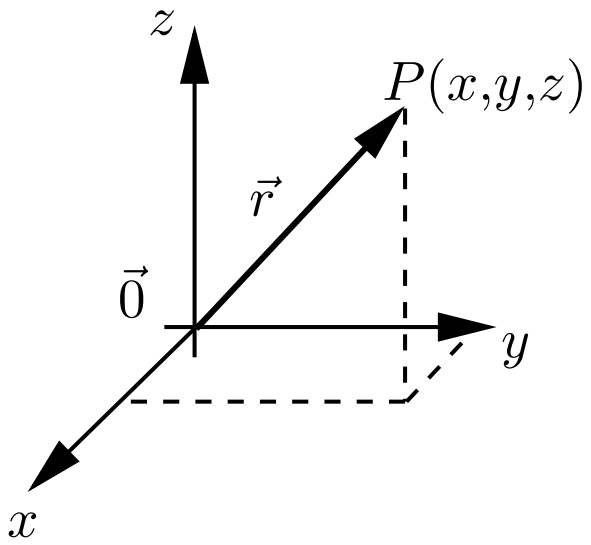
Kinematik des Massenpunktes

Kinematik: Beschreibt die Bewegung von Körpern, ohne die zugrunde liegenden Kräfte zu berücksichtigen.

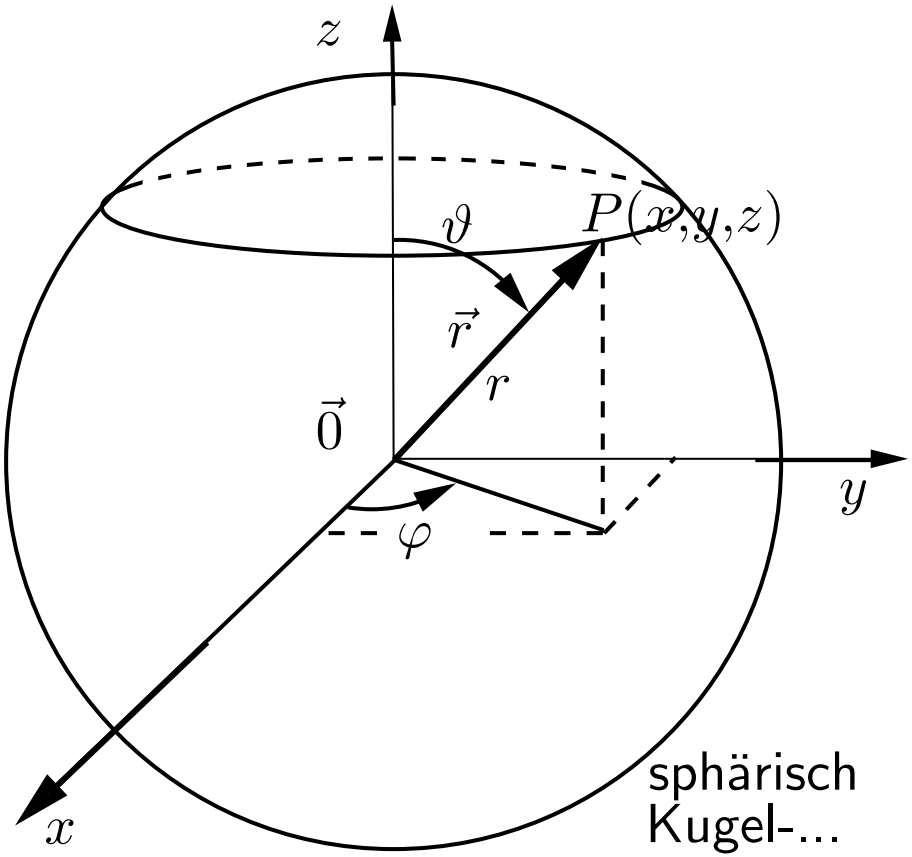
- Bezugssysteme
- Trajektorien
- Zeit
- Raum

Bezugssysteme

- Koordinatensystem, z. B.
  - kartesisch
  - Kugelkoordinaten
  - Zylinderkoordinaten
- "Uhr"



kartesisch
rechtwinklig



sphärisch
Kugel-...

Zwischen den kartesischen und sphärischen Koordinatensystemen kann man 1:1

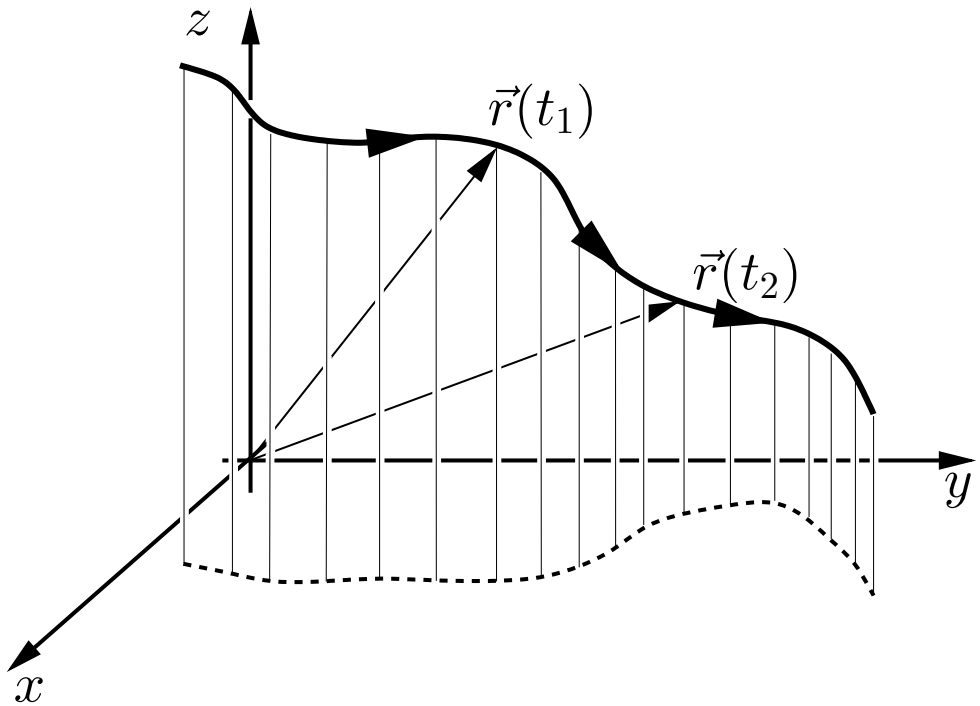
hin- und hertransformaieren - ohne Information zu verlieren:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi &= \arctan\tfrac{y}{x} \\ \vartheta &= \arccos\tfrac{z}{r} \end{aligned}$$

Beide Koordinatensystem sind gleichberechtigt, je nach Problem kann es sinnvoller sein, das eine oder das andere einzusetzen. Ähnlich verhält es sich mit Zylinderkoordinaten,

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arcsin\tfrac{y}{\rho} \\ z &= z. \end{aligned}$$

Trajektorien



Jeder Punkt entlang der Trajektorie kann durch eine Koordinate in einem entsprechenden Koordinatensystem beschrieben werden, z.B.:

$$\begin{aligned} x(t) &= r \sin\vartheta(t) \cos\varphi(t) \\ y(t) &= r \sin\vartheta(t) \sin\varphi(t) \\ z(t) &= r \cos\vartheta(t). \end{aligned}$$

Kann das Problem dynamisch beschrieben werden, so gilt für jede Koordinate eine Bewegungsgleichung! Diese kann einfacher auch als Vektorgleichung geschrieben werden.

Zeit

Was ist Zeit?

- Zeit vergeht
- Sie vergeht immer nur in einer Richtung (Warum? $\longrightarrow$ Physik der Materie II)
- Wir können sie messen!
  Die Sekunde ist definiert als 9'192'631'770 Perioden der elektromagnetischen Strahlung des Übergangs zwischen den Hyperfeinstrukturzuständen des Grundzustandes von Cäsium 133.
- lange Zeiten - kurze Zeiten

Lange Zeiten

Radioaktiver Zerfall: Zufälliger Zerfall eines instabilen Kernes. λ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Kern innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls $\mathrm{d}t$, z. B. in einer Sekunde, zerfällt. Dann gilt für die Anzahl Kerne

$$\mathrm{d}N = -\lambda \cdot N \cdot \mathrm{d}t.$$

Differentialgleichung! Ansatz:

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t}.$$

Auch sehr langsame, stochastische Prozesse können (in ihren statistischen Fehlergrenzen) exakt beschrieben werden.

Halbwertszeit

Mittlere Lebensdauer $\tau \doteq 1/\lambda$ (Dimensionsanalyse!): Zeit, bis nur noch $1/e$ der ursprünglichen Menge vorhanden ist.

Halbwertszeit $T_{1/2}$: $N\left(T_{1/2}\right) = N_0/2$, also

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}},$$

damit

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \ln 2 \cdot \tau, \quad \text{wo} \quad \ln 2 \approx 0.69$$

Die mittlere Lebensdauer τ ist $1/\ln 2$ länger als die Halbwertszeit, bzw. die Halbwertszeit ist $\ln 2$ mal kürzer als die mittlere Lebensdauer, τ.
Faustregel: Abnahme (Zunahme) um x% pro Zeiteinheit entspricht Halbierung (Verdoppelung) innert 69/x Zeiteinheiten. (Beweisen Sie dies selber!)

Halbwertszeiten wichtiger instabiler Isotope

Isotop	$T_{1/2}\ [a]$
^{238}U	$4{,}51 \cdot 10^9$
^{40}K	$1{,}26 \cdot 10^9$
^{14}C	5570
Proton	10^{31}

Anwendungen in der Planetologie, Geologie, Astrophysik, Kosmologie, Klimaforschung, Umweltphysik,. . .

Raum

- Länge
- Fläche
- Volumen
- Winkel
- Raumwinkel

Große und kleine Distanzen

- Parsec
- Lichtjahre
- Kerndurchmesser 10^{-15}m
- kleiner: $\Delta x \geq \hbar/2\Delta p$, wo $\hbar = 1.054571817 \times 10^{-34}$ Js

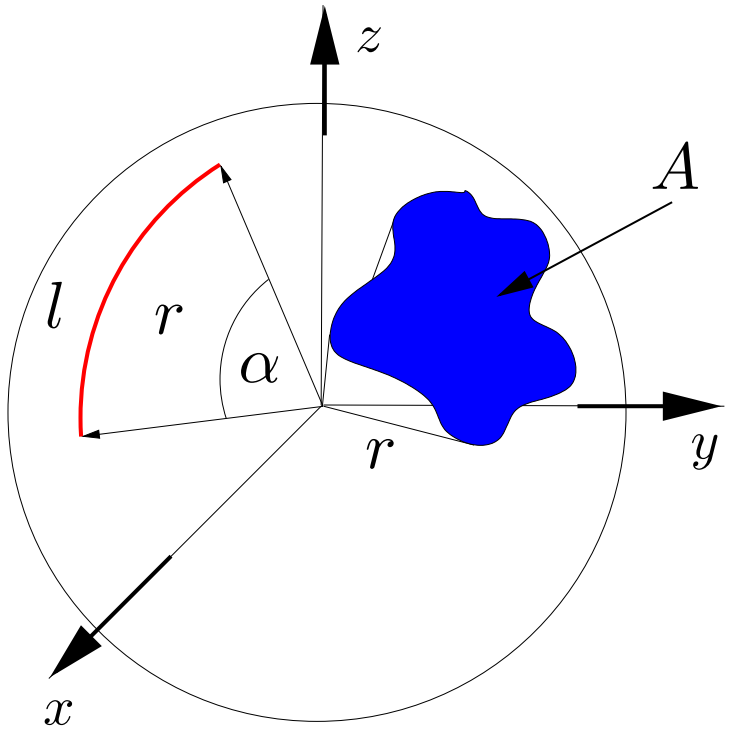
Übung: Rechnen Sie nach, wie groß Δx für verschiedene Körper sein kann!

Definitionen

- Meter: Strecke, die Licht im Vakuum in einer 299'792'458-stel Sekunde zurücklegt
- Astronomische Einheit: Mittlerer Abstand Sonne-Erde, 1,4959787$\cdot 10^{11}$ m
- Lichtjahr: Strecke, die Licht im Vakuum in einem Jahr zurücklegt, 9,4605$\cdot 10^{15}$ m
- Parsec: 3,26 Lichtjahre, 3,0857$\cdot 10^{16}$ m
- Angstrøm: 1 Å$= 10^{-10}$ m

Winkel und Raumwinkel

$$\alpha \doteq \frac{l}{r}$$



$$\Omega \doteq \frac{A}{r^2}$$

Geschwindigkeit

$$v \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

bzw.

$$v \doteq \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$

Beispiel: $s = (A/2)t^2 + Bt + C$. Wie schnell bewegt sich das Teilchen?
Tip: $t \to t + \Delta t$ einsetzen! In Δt hat sich das Teilchen um Δs bewegt.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t}\left(s(t+\Delta t) - s(t)\right) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{A}{2}(t+\Delta t)^2 + B(t+\Delta t) + C\right) - \left(\frac{A}{2}t^2 + Bt + C\right)\right] \\
&\approx At + B = at + v_0 = v(t).
\end{aligned}$$

Beschleunigung

Wie ändert sich die Geschwindigkeit?

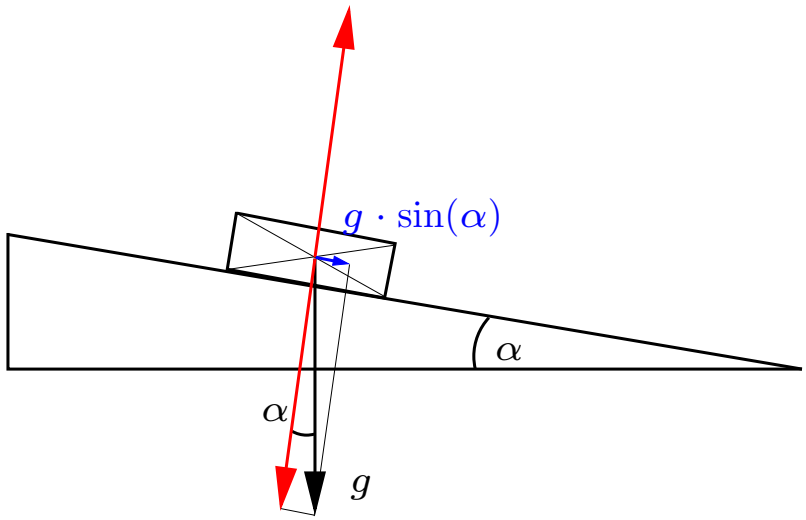
$$a \doteq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \ddot{s} \doteq \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$

Beispiel $s = \frac{A}{2}t^2 + Bt + C$. Wie ändert sich die Geschwindigkeit?

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A.$$

Der freie Fall

Wie fällt eine Kugel von der Decke? Wie lange braucht sie von der Decke zum Boden; wie schnell ist sie unmittelbar vor dem Aufprall?
Problem: Zeiten kurz, bei hohen Geschwindigkeiten verfälscht der Luftwiderstand das Resultat. (Wir leben nicht im Vakuum!).



$$s = \tfrac{1}{2} g \sin\alpha \; t^2$$

Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$
\begin{aligned}
v = \dot{s} &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\
a = \ddot{s} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}
$$

und umgekehrt als Integral. . .

Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung II

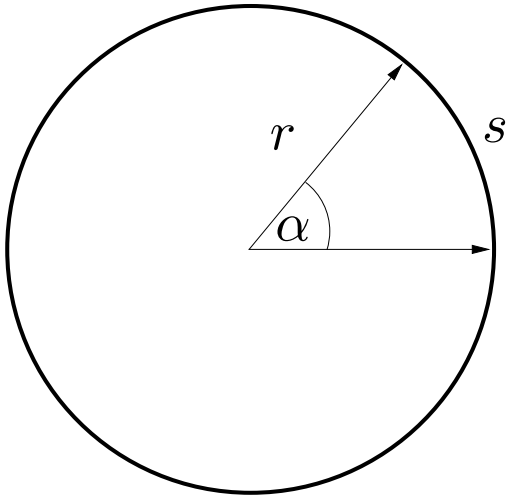
$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \mathrm{d}t' v(t') \\
v(t) &= \int_0^t \mathrm{d}t' a(t') \\
s(t) &= \int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^{t'} \mathrm{d}t'' a(t'')
\end{aligned}
$$

Für $v(t) = \text{const.}$: $s = vt + s_0$, für $a(t) = g = \text{const.}$: $v = gt + v_0$ und $s = \frac{1}{2}gt^2 + +v_0 t + s_0$

Das Ganze in Vektorschreibweise

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{s}} \\ \vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\vec{s}} \end{aligned}$$

Beispiel Kreisbewegung



$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\alpha}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$

Winkelgeschwindigkeit $\omega \doteq \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$

$v = r\omega$

Beispiel: Erde rotiert einmal pro Tag um ihre Achse:
Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/86400 \approx 7.27 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$

Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{1}{24\mathrm{h}} = \frac{1}{86'400\mathrm{s}} \approx 1.157 \cdot 10^{-5}\mathrm{Hz}$

In Vektorschreibweise

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{\omega}$: entlang Rotationsachse, "Rechte-Hand-Regel": $\vec{\omega}$: Daumen, Finger: Richtung der Rotation

ω ist ein sog. axialer Vektor, d. h. er ändert seine Richtung unter einer Inversion

am Nullpunkt nicht.

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$\vec{a}(t)$ heißt Zentripetalbeschleunigung. Für eine Kreisbewegung gilt

$$\vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{a}_r| = a_r = \frac{v^2}{r}.$$

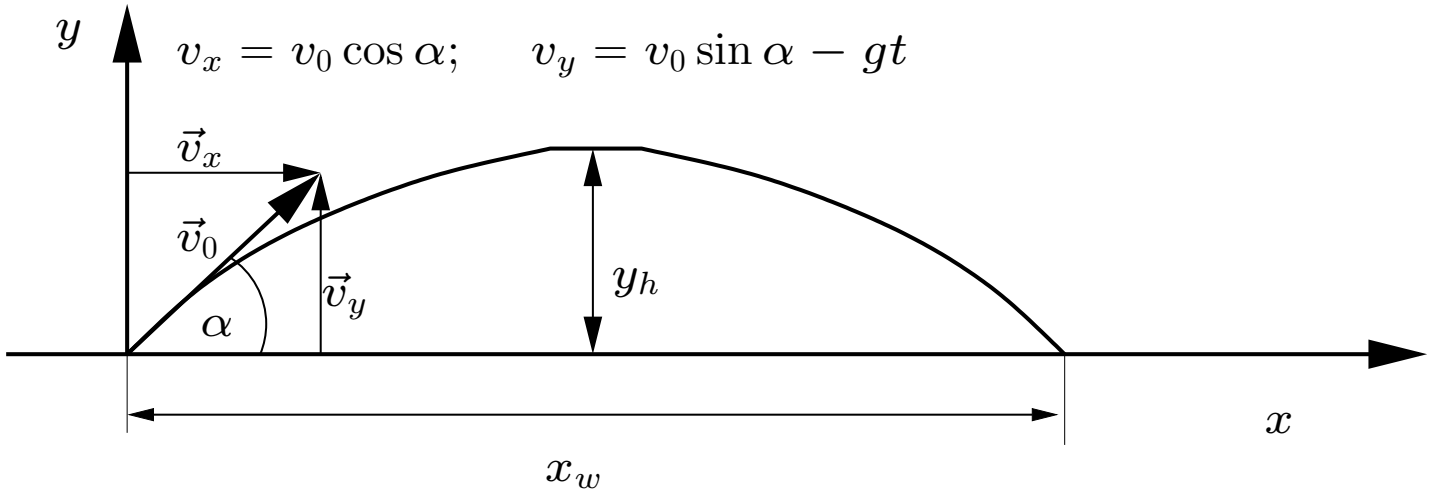
Zerlegung nach Komponenten

Geschwindigkeit und Beschleunigung (wie jeder Vektor) lassen sich nach Komponenten unterteilen.

Beispiele:

- Boot im Fluss, Flugzeug mit Seitenwind
- krummlinige Bewegung, schiefer Wurf

Schiefer Wurf

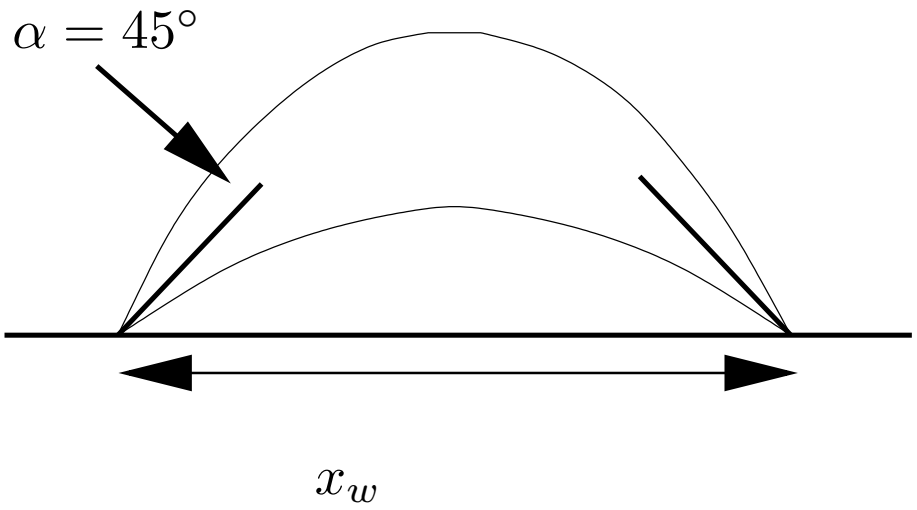


v_y erreicht nach einer Zeit t_s den Wert $v_y(t_s) = 0$.

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt_s = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_s = (v_0 \sin\alpha)/g.$$

Die Dauer des Wurfes ist $t_w = 2t_s$ weil die Bewegung nach unten gleich lange dauert, wie nach oben. Wir kennen also die Wurfdauer!

Schiefer Wurf II



Jede Wurfweite x_w kann durch zwei Winkel α erreicht werden. Dazu setzen wir die Wurfdauer in den Ausdruck für die Wurfweite ein:

$$\begin{aligned} x_w &= v_x t_w = \overbrace{v_0 \cos\alpha}^{v_x} \cdot \overbrace{2(v_0 \sin\alpha)/g}^{t_w}, \\ &= \frac{2}{g} v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha. \end{aligned}$$

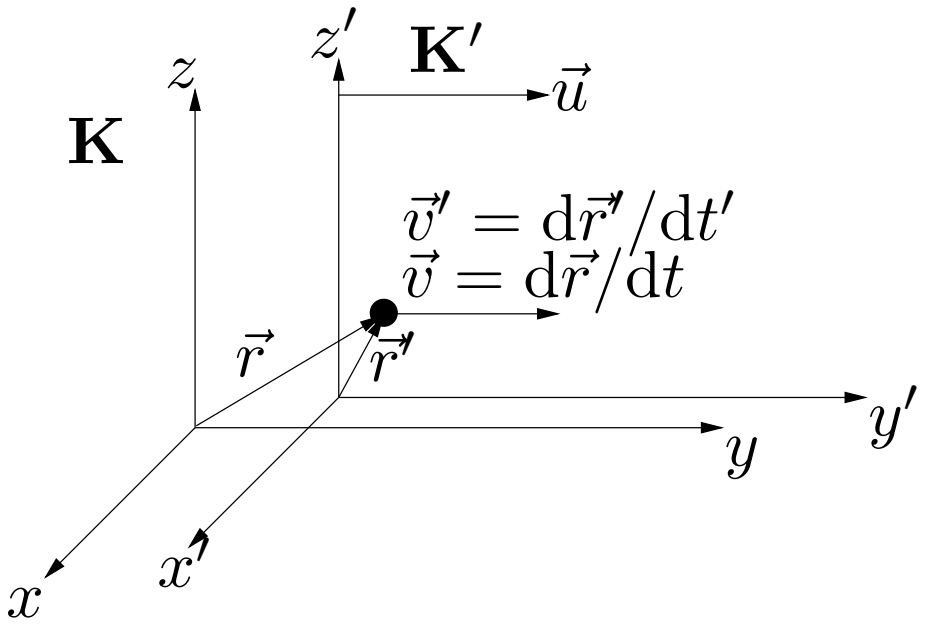
Nun gilt aber auch die trigonometrische Beziehung $2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha$, womit wir haben

$$x_w = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Bewegte Bezugssysteme

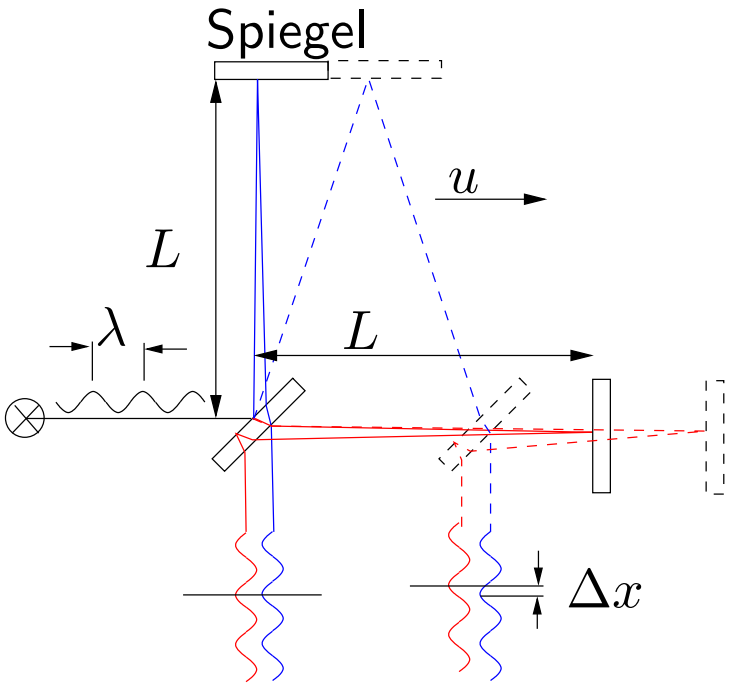
- Galilei-Transformation
- Lorentz-Transformation

Galilei-Transformation



$$y' = y - ut$$
$$t' = t$$

Das Michelson-Morley Experiment



$$(ct_1)^2 = L^2 + (ut_1)^2$$
$$2t_1 = 2(L/c)/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$ct_2 = L + ut_2$$
$$ct_3 = L - ut_3$$
$$\rightarrow t_2 + t_3 = 2(L/c)/(1 - u^2/c^2))$$

$$2t_1 - (t_2 + t_3) \approx -L/c \cdot u^2/c^2$$

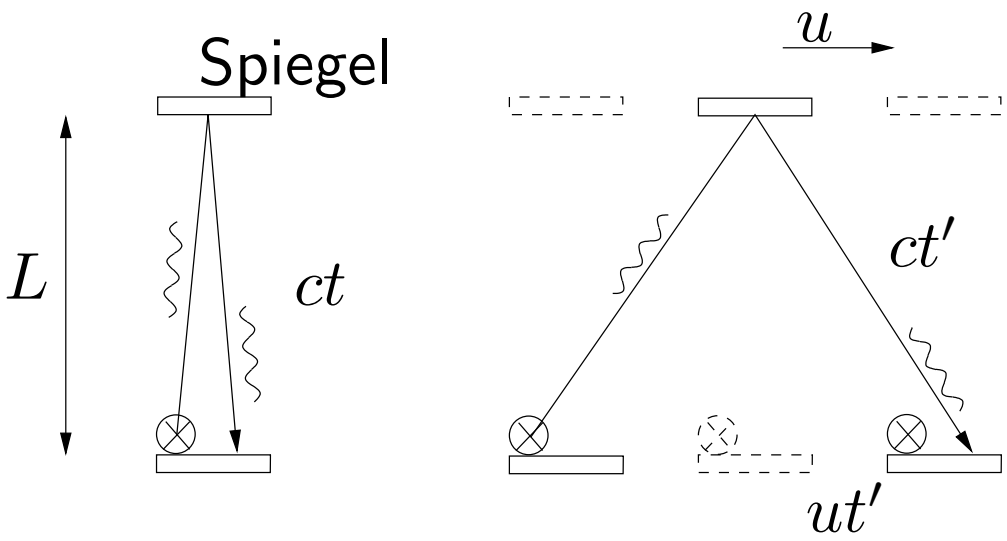
Lorentz-Kontraktion

Das Experiment von Michelson-Morley ergibt ein Null-Resultat, d. h. keinen Unterschied in den Gangzeiten des Lichtes zwischen den beiden senkrechten Armen. Wir wissen aber, dass sehr wohl ein Geschwindigkeitsunterschied existiert! Mögliche Erklärung:

Die Länge L entlang der bewegten Achse ist "geschrumpft" (kontrahiert) um genau den Faktor $\sqrt{1 - u^2/c^2}$

$$L' = \frac{L - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Zeitdilatation



$$c^2t^2 = c^2t'^2 - u^2t'^2$$
$$t' = t/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Eine Erklärung für diese Beobachtung könnte auch sein, dass die Zeit in den beiden Bezugssystemen anders geht. Im schneller bewegten vergeht die Zeit langsamer. Dies wird tatsächlich für energiereiche Müonen (Reaktionsprodukte der Wechselwirkung der galaktischen kosmischen Strahlung mit der Erdatmosphäre) gemessen. Diese sind in niedriger Höhe viel häufiger, als man nach ihrer Lebensdauer und Geschwindigkeit klassisch erwarten würde.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Wer gut aufgepasst hat, hat gesehen, dass in diesen Rechnungen die Lichtgeschwindigkeit nie transformiert wurde, d. h. als konstant in allen Bezugssystemen betrachtet werden musste. In der Tat folgt die spezielle Relativitätstheorie aus dieser Beobachtung: Unter Annahme einer konstanten Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen folgen die Gleichungen für die Lorentz-Transformationen.

Interessanterweise sind die Gleichungen der Elektrodynamik (2. Semester) "invariant" gegenüber Lorentz-Transformationen. Sie sind es nicht gegenüber den "intuitiv einleuchtenden" Galilei Transformationen. Genaueres Betrachten zeigt aber, dass die Galilei-Transformationen für kleine Geschwindigkeiten aus den Lorentztransformationen hervorgehen, also in diesen als "Spezialfall" enthalten sind.

Lorentz-Transformation

Die Lorentz-Transformationen lauten nun:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Der immer wiederkehrende Wurzelfaktor wird oft γ genannt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Für kleine Geschwindigkeiten erhalten wir wieder die "normalen" Galilei-Transformationen.

Das Zwillingsparadoxon

Das berühmteste Beispiel aus der speziellen Relativitätstheorie ist wohl das Zwillingsparadoxon ("Gegenmeinung"). Ein Astronaut und sein Zwillingsbruder verabschieden sich auf der Erde. Nach -zig Jahren kehrt der Astronaut von seiner Reise bei sehr hohen Geschwindigkeiten zurück und ist jünger als sein Bruder! Während zwar in jedem Paar von Inertialsystemen die dem anderen scheinbar bewegte Uhr langsamer geht, so muss der Astronaut kurz vor seiner Rückreise das Inertialsystem wechseln in eines, das gerade in die entgegengesetzte Richtung fliegt. Deshalb sind die Messungen der beiden Brüder nicht äquivalent und das Paradoxon real. Es manifestiert sich in unserem Leben nicht, weil die dafür erforderlichen Geschwindigkeiten außerordentlich hoch sind.

Mehr dazu in der Vorlesung Physik der Materie II – Kerne und Elementarteilchen.

Relativistische Addition von Geschwindigkeiten

Wenn die Lichtgeschwindigkeit konstant sein muss, wie erklärt sich dann die Geschwindigkeit des Lichtes einer Taschenlampe auf einer Rakete? Die hier auftretenden Geschwindigkeiten müssen *relativistisch* addiert werden. Im Bezugssystem K gilt

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right),$$

während im mit u bewegten Bezugssytem K' gilt

$$\vec{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z) = \left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}, \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}, \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} \right).$$

Wir verwenden die Transformationsregel für x, $x' = \gamma(x - ut)$ und für t,

$t' = \gamma(t - ux/c^2)$ bzw. $t = \gamma(t' + ux'/c^2)$ und schreiben

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}, \\ &= \gamma\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - u\right) \cdot \gamma\left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Wir lösen nach v'_x auf

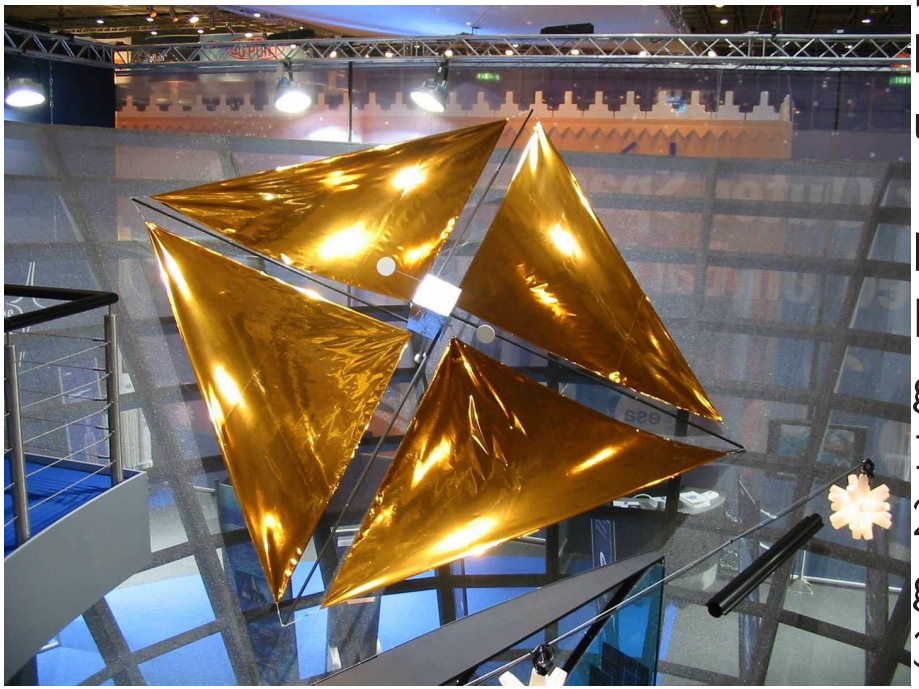
$$
\begin{aligned}
v'_x &= \gamma\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - u\right) \cdot \gamma\left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right), \\
\frac{v'_x}{\gamma^2} &= (v_x - u) \; + \; v'_x\left(\frac{v_x u}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}\right), \\
v'_x\left(\frac{1}{\gamma^2} - \left(\frac{v_x u}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}\right)\right) &= (v_x - u), \\
v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}, \quad \text{bzw.} \quad v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}}.
\end{aligned}
$$

Ähnlich leitet man her:

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{v_x u}{c^2}\right)}, \qquad \text{bzw.} \qquad v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x u}{c^2}\right)},$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{v_x u}{c^2}\right)}, \qquad \text{bzw.} \qquad v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x u}{c^2}\right)}.$$

Breakthrough Starshot



Breakthrough Starshot[1] will mit einem kurzzeitigen Laserpuls von 10 Minuten und einer Leistung von 100 GW eine "Sonnensegel"-basierte Raumsonde auf bis zu 20% der Lichtgeschwindigkeit in Richtung Proxima Centaury beschleunigen.

1) Wieviel Leistung sind 100 GW?

2) Berechnen Sie die maximale Masse der gesamten Raumsonde.

3) Wie groß wäre die Beschleunigung?

4) Das Wievielfache der Erdbeschleunigung wäre das?

[1] `https://breakthroughinitiatives.org/initiative/3`