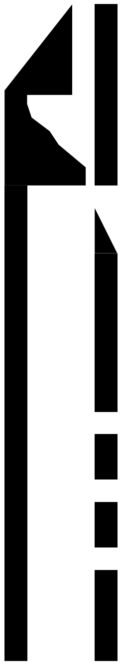
Am festen Ende hingegen, muss gelten, dass $A(x = 0) = 0$ und folglich $\varphi = \pi$, also

$$A(x,t) = 2A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-kx - \frac{\pi}{2}\right),$$

bei der Reflexion am festen Ende tritt also ein Phasensprung von π auf.

Bei der stehenden Welle bilden sich Wellenbäuche und -knoten aus. Letztere lassen sich sichtbar machen: in einer Dimension z. B. mit dem Kundtschen Staubrohr, in zwei Dimensionalen z. B. mit Sand, der sich stabil nur entlang der Knotenlinien aufhalten kann. An allen anderen Orten wird er wegen der Bewegung der Membran wegbewegt (Chladnysche Klangfiguren). In einer Dimension können sie hörbar gemacht werden mit dem Quinckeschen Resonanzrohr, einem mit einem variablen

Wasserstand gefüllten Glasrohr, welches durch einen Lautsprecher beschallt wird. Ist die Länge im freien Glasrohr $L = (2n+1)\lambda/4$, so tritt Resonanz auf – der Schall wird hörbar lauter.



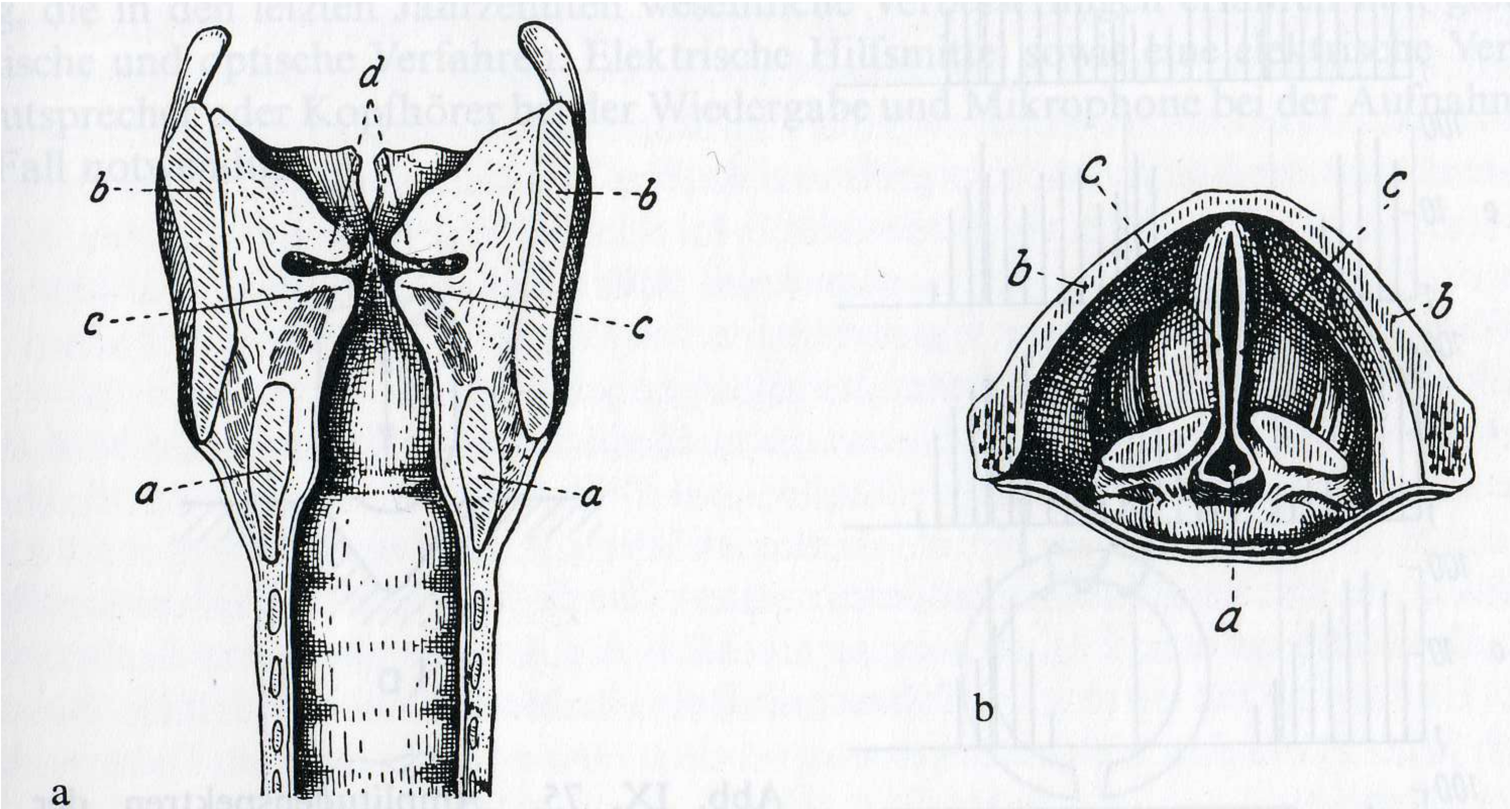
Ein Rohr ist auch die einfachst mögliche Realisierung eines Blasinstrumentes. Auch hier bilden sich stehende Wellen aus. Bei einem geschlossenen Ende muss die Amplitude der Schwingung verschwinden, am offenen Ende muss der Druck konstant sein (was könnte er den sonst?), weil die Schwingungen gegenüber dem Druck phasenverschoben sind, verschwinden sie dort eben nicht - das Pendant zum freien Seilende.

Eine andere Realisierung ist die Pfeife oder die Flöte. Die Länge der schwingenden Luftsäule wird durch die Löcher (mit Fingern zu- und abdeckbar) definiert. Durch diese findet ein Druckausgleich mit der Umgebung statt – hier muss also der Druck konstant sein, was, wie bereits gesehen, einen Wellenbauch bedeutet.

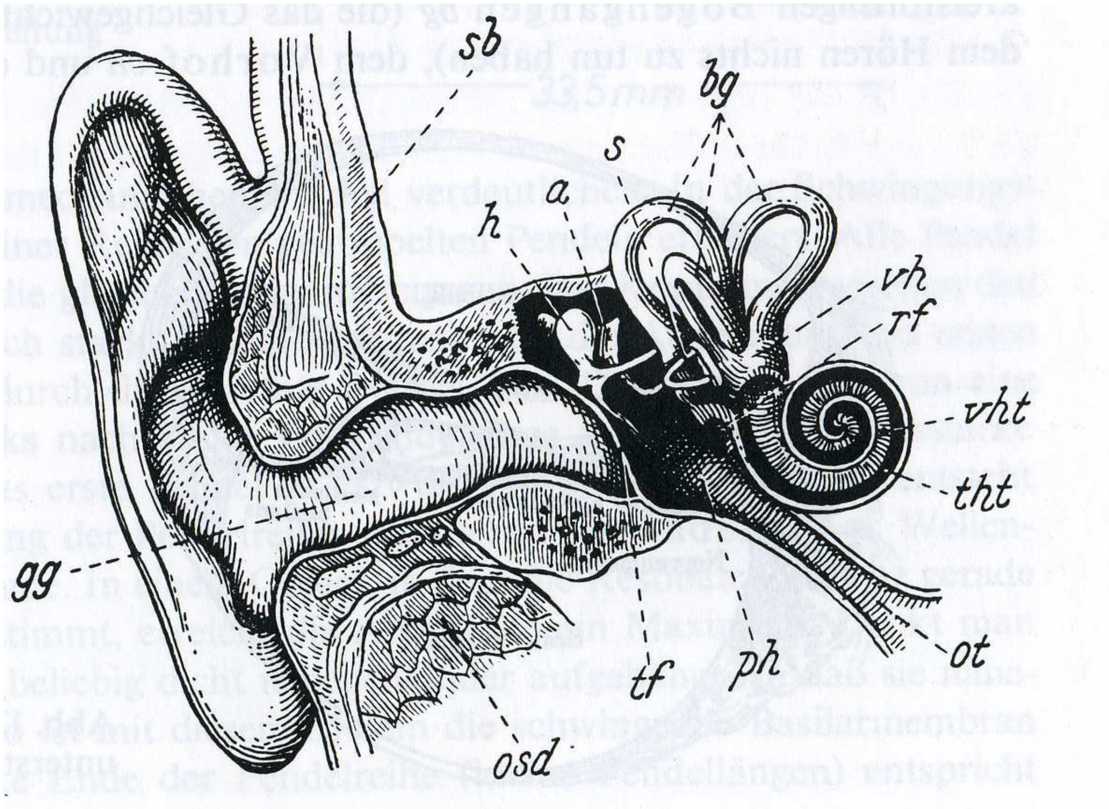
Die möglichen stehenden Wellen in einem Rohr, bzw. einer Saite sind gegeben durch die Länge des Rohres, die Frequenz der entstehenden Welle wird durch das Material bestimmt. Bei einer Saite haben wir gesehen, dass die Phasengeschwindigkeit gegeben ist durch $v_{\mathrm{Ph}} = \sqrt{F/\mu}$, in einem Gas der Dichte ρ durch $v_{\mathrm{Ph}} = \sqrt{\gamma P/\rho}$. Die Frequenz der Stimme beim Einatmen von Helium wird deutlich erhöht, was z. B. bei Tiefseetauchern zum Berufsalltag gehört.

Hier wird das Rohr durch den Kehlkopf gebildet, die Anregung mit einer bestimmten Frequenz geschieht mit den Stimmbändern. Die an ihnen vorbeistreichende Luft führt, entsprechend der Spannung der Stimmbänder, zu Tönen einer bestimmten Frequenz. Weil die möglichen resonanten Wellenlängen durch die Dimension des Kehlkopfes gegeben sind, muss sich, bei veränderter Phasengeschwindigkeit, die Frequenz des hörbaren Tons verschieben.

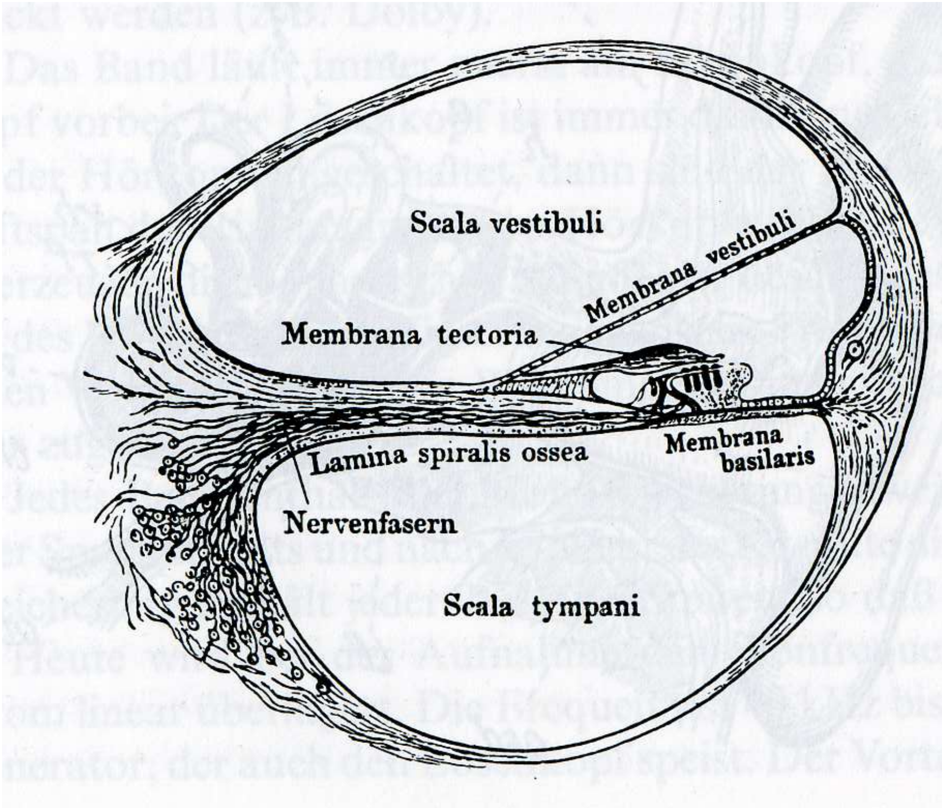
Der menschliche Kehlkopf



Das menschliche Ohr



Die Schnecke



Die Spektralzerlegung nach Fourier

Die Resonanzfrequenz einer Saite lässt sich umgekehrt auch verwenden, um die Frequenz eines Tones zu bestimmen. Spannt man mehrere sonst identische Saiten immer ein wenig anders, so lassen sich von einem Ton die verschiedenen Obertöne bestimmen; versuchen Sie es mit einem Klavier – singen Sie laut einen Ton, das Klavier übernimmt ihn. Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung von Blattfedern mit verschiedenen Eigenfrequenzen.

Mathematisch lässt sich diese Idee durch die sog. Fourierzerlegung oder Fourieranalyse realisieren. Dabei wird eine Schwingung ausgedrückt als eine Summe von unendlich vielen harmonischen Schwingungen.

Jede periodische Funktion $f(t)$ lässt sich schreiben als

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\omega t + \phi_n\right),$$

wo ω die Frequenz der Grundschwingung ist. Ist die Funktion nicht unbedingt periodisch, so lässt sie sich trotzdem als Überlagerung von periodischen Funktionen schreiben, nur etwas komplizierter:

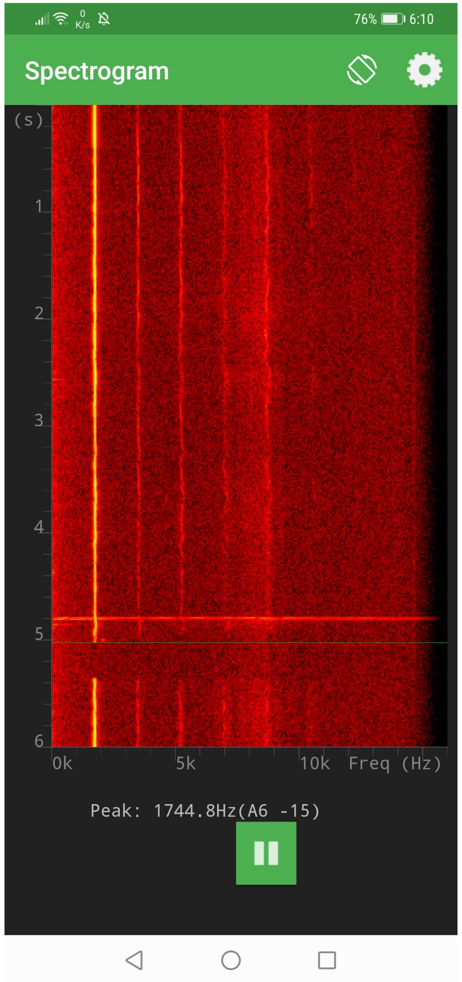
$$f(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \; a(\omega) \cos \omega t \; + \; b(\omega) \sin \omega t,$$

wo die Koeffizienten $a(\omega)$ und $b(\omega)$ gegeben sind durch

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; f(t) \cos \omega t,$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; f(t) \sin \omega t.$$

Der Vorteil der mathematischen Behandlung liegt u. a. an der Möglichkeit, einen Ton mit einem Mikrophon aufzunehmen und ihn dann anschließend auf einem PC nach seinen Frequenzen zu analysieren. Es ist nicht notwendig, ein Klavier mitzuschleppen. Dabei stellt man fest, dass es eigentlich sehr wenige "reine" Schwingungen im Sinne von reinen harmonischen Schwingungen gibt - diese werden in der Regel sogar als unangenehm empfunden! Angenehme Klänge, wie z. B. die menschliche Stimme, setzen sich stets aus mehreren Frequenzen zusammen, eine Grundfrequenz, der Grundton, und mehrere "harmonische" Frequenzen, die Obertöne. Die verschiedenen Vokale klingen anders, sie haben auch eine andere Frequenzverteilung. Diese wird, bei gleichbleibender Anregung durch die Stimmbänder und Kehlkopf, durch Veränderung anderer Resonanzkörper (Mund-, Nasen- und Rachenhöhle) erreicht.



Ferner gibt es Tonkombinationen, die für uns angenehm klingen (obwohl dies auch eine Gewöhnungsfrage ist!). Diese sind stets aus festen Frequenzverhältnissen gebildet, in der Musiklehre haben diese vorgegebene Namen, z. B. Oktave für ein Frequenzverhältnis von $2 : 1$, Quinte für $3 : 2$, Quarte für $4 : 3$, etc. Dass diese Kombinationen angenehm klingen ist auch wieder auf das Auftreten von Obertönen zurückzuführen.

Sie können mit Ihrem Handy die Fourierzerlegung von Geräuschen durchführen und sie sich anschauen! Die Graphik links zeigt einen Screenshot einer solchen Fourierzerlegung, die ich, während ich einen Ton bei 1745 Hz gepfiffen habe, mit der frei verfügbaren App "Physics Toolbox Sensor Suite" durchgeführt habe. Hier läuft die Zeit von oben nach unten.