Der Trägheitstensor J

Stellen wir uns einen Kreisel vor, der um eine beliebige Achse dreht. Gilt die Beziehung $\vec{L} = J\vec{\omega}$ in jedem Bezugssystem?

Dazu betrachten wir nochmals die Bewegung eines starren Körpers. Er lässt sich ausdrücken als Überlagerung einer Translationsbewegung mit einer Rotation, also

$$\vec{v}_i = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_i \tag{1}$$

für jeden gedachten Massenpunkt im Körper. Nun muss ja die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ sein, also

$$E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_S^2 + 2\vec{v}_S \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \right).$$

Nun sind $\vec{v}_S$ und $\vec{\omega}$ für alle Punkte im Körper gleich. Also lassen sich $\vec{v}_S$ und $\vec{\omega}$ vor das Summenzeichen ziehen. Dazu nutzen wir die Eigenschaft des Spatproduktes aus ($\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$), womit der zweite Term umgeformt wird in

$$\sum_i m_i\vec{v}_S\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \sum_i m_i\vec{r}_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{v}_S) = (\vec{\omega}\times\vec{v}_S)\cdot\sum_i m_i\vec{r}_i.$$

Nach Definition des Schwerpunkts $\sum_i m_i\vec{r}_i = 0$, also verschwindet dieses Glied. Damit bleibt nur noch

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{(\sum_i m_i)}{2}\vec{v}_S^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)^2.$$

Nun verwenden wir die Vektoridentität

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{A}^2\vec{B}^2 - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2$$

um den zweiten Term umzuschreiben

$$E_{\text{kin}} = \frac{(\sum_i m_i)}{2}\vec{v}_S^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)^2\right).$$

Dies ist natürlich das bekannte Resultat, dass sich die kinetische Energie als Summe aus translatorischer und rotatorischer Energie schreiben lässt.

Wir drücken dieses Resultat für die rotatorische Energie nun noch komplizierter aus, in sog. Tensorschreibweise, indem wir die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ in Komponenten r_j und ω_j ausdrücken (dabei unterdrücken wir, um die entstehenden Ausdrücke zu vereinfachen, den Index i von $\vec{r}_i$)

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\omega_j^2 r_l^2 - \omega_j r_j \omega_k r_k\right),$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\omega_j\omega_k\delta_{jk}r_l^2 - \omega_j\omega_k r_j r_k\right), \\
&= \frac{1}{2}\omega_j\omega_k \sum_i m_i \left(r_l^2\delta_{jk} - r_j r_k\right),
\end{aligned}
$$

wo δ_{jk} das sog. Kronecker-Delta ist und wir die sog. Einstein-Konvention vorausgesetzt haben, laut der über doppelt vorkommende Indizes summiert wird, also

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i \doteq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Wir definieren nun als **Trägheitstensor** J_{jk} den Ausdruck

$$J_{jk} \doteq \sum_i m_i \left(r_l^2\delta_{jk} - r_j r_k\right),$$

womit die kinetische Energie des starren Körpers in einem beliebigen Koordinatensystem lautet

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{(\sum_i m_i)}{2}\vec{v}_S^2 + \frac{1}{2}J_{jk}\omega_j\omega_k.$$

Aus seiner Definition sieht man leicht, dass der Trägheitstensor J symmetrisch ist

$$J_{jk} = J_{kj}.$$

Der Trägheitstensor J

Die früher hergeleitete Vektorgleichung für den Drehimpuls ($\vec{L} = J\vec{\omega}$) z. B. lautet nun in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z, \\ L_y &= J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z, \\ L_z &= J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z. \end{aligned}$$

Die Komponenten J_{jk} des **Trägheitstensors** sind gegeben durch:

$$J_{xx} = \int \mathrm{d}m(r^2 - x^2); \quad J_{yy} = \int \mathrm{d}m(r^2 - y^2); \quad J_{zz} = \int \mathrm{d}m(r^2 - z^2);$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\int \mathrm{d}mxy; \quad J_{yz} = J_{zy} = -\int \mathrm{d}myz; \quad J_{xz} = J_{zx} = -\int \mathrm{d}mxz.$$

Damit lautet der Trägheitstensor ausgeschrieben

$$J_{jk} = \begin{pmatrix} \int \mathrm{d}m(r^2 - x^2) & -\int \mathrm{d}mxy & -\int \mathrm{d}mxz \\ -\int \mathrm{d}mxy & \int \mathrm{d}m(r^2 - y^2) & -\int \mathrm{d}myz \\ -\int \mathrm{d}mxz & -\int \mathrm{d}myz & \int \mathrm{d}m(r^2 - z^2) \end{pmatrix}.$$

Die diagonalen Elemente ergeben sich aus der Überlegung, dass das Trägheitsmoment durch eine Rotation um die entsprechende Achse gegeben ist, $J_{xx} = \int \mathrm{d}m(y^2 + z^2) = \int \mathrm{d}m(r^2 - x^2)$. Die hier gegebene Form ist abhängig vom gewählten Bezugssystem (wo ist z. B. die x-Achse?), lässt sich aber in andere Bezugssysteme umrechnen.

Warum so kompliziert?

Wir betrachten nun die Rotationsenergie eines um eine beliebige Achse drehenden Körpers. Für ein einzelnes infinitesimales Massenelement Δm_i gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 &= \frac{1}{2}\Delta m_i \left(\vec{\omega}\times\vec{r_i}\right)\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r_i}\right)\\ &= \frac{1}{2}\Delta m_i \left[\vec{\omega}^2\vec{r_i}^2 - \left(\vec{\omega}\cdot\vec{r_i}\right)^2\right],\end{aligned}$$

wo wir die Vektoridentität

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{A}^2\vec{B}^2 - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2$$

verwendet haben. Um die gesamte Rotationsenergie des Körpers zu finden, integrieren wir nach $\mathrm{d}m$.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{rot}} &= \frac{\omega^2}{2}\int \mathrm{d}m r^2 - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}m \left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\right)^2 \\ &= \frac{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}{2}\int \mathrm{d}m \left(x^2+y^2+z^2\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}m \left(\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\omega_x^2 J_{xx}+\omega_y^2 J_{yy}+\omega_z^2 J_{zz}\right) \\ &\quad +\omega_x\omega_y J_{xy}+\omega_x\omega_z J_{xz}+\omega_y\omega_z J_{yz}. \end{aligned}$$

Dieser komplizierte Ausdruck kann einfacher in Matrixschreibweise geschrieben

werden:

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\vec{\omega},$$

was folgendes bedeutet

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(\omega_x,\omega_y,\omega_z\right)\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Alle Elemente des Trägheitstensors tragen also zur Rotationsenergie bei, wenn der Körper um eine beliebige Achse rotiert!

Der Trägheitstensor ist symmetrisch und daher diagonalisierbar. Bildlich kann man sich dies so vorstellen: Wir berechnen für eine Rotation um eine beliebige Achse $\vec{\omega}$ durch einen Punkt P das Trägheitsmoment J. Danach zeichnen wir auf der Achse einen Punkt im Abstand $k/\sqrt{J}$, wo k eine Konstante sei. Nun variieren

wir die Achse und wiederholen das Verfahren für alle möglichen Achsen. Auf diese Weise bilden wir eine Fläche entlang der $R^2 J = k^2 = \text{const}$. Diese Fläche bildet ein Ellipsoid, das sog. **Trägheitsellipsoid**.

Die **längste Hauptachse** zeigt entlang der Achse mit dem **kleinsten Trägheitsmoment**. Die Hauptachsen des Trägheitsellipsoids heißen **Hauptträgheitsachsen** und zeichnen genau das Koordinatensystem aus, in dem der Trägheitstensor diagonal wird. Nach Konvention werden sie der Größe nach sortiert, $J_a \leq J_b \leq J_c$. Körper drehen sich stabil immer nur um die Achse mit dem größten oder dem kleinsten Trägheitsmoment.
Rotationen sind nur um die Achsen mit dem größten und dem kleinsten Trägheitsmoment stabil. Um die Trägheitsachse mit dem dazwischenliegenden Trägheitsmoment sind sie es nicht. Diese Tatsache wird oft "Tennisracket-Effekt genannt" weil man sie mit den stabilen Rotationsbewegeungen eines Tennisschläger sehr schön sichtbar machen kann[1].

[1] Man findet auch die Bezeichnung "Dzahnibekov-Effekt" nach dem russischen Kosmonauten, der den Effekt auf

Kreisel

Kreiselart	Hauptträgheitsmomente
asymmetrisch	$J_a \neq J_b \neq J_c$
symmetrisch	$J_a = J_b \neq J_c$ oder $J_a \neq J_b = J_c$ oder $J_a = J_c \neq J_b$
Kugel-	$J_a = J_b = J_c$

der ISS popularisiert hat.

Kreiselbewegungen

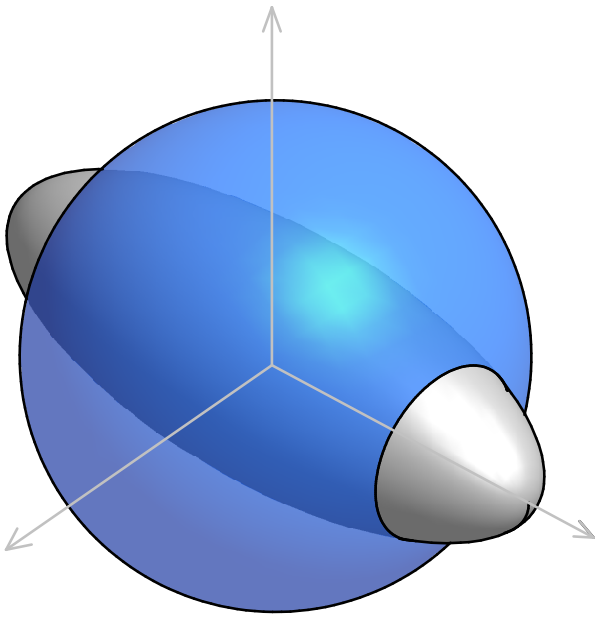
Im System der Hauptträgheitsachsen lautet der Ausdruck für das Quadrat des Drehimpulses und für die kinetische Energie

$$L^2 = L_a^2 + L_b^2 + L_c^2 = \text{const.}, \tag{2}$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\left(\omega_a^2 J_a + \omega_b^2 J_b + \omega_c^2 J_c\right) = \frac{L_a^2}{2J_a} + \frac{L_b^2}{2J_b} + \frac{L_c^2}{2J_c}, \tag{3}$$

eine Gleichung für eine Kugel mit Radius L^2 und ein Ellipsoid mit Hauptachsen $\sqrt{2J_a}$, $\sqrt{2J_b}$ und $\sqrt{2J_b}$. Bei jeder Bewegung müssen beide Gleichungen (2 und 3) erfüllt bleiben. Der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ muss also auf der Schnittmenge des Kreises mit dem Ellipsoid liegen. Der Drehimpuls bleibt immer raumfest (**Drehimpulserhaltung!**).

Kreiselbewegungen II



Das graue Ellipsoid stellt Glg. 3 im Hauptachsensystem dar, die blaue Kugel die Drehimpulserhaltung (Glg. 2).
Das Ellipsoid rotiert mit dem Kreisel, der Drehimpuls bleibt raumfest. Deshalb muss der Kreisel (und mit ihm sein Trägheitsellipsoid) so rotieren, dass $\vec{L}$ immer auf der Schnittkurve bleibt. Die so entstehende Bewegung heisst **Nutation**. Die Kreiselachse und die momentane Drehachse führen um die konstante Drehimpulsachse eine Nutationsbewegung aus.

Es gibt also für jede Drehbewegung bis zu drei verschiedene Achsen, die für die Beschreibung der Drehbewegung erforderlich sind.

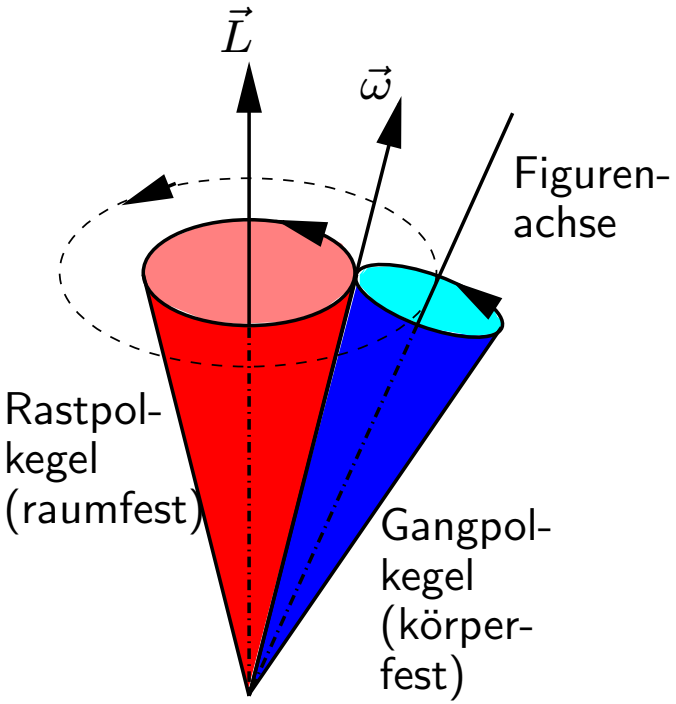
Nutation

Die **Nutation** beschreibt also einen **kräftefreien** ("drehmomentfreien") symmetrischen Kreisel (Bsp. Fahrradkreisel).

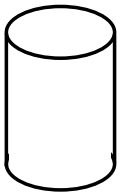
$$\vec{M} \equiv \vec{0} \Longrightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

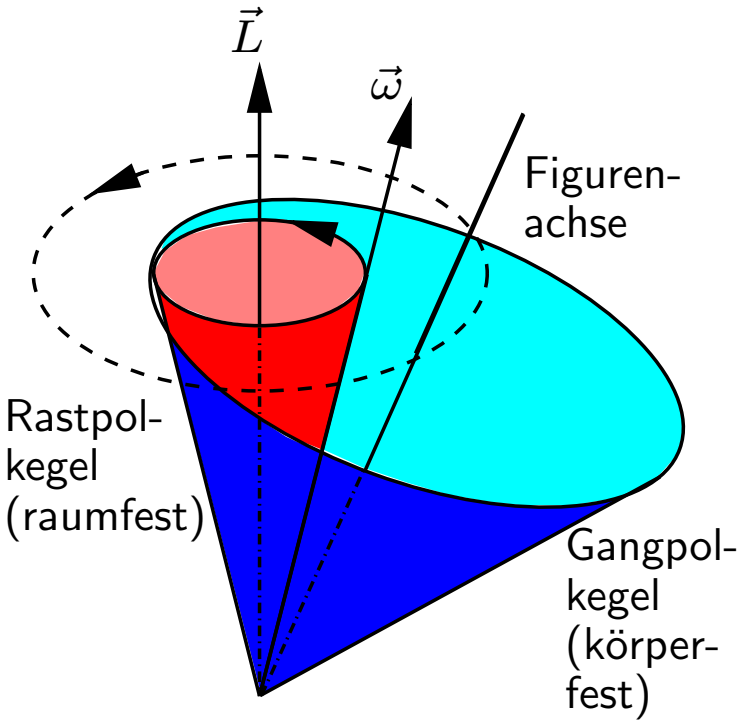
Allgemeinste Bewegung gegeben durch drei Achsen:

- raumfeste Drehimpulsachse $\vec{L}$
- momentane Rotationsachse $\vec{\omega}$ (ändert sich laufend!)
- Figurenachse

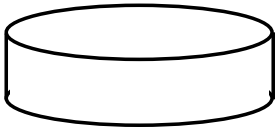


prolater Kreisel





oblater Kreisel



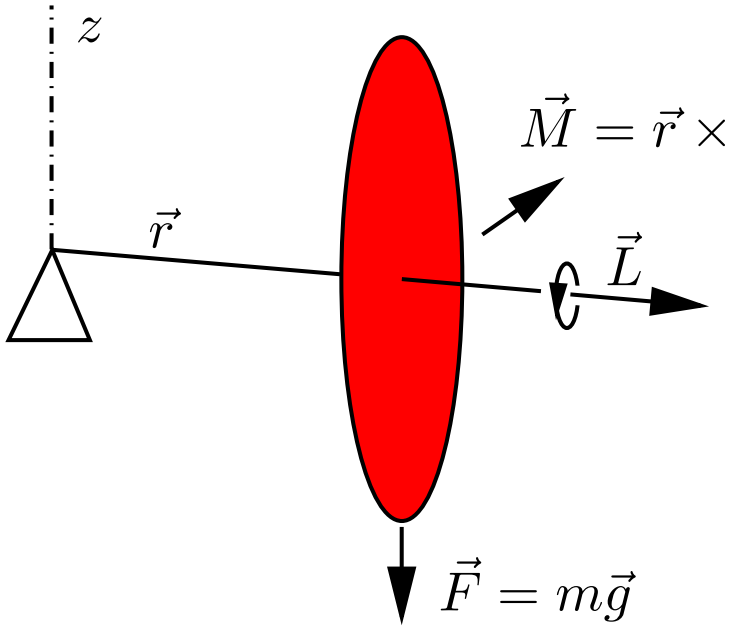
Präzession

Greift an einem Kreisel ein Drehmoment an, so ist er nicht mehr kräftefrei (drehmomentfrei) und der Drehimpuls ist nicht mehr eine erhaltene Größe:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}.$$

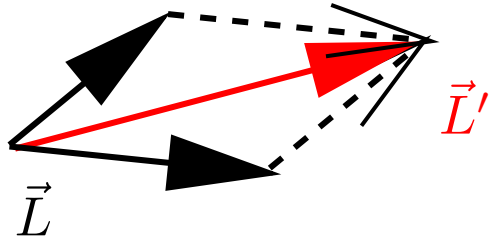
Dieses Drehmoment führt zum Auftreten der **Präzession**.

kräftefreier Kreisel	Nutation
angreifendes Drehmoment	Präzession



Das während einer kurzen Zeit angreifende Drehmoment $\vec{M}$ bewirkt eine kleine Änderung des Drehimpulses $\mathrm{d}\vec{L} \parallel \vec{M}$

$$\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$$

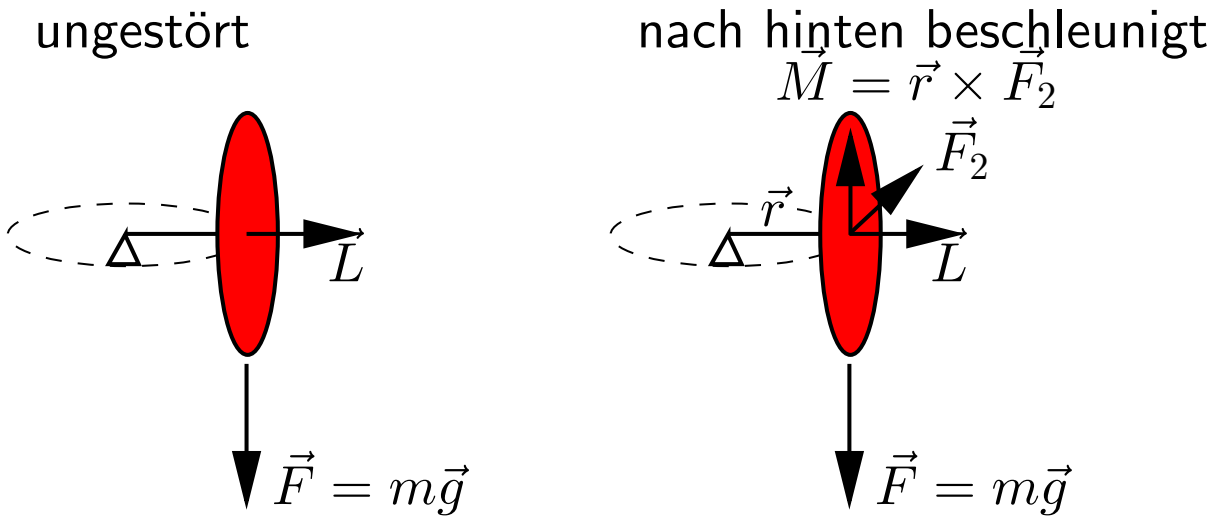


$$\vec{L}' = \vec{L} + \vec{M}\mathrm{d}t$$

Die Präzession führt zu einer Drehung um die Achse z mit der Präzessionsgeschwindigkeit $\omega_P = |\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}|\ |\frac{1}{\vec{L}}| = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|}$

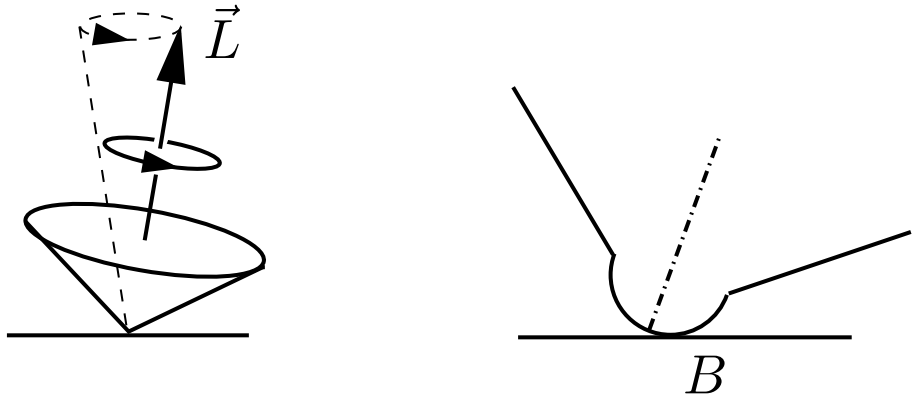
Präzession II

Versucht man den Radkreisel entlang seiner Präzessionsbewegung zu beschleunigen, so erfährt er ein Drehmoment, welches nach oben zeigt. Das Rad muss sich also aufrichten. Versucht man den Kreisel entlang der Präzessionsbewegung abzubremsen, so sinkt er. Dies erklärt, warum sich Spielkreisel aufrichten.



Aufrichten eines Kinderkreisels

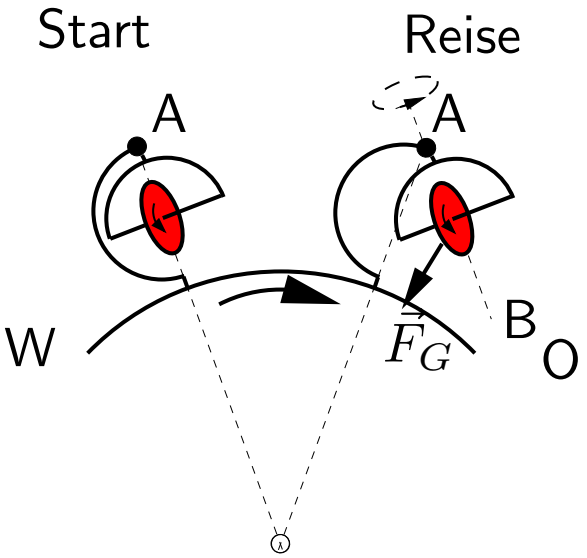
Die Reibungskraft im Punkt B führt zu einer Beschleunigung in Richtung der Präzessionsbewegung. Der Kreisel richtet sich auf.



Ohne etwas Reibung kein Aufrichten, bei zu viel Reibung verlangsamt sich der Kreisel aber zu schnell.

Der Kreiselkompass

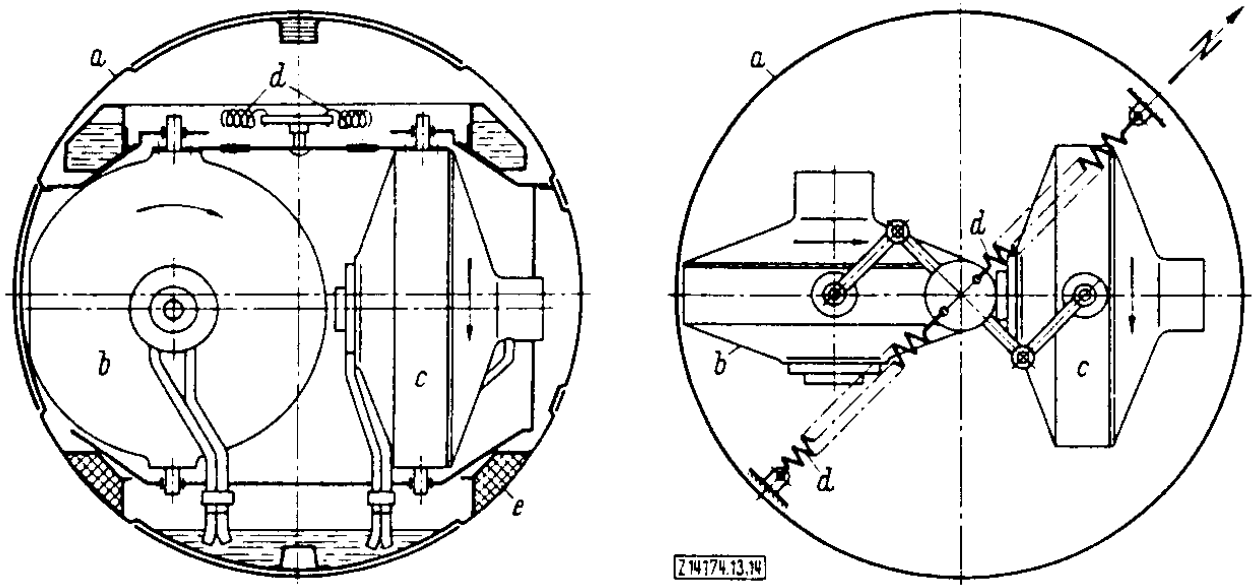
Der Kreiselkompass soll immer die Nordrichtung angeben. Dazu kann die Erdanziehung ausgenutzt werden, die immer zum Erdmittelpunkt zeigt. Patent: Anschütz Kiel.



Die Erdanziehung $\vec{F}_G$ zeigt immer zum Erdmittelpunkt. Dadurch erfährt der Kreisel ein Drehmoment, welches die Kreiselrichtung um genau den Winkel verdreht, der notwendig ist, um den Kompass wieder nach Norden zeigen zu lassen.

Der Kreiselkompass von Anschütz

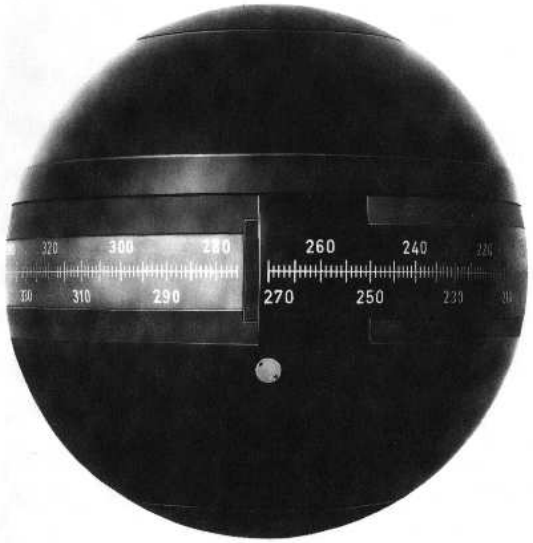
Auf Schiffen ist die Halterung/Lagerung ein Problem. Dieses wurde hier in Kiel durch Anschütz gelöst.

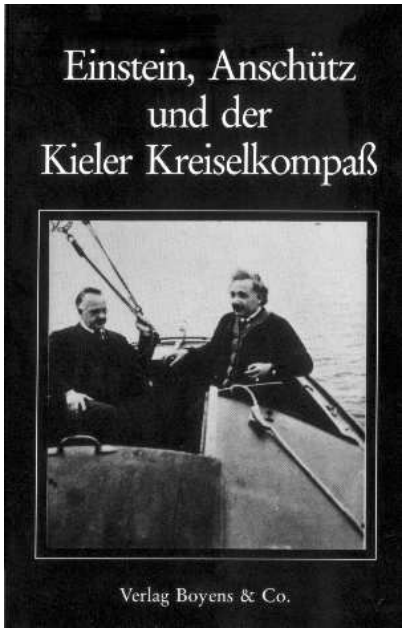


Quelle: `http://www.ieap.uni-kiel.de/plasma/ag-piel/vorl/kap15/kap15.html`

Der Kreiselkompass von Anschütz II

Auch berühmte Leute waren mit von der Partie. . . A. Einstein war am Patent beteiligt und besuchte deswegen mehrmals Anschütz in Kiel.

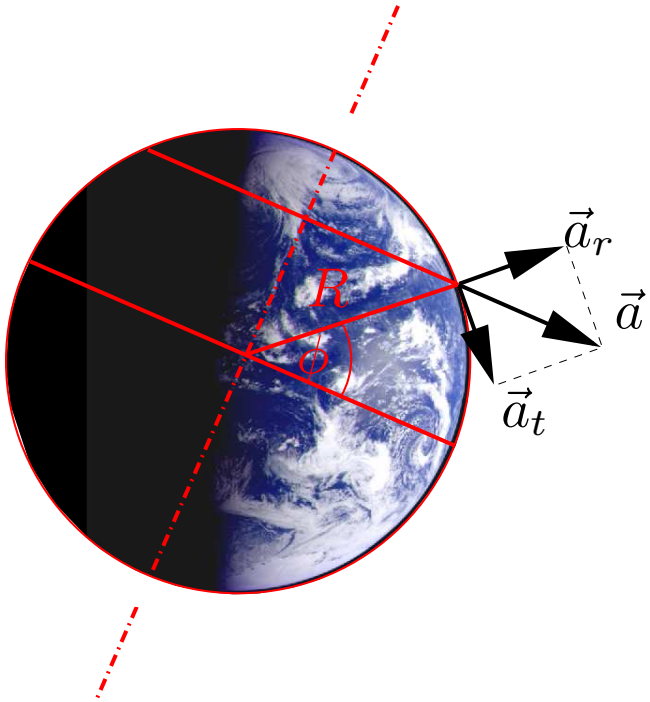


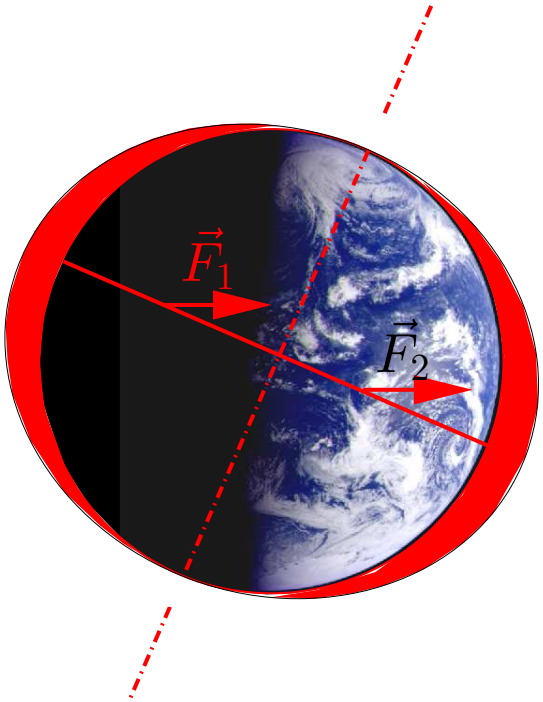


Quelle: `http://www.ieap.uni-kiel.de/plasma/ag-piel/vorl/kap15/kap15.html`

Präzession der Erdachse

Erdrotation $\longrightarrow$ Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a} = \omega^2 R \cos\phi \approx 3.4 \cos\phi$ cm/s^2.



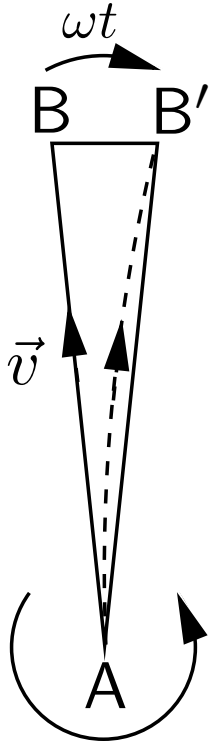


Die Tangentialkomponente führt zur Ausbildung von "Wülsten" entlang des

Äquators. Diese werden verschieden stark von der Sonne angezogen, was einem Drehmoment auf die Erde gleichkommt. Folge: der Drehimpuls der Erde bleibt nicht konstant. Die Erdachse präzessiert einmal in ca. 26'000 Jahren.

Der Unterschied in der Anziehung verschwindet im Frühling und im Herbst und ist auch im Sommer und Winter nicht gleich stark. Diese Unterschiede führen, zusammen mit dem Einfluss des Mondes, zu kleineren Schwankungen des Drehimpulses, welche in der Astronomie "Nutation" genannt werden, auch wenn es sich streng genommen nicht um eine Nutation handelt.

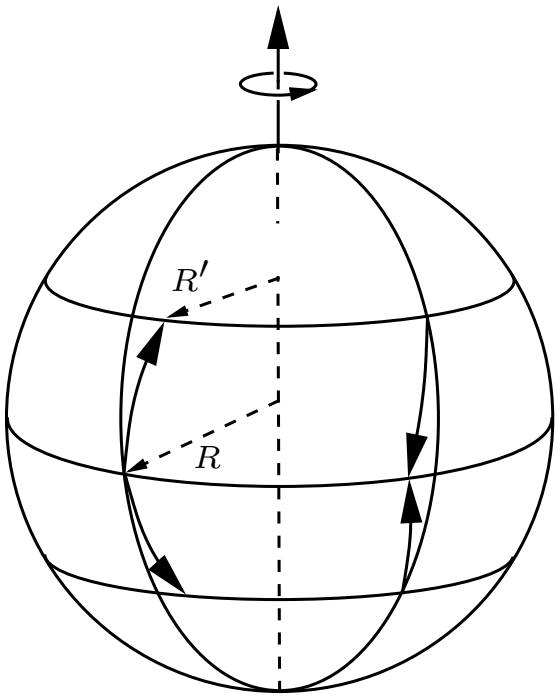
Rotierende Bezugssysteme: Die Corioliskraft



Ein Massenpunkt bewege sich auf einer rotierenden Scheibe von Punkt A aus mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ zum Punkt B hin. Infolge der Rotation erreicht er aber nach einer Zeit t den Punkt B', der um einen Winkel ωt gegenüber von B versetzt ist. Er legt also den Weg $s = \overline{AB}$ bzw. $s' = \overline{AB'}$ in einer Zeit t zurück, $|s| = |s'| = vt$. Für mitrotierende Beobachter scheint der Massenpunkt also einer Kraft ausgesetzt, die während der Zeit t gewirkt hat und den Weg (gestrichelt) "verbogen" hat.

Die Strecke $\delta = BB'$ ist gerade gleich dem Winkel, der durch BAB' aufgespannt wird, mal die Strecke $s = vt$, also $\delta = \omega t \cdot vt = \omega v t^2$. Nach der allgemeinen Beziehung für die in beschleunigten Bewegungen zurückgelegte Strecke, $\delta = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a_c t^2$, finden wir die Coriolisbeschleunigung $a_c = 2\omega v$.

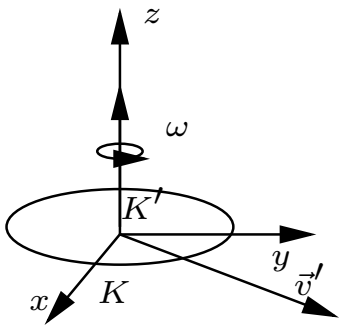
Corioliskraft



Auf der Nordhalbkugel lenkt die Corioliskraft nach rechts ab, auf der Südhalbkugel nach links. Dies ist auch der Ursprung von Zyklonen und Antizyklonen und erklärt auch die verschiedene Abnutzung von Nord-Süd-ausgerichteten Bahngeleisen.

Man kann sich die Richtung der Ablenkung folgendermaßen gut merken: Ein auf der Nordhalbkugel sich nach Norden bewegendes Luftpaket beginne seine Reise an einem Ort mit einem Abstand R von der Rotationsachse. Dieser Abstand verringert sich je weiter das Luftpaket nach Norden fließt (R'). Weil es aber seinen Drehimpuls von seinem Urpsungsort "mitnimmt", muss es bei höheren Breiten der rotierenden Erdkugel "vorauseilen".

Bewegungen in rotierenden Bezugssystemen



Betrachte zwei Bezugssysteme K und K', deren Ursprung zusammenfällt, K' aber gegen K rotiert, also kein Inertialsystem sei. Ihre Einheitsvektoren in x-Richtung seien $\vec{\hat{e}}_j$ bzw. $\vec{\hat{e}}'_j$ für $j \in x, y, z$. Wie wir bereits gesehen haben, lässt sich jede Bewegung eines starren Körpers, also insbesondere eines als starr vorausgesetzten Bezugssystems, als Überlagerung einer Translation und einer Rotation darstellen. Also lautet der Zusammenhang zwischen zwei Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und $\vec{v}'$ gemessen in K bzw. K' (vgl. Glg. 1)

$$\vec{v} = \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \,, \tag{4}$$

wobei $\vec{v}'$ die Geschwindigkeit ist, die in K' gemessen wird, wenn man die Rotation nicht berücksichtigt. Die Beschleunigung $\vec{a}$ erhalten wir durch Ableitung nach der

Zeit

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \left(\vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right), \tag{5}$$

weil ja $\vec{\omega} =$ const. Wir bestimmen nun $\mathrm{d}\vec{v}'/\mathrm{d}t$ im Koordinatensystem K, aber in Koordinaten von K' ausgedrückt. Dabei muss berücksichtigt werden, dass sich nicht nur die Geschwindigkeit ändert, sondern auch die das Bezugssystem aufspannenden Einheitsvektoren $\vec{\hat{e}}'_j$. Also mit $\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_j/\mathrm{d}t = \vec{\omega} \times \vec{\hat{e}}'_j$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{\hat{e}}'_x \frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t} + \vec{\hat{e}}'_y \frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t} + \vec{\hat{e}}'_z \frac{\mathrm{d}v'_z}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_x}{\mathrm{d}t} v'_x + \frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_y}{\mathrm{d}t} v'_y + \frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_z}{\mathrm{d}t} v'_z\right) = \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}'),$$

wo $\vec{\omega} \times \vec{\hat{e}}'_x v'_x + \vec{\omega} \times \vec{\hat{e}}'_y v'_y + \vec{\omega} \times \vec{\hat{e}}'_z v'_z = \vec{\omega} \times (\vec{\hat{e}}'_x v'_x + \vec{\hat{e}}'_y v'_y \vec{\hat{e}}'_z v'_z) = \vec{\omega} \times \vec{v}'$. Einsetzen in Glg. 5 liefert

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + (\vec{\omega} \times \vec{v}).$$

Nun setzen wir den allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ein, Glg. 4,

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}'\right) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right).$$

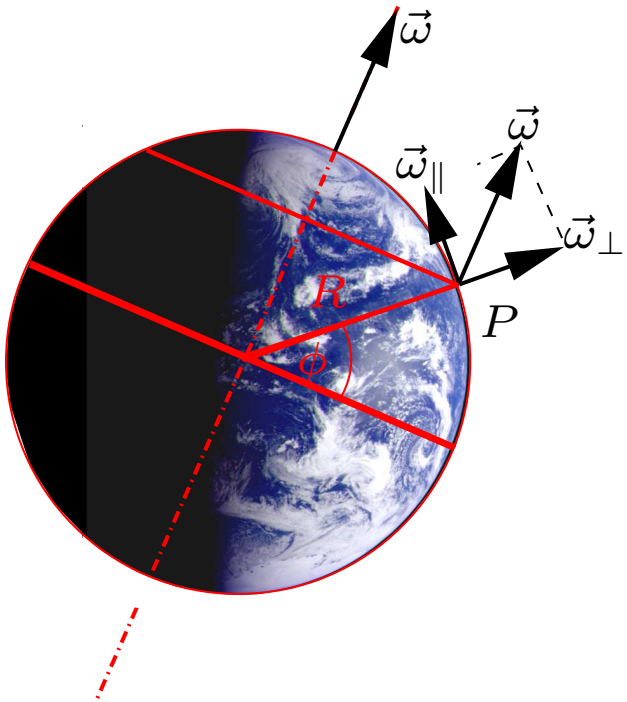
Diesen Ausdruck können wir nun endlich auflösen nach der Beschleunigung $\vec{a}'$, welche im rotierenden Bezugssystem K' gemessen wird

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{a} + 2\left(\vec{v}' \times \vec{\omega}\right) + \vec{\omega} \times \left(\vec{r} \times \vec{\omega}\right) \\ &= \vec{a} + \vec{a}_C + \vec{a}_Z \end{aligned}$$

Coriolisbeschleunigung	$\vec{a}_C = 2\left(\vec{v}' \times \vec{\omega}\right)$
Zentrifugalbeschleunigung	$\vec{a}_Z = \vec{\omega} \times \left(\vec{r} \times \vec{\omega}\right)$

Im beschleunigten Bezugssystem wirken zwei Scheinkräfte, die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft!

Nachweis der Erdrotation - Das Foucault'sche Pendel



Die Rotation der Erde macht sich in einem Punkt P bemerkbar als die Überlagerung einer Rotation um $\vec{\omega}_\perp$ und einer um $\vec{\omega}_\parallel$, sodass $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel$.

Der Erdboden im Punkt P rotiert deshalb mit $\omega_\perp = \omega \sin\phi$ um eine Achse senkrecht zum Erdboden und mit $\omega_\parallel = \omega \cos\phi$ um eine Achse parallel zu $\vec{\omega}_\parallel$.

Hängt man nun ein Pendel an eine Decke, so wird sich seine Pendelebene mit $\omega_\perp$ um die Senkrechte zum Erdboden drehen. In Kiel ($\phi \approx 54°$) dreht sich die Erde mit $\omega_\perp \approx 12°$ pro Stunde unter einem Foucault'schen Pendel weg.

Beispiele

- Zyklone und Antizyklone auf den beiden Hemisphären drehen sich im gegenläufigen Sinne
- Beeinflussung von Passat- und anderen Winden durch die Corioliskraft.
- Flussläufe auf der Nordhalbkugel sollen rechts höhere Ufer aufweisen als links. Umgekehrt auf der Südhalbkugel.
- Eisenbahn: Auf der Nordhalbkugel sollen sich die rechte Schiene und die rechten Räder schneller abnutzen. $a_C = 0.0066$ m/s^2 für einen ICE unterwegs von München nach Hamburg...
- Der Wirbel in der Badewanne wird allerdings durch andere Effekte wesentlich stärker beeinflusst, weshalb hier die Voraussage nicht erfüllt wird.