Physik II

Inhalt (sehr, sehr stark an Demtröder angelehnt, aber mit anderen Betonungen, vielen Auslassungen und verschiedensten Zusätzen):

1 Elektrostatik

2 elektrische Ströme

3 Magnetismus (statische Magnetfelder)

4 Zeitlich veränderliche Felder

5 Elektrotechnik

6 Elektromagnetische Schwingungen

7 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

8 Elektromagnetische Wellen in Materie

9 Geometrische Optik

10 Interferenz und Beugung

11 Optische Instrumente

12 Moderne Optik

13 Geladene Teilchen im Vakuum

Verwendete Literatur

+ Demtröder, Experimentalphysik 2

+ Bergmann-Schaefer, Band 2, Elektromagnetismus

+ Feynman, Volume 2

- Jackson, Elektrodynamik (W. de Gruyter, 1983)

- Lorrain, Corson, Lorrain, Electromagnetic Fields and Waves (Freeman, 1988)

- Bergmann-Schaefer, Band 3, Optik

Vorlesungsnotizen

Die Vorlesungsnotizen liegen unter http://www.ieap.uni-kiel.de/et/people/wimmer/teaching/Phys_II/ auf dem Netz.

Elektrische Ladung

Elektrostatische Effekte sind seit dem Altertum bekannt: geriebener Bernstein! Eine goldhaltige Legierung mit ähnlicher Farbe heißt Elektron, Bernstein wurde gleich genannt. Daher der Ausdruck "elektrisch".

William Gilbert: "De magnete, magnesicisque corporibus, et de magno magnete tellure; Physiologia nova, plurimis argumentis, experimentis demonstrata" (1600 in London): Viele Stoffe werden durch Reiben "elektrisch" (Diamant, Saphir, Amethyst,. . .) und andere gar nicht (Metalle, Holz, Knochen, Marmor,. . .)

Einige Kombinationen von Stoffen wirken (in geriebenem, "elektrischem" Zustand) anziehend, andere abstoßend. Lichtenberg hat 1778 damit die Polarität endgültig festgelegt: Mit Pelz oder Wolle geriebener Hartgummi ist danach negativ geladen, mit Seide geriebenes Glas oder Plexiglas positiv.

Ladungsverteilung auf der Oberfläche von Leitern

- Ladungen wandern auf einem Leiter möglichst weit nach außen, weil sie sich ja abstoßen (Faradayscher Käfig!).

- Ladungen befinden sich gerne an Spitzen - je kleiner der Krümmungsradius, desto höher die Ladungsdichte.

Influenz

Elektrische Ladung kann auch gemessen werden, ohne sie zu übertragen. Nähern wir uns mit einem geriebenen Hartgummistab einem Elektroskop, so zeigt es eine Ladung an, ohne dass wir es berühren. Dies kann technisch ausgenutzt werden als Influenzmaschine, womit sehr hohe Spannungen (ca. 100 kV) erzeugt werden können.

Bandgeneratoren (Van-de-Graaff-Generator) transportieren Ladung in eine leitende Hohlkugel, wo sie auf diese überspringt (Faradayscher Käfig).

Ladungsträger

Aus heutiger Sicht sind die wichtigsten negativen Ladungsträger **Elektronen** oder negative Ionen (Atome oder Moleküle mit einem Überschuss an Elektronen). Die wichtigsten positiven Ladungsträger sind Protonen oder Atomkerne bzw. positive Ionen (Atome oder Moleküle mit fehlenden Elektronen). Heute wissen wir, dass es auch andere Ladungsträger gibt, insbesondere mehr oder weniger kurzlebige Elementarteilchen wie Müonen (μ^+ und μ^-), Pionen (π^+ und π^-, aber nicht das π^0), das Positron e^+ und das Antiproton p^-. Mehr dazu in Physik IV. . .

Diese Ladungen sind die kleinsten in der freien Wildbahn vorkommenden, daher der Name Elementarladung. Quarks kommen in "unserer Welt" nicht als Einzelteilchen vor.

Auftretende Kräfte

Ladungen lassen sich transferieren und damit addieren. Doppelte Ladung $\Rightarrow$ doppelte Kraft. Die auf eine Ladung wirkende Kraft ist invers proportional zum Abstand im Quadrat,

$$\vec{F} = f\frac{Q_1\,Q_2}{r^3}\vec{r},$$

$f > 0$ ist eine Proportionalitätskonstante.

Die Kraft wird, wie wir letztes Semester gelernt haben, in Newton, N, gemessen, r in Metern, m. Damit können nur noch Einheiten von Q und f festgelegt werden. Und hier wird die Welt kompliziert: Historisch haben sich zwei Wahlen der Einheiten durchgesetzt und in Form von Einheitssystemen etabliert: Das SI-System und das cgs-System.

Das SI-System

Im SI-System wird die Ladung Q über die Stromstärke I definiert[1] als die Ladungsmenge Q, die pro Sekunde durch einen Stromleiter transportiert wird. Der Strom I wird in Ampere (A) gemessen. Damit

$$[Q] = 1\text{Coulomb} = 1C = 1\text{A s}.$$

Ein Elektron hat die Ladung $-e = 1,60217733(49) \cdot 10^{-19}$ C. Die Kraft zwischen zwei Ladungen von 10^{-4}C im Abstand von 1m beträgt

$$F = f\frac{10^{-8}\text{C}^2}{\text{m}^2} = 89,875\text{N}.$$

Damit muss also f den Betrag $f = 8,9875 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2 haben. f wird, aus

[1] Der Strom wird später definiert.

Gründen, die erst später klar werden, komplizierter geschrieben als

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

wo ε_0 die so genannte Dielektrizitätskonstante für das Vakuum ist,

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \mathrm{A}^2\,\mathrm{s}^4\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{m}^{-3}.$$

Die Einheit von ε_0 kann einfacher geschrieben werden als $[\varepsilon_0] = \mathrm{As/Vm}$. Also

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^3}\vec{r}.$$

Das cgs-System

In diesem System wird, wesentlich einfacher, f gleich Eins gesetzt und als dimensionslos definiert! Im cgs-System wird die Kraft in dyn gemessen, Längen in cm und folglich ergibt sich für die Einheit der Ladung

$$[Q] = [r][\sqrt{F}] = 1\,\mathrm{cm}\,\mathrm{dyn}^{1/2}.$$

Diese hat einen Namen, die elektrostatische Ladungseinheit ESL (Engl. esu, electrostatic unit). Ein Coulomb entspricht $3 \cdot 10^9$ ESL.

Wir werden in dieser Vorlesung das SI-System verwenden.

Vergleich elektrostatische Kräfte - Gravitation

Übung: Wie nahe könnten Sie im Hörsaal nebeneinander sitzen, wenn Sie alle ein Promille überschüssige Elektronen hätten?

Tipp: Haftreibungskoeffizient Stoff-Bank sei 0,5.

Das elektrische Feld

Analog zum Gravitationsfeld können wir ein elektrisches Feld $\vec{E}$ einführen:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (\vec{F} = m\vec{g}),$$

die Einheit des elektrischen Feldes $[E]$ muss also Newton pro Coulomb lauten, oder mit den Basis-SI-Einheiten

$$\mathrm{N/C} = \mathrm{kg\ m\ s^{-3}\ A^{-1}} = \mathrm{V/m},$$

in Worten, Volt pro Meter. Das elektrische Feld der Erde beträgt ca. 100 V/m.

Das Feld einer Punktladung

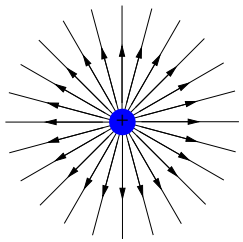
Das elektrische Feld einer Punktladung ist denkbar einfach. Es ergibt sich direkt aus dem Ausdruck für die Kraft zwischen zwei Ladungen, denn $\vec{F} = q\vec{E}$.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{r}.$$

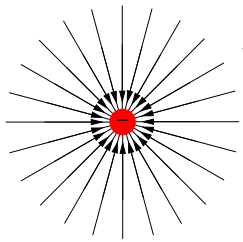
(Streng genommen muss die Definition lauten: $\vec{E} \doteq \lim_{q\to 0} \vec{F}_q/q$. Warum?) Das Feld von mehr als einer Punktladung lässt sich durch Superposition bestimmen (Vektoraddition). Das Feld einer Punktladung ist ein Vektorfeld, jedem Punkt im Raum ist also ein Vektor zugeordnet. Die Felder mehrerer Ladungen addieren sich vektoriell.

Übung/Beispiel: Bestimmen Sie graphisch das Feld von zwei Punktladungen.

Ladungen als Quelle und Senken des elektrischen Feldes



Ouelle



Senke

Positive Ladungen wirken als Quelle, negative Ladungen als Senken für das elektrische Feld. Feldlinien zeigen vom positiven Pol weg und hin zum negativen Pol. Ordnen wir jeder Feldlinie ein röhrenförmiges Volumen darumherum zu, dessen Querschnitt abhängig vom Abstand zur Quelle ist, so definiert das darin enthaltene elektrische Feld den **elektrischen Feldfluss**.

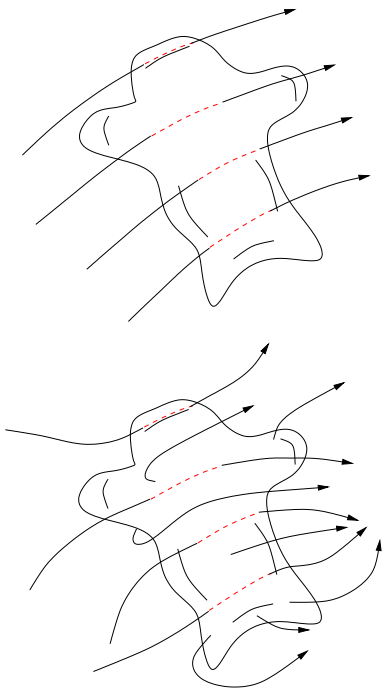
Der elektrische Feldfluss

Der durch ein Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ tretende elektrische Feldfluss $\mathrm{d}\Psi$ ist definiert als das Skalarprodukt

$$\mathrm{d}\Psi \doteq \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

und ist ein Maß für die Zahl der durch die Fläche $\mathrm{d}\vec{A}$ tretenden Feldlinien. Zum Verständnis hilft das Analogon der Flüssigkeitsströmung. Hier ist das Volumen, welches durch eine gegebene Fläche fließt, gegeben durch Querschnitt der Fläche mal Geschwindigkeit der Strömung (Kontinuitätsgleichung!). Die Strömung kann durch Stromlinien anschaulich gemacht werden. Je enger die Stromlinien, desto schneller fließt die Flüssigkeit. Stromlinien fließen von Quellen zu Senken, dazwischen bilden sich keine neuen Stromlinien.

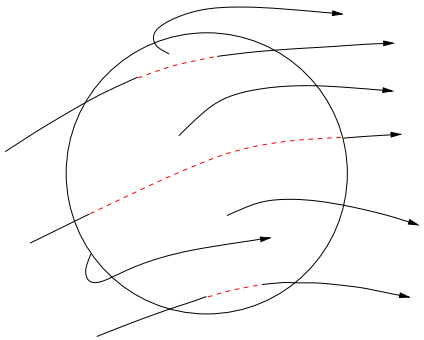
Der Satz von Gauß I



Was passiert nun, wenn wir alle Feldlinien zählen, die durch eine geschlossene drei-dimensionale Fläche gehen? Offensichtlich müssen in einem quellenfreien Gebiet gleichviele Feldlinien hineinführen wie hinauszeigen. In einem Volumen, welches eine Ladung enthält (Quelle oder Senke), wird ein Ungleichgewicht auftreten - es gibt mehr Linien hinein als hinaus, oder umgekehrt, je nach Vorzeichen der Ladung.

Übung: Wenden Sie dies auf die Skizze links an. Welches Vorzeichen hat die Ladung, und wo hat sie sich versteckt?

Der Satz von Gauß II



Wir wollen das etwas mathematischer schreiben und vereinfachen die komplizierte Gestalt der geschlossenen Fläche zu einer Kugel.

$$\begin{aligned}
\Psi &= \int \mathrm{d}\Psi = \oint_{\mathrm{Kugel}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\mathrm{Kugel}} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\mathrm{Kugel}} \mathrm{d}\Omega = Q/\varepsilon_0
\end{aligned}$$

aus den vorhergehenden Überlegungen und weil das Integral über den Raumwinkel

einer Vollkugel 4π ergibt. Der durch die Oberfläche tretende Fluss ist proportional zur darin enthaltenen Ladung.

Was ist $\oint$? Ich verwende $\oint$ als Integral über den gesamten Rand einer Fläche oder eines Körpers. Ist die Fläche zweidimensional (Kreis, Quadrat, auch verbogen), so bedeutet $\oint$ ein geschlossenes Kurvenintegral, ist der Körper dreidimensional (Kugel, Würfel, auch verbogene Figuren), so ist der Rand der Figur seine Oberfläche und $\oint$ läuft über seine gesamte Oberfläche. $\oint$ wird oft auch ausschließlich für Kurvenintegtrale verwendet.

Der Satz von Gauß III

Die Wahl der geschlossenen Fläche war beliebig - es ist nicht schwierig zu zeigen, dass für jede geschlossene Fläche dieses Resultat eintritt. Feldlinien, die die Fläche durchdringen (also hinein- und wieder hinausführen), tragen zum Gesamtfluss nicht bei.

Damit gilt: **Der gesamte elektrische Fluss durch die geschlossene Fläche ist gerade gleich der Summe der eingeschlossenen Ladungen geteilt durch ε_0.**

$$\Psi = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{\sum_i Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

der Satz von Gauss.

Der Satz von Gauß IV

Dieser Satz lässt sich mit dem Gaußschen Satz der Vektoranalysis auch in differentieller Form schreiben:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

wo der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ in diesem Falle die sog. Divergenz bedeutet. Nun können wir aber die Ladung durch ein Volumenintegral über die Ladungsdichte ρ ausdrücken, $Q = \int \rho \mathrm{d}V$, und damit

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \mathrm{d}V \quad \text{und folglich} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Das elektrische Potential, die Spannung I

Frage: Könnte nicht eine Feldlinie in sich geschlossen sein?

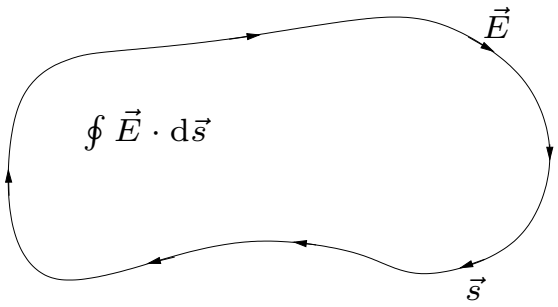
Antwort: Nein, im elektrostatischen Fall ist dies nicht möglich.

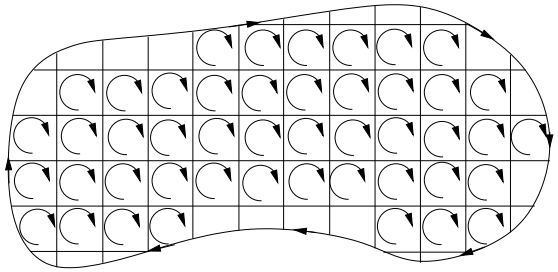
Falls dem so wäre, könnte eine Ladung auf eine solche Linie gesetzt werden. In einem Umlauf würde sie die Energie

$$W = q \cdot \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

gewinnen. Dies könnte sich beliebig oft wiederholen, wodurch sich laufend Energie gewinnen ließe. Dies widerspricht leider (?) unserer Erfahrung. Wir stellen also fest, dass, zumindest im elektrostatischen Fall, gilt

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0.$$





$\int \vec{\nabla} \times \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{A}$

Auch dieser Sachverhalt kann in differentieller Form geschrieben werden. Nach dem Stokeschen Satz der Vektoranalysis gilt

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int \vec{\nabla} \times \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{A}, \quad \text{also} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0.$$

Das elektrostatische Feld ist wirbelfrei. Dieser Sachverhalt wird sich bald wieder zeigen.

Das elektrische Potential, die Spannung II

Die Arbeit, die man aufwenden muss, um eine Ladung q durch ein elektrostatisches Feld von einem Punkt A zu einem Punkt B zu bewegen, ist

$$W = q \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

in differentieller Form

$$\mathrm{d}W = q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Die Arbeit ist unabhängig vom gewählten Weg, dies folgt aus der Wirbelfreiheit, denn

$$0 = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \left(\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right)_{\text{Weg 1}} + \left(\int_B^A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \right)_{\text{Weg 2}},$$

bzw.

$$\left(\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}\right)_{\text{Weg 1}} = \left(\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}\right)_{\text{Weg 2}}.$$

QED

Die Arbeit ist positiv, wenn Arbeit verrichtet wird, sie ist gleich der gewonnenen potentiellen Energie der Ladung im elektrostatischen Feld. Wir dividieren die Arbeit durch die Ladung q und erhalten eine Größe, die nur noch vom elektrischen Feld $\vec{E}$ und vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängig ist, die **Potentialdifferenz** $\varphi_B - \varphi_A$, die auch **Spannung** U genannt wird:

$$U = W/q = \varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Die Einheit der Spannung ist das **Volt (V)**. $[U] = [E/q] =$ J/C $=$ kg m^2 A^{-1} s^{-3} $=$ V.

Äquipotentialflächen

Mathematisch: Die Menge aller Punkte, die dasselbe Potential aufweisen, heißen Äquipotentialflächen. Das sind also alle Flächen, auf denen das Potential gleich bleibt. Um eine Punktladung herum sind das Kugelschalen. Äquipotentialflächen können wir uns auch wie Höhenlinien auf der Landkarte vorstellen (jedenfalls in Geländen, die diese Erfindung erfordern.), diese markieren die Höhe über Meer, Äquipotentiallinien die Arbeit, die es braucht oder die frei wird, um ins Unendliche zu kommen.

Kugeln rollen den Berg hinunter. Die Kraft, die auf sie wirkt, ist also entgegen dem Gradienten der Höhe gerichtet. Im Falle der Elektrostatik $\vec{F} = -q\vec{\nabla}\phi$, folglich: **Feldlinien $\vec{E}$ stehen senkrecht auf Äquipotentialflächen.**

Das Potential einer Punktladung und im Plattenkondensator

Die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um eine Probeladung q aus dem Unendlichen in den Abstand r einer Ladung Q zu bringen ist

$$W = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2} = -\frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Es ist Konvention zu sagen, dass das Potential im Unendlichen verschwindet, $\phi(\infty) = 0$. Sind die beiden Ladungen gleich, so ist die Arbeit negativ (muss geleistet werden), ziehen sie sich an, so wird Energie freigesetzt (positives Vorzeichen). In diesem Fall wird die Probeladung kinetische Energie gewinnen und zwar gerade $\Delta E_{\mathrm{pot}} = \phi(\infty) - \phi(r) = qU$, die potentielle Energie, die sie vorher hatte (Energieerhaltung!). War die Probeladung z. B. ein atomares Teilchen (Elektron, Proton, Ion, subatomares Teilchen), so ist es oft zweckmäßig, eine wesentlich

kleinere Energieeinheit, das **Elektronvolt eV**, einzuführen. Dies ist die Energiemenge, die ein Elektron gewinnt, wenn es die Spannung von 1 V durchläuft, also

$$1\mathrm{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \cdot 1\mathrm{V} = 1.602 \cdot 10^{-19}\mathrm{J}.$$

Übung: Berechnen Sie die Geschwindigkeit eines Elektrons mit einer kinetischen Energie von 1 eV, 1 keV, 100 keV und 1 MeV. Achtung, v ¡ c muss immer gelten!

Das Potential eines Dipols ist etwas komplizierter zu berechnen und wird später behandelt.

Mit den vorigen Überlegungen lässt sich das Potential in einem Plattenkondensator leicht finden, und das elektrische Feld folgt dann daraus. Im Inneren des Plattenkondensators muss ein homogenes Feld herrschen, **denn die beiden leitenden Platten sind Äquipotentialflächen**. Wären sie es nicht, würde eine Kraft auf die Ladungsträger wirken und diese würden sich im Leiter so lange bewegen, bis

diese Kraft entlang der Oberfläche kompensiert ist. Alle Äquipotentialflächen im Plattenkondensator verlaufen also parallel zu den beiden Platten. Dies bedeutet, dass von einer Platte zur anderen überall gleich viel Energie frei würde, wenn eine Ladung auf die andere Platte gebracht würde. Im Inneren des Plattenkondensators (große Ausdehnung der Platten im Vergleich zu ihrem Abstand) würden die Ladungen auf dem kürzesten Weg zur gegenüberliegenden Platte sausen, also in einem rechten Winkel zur Platte wegfliegen, weil die Feldlinien senkrecht zu den Äquipotentialflächen stehen. Werden Ladungsträger von außen, parallel zu den Äquipotentialflächen, in den Kondensator eingebracht, so verändert sich ihre Geschwindigkeit parallel zu den Äquipotentialflächen nicht (senkrecht zu den Feldlinien), wohl aber senkrecht dazu (parallel zu den Feldlinien). Schiefer Wurf!

Die Poissongleichung

Die Definition des Potentials[2] $\phi(P) = \int_P^\infty \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{E}$ erlaubt es auch, das Feld $\vec{E}$ als Gradienten des Potentials zu schreiben. Andererseits wissen wir, dass Ladungen Quellen und Senken des Feldes sind, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$. Wir können beide Gleichungen kombinieren, um daraus die **Poissongleichung** zu erhalten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi) = -\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Verschwinden in einem Gebiet alle Ladungen, so heißt die Gleichung **Laplacegleichung**

$$\Delta\phi = 0.$$

[2] Die Definition des Potentials in dieser Form ist nur möglich, weil das Feld wirbelfrei ist!

Feld und Potential einer geladenen Hohlkugel

Auf der Oberfläche einer leitenden Hohlkugel mit Radius R befinde sich die Ladung Q. Die Ladung verteilt sich gleichmäßig auf der Oberfläche, so dass $Q = 4\pi R^2 \sigma$ mit der Flächenladungsdichte σ. Der Fluss durch eine konzentrische Oberfläche mit einem Radius $r > R$ beträgt:

$$\Psi = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Aus Symmetriegründen zeigt $\vec{E}$ radial nach außen:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}.$$

Für $r > R$ wirkt die geladene Kugelfläche also wie eine Punktladung Q im Mittelpunkt der Kugel.

Das Potential im Abstand r vom Mittelpunkt der Kugel erhält man mit:

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Eine geschlossene Fläche innerhalb der Kugel umschließt keine Ladung, somit gilt für jede Fläche innerhalb der Kugel $(r < R)$:

$$\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

und damit ist im Kugelinneren $\vec{E} = 0$ und $\phi(r) = \mathrm{const} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

Feld und Potential eines Koaxialkabels

Ein Koaxialkabel besteht aus einem leitenden Draht mit Radius R_1, der von einem leitenden Hohlleiter mit Radius R_2 umgeben ist. Die Ladung pro Länge der beiden Leiter sei entgegengesetzt gleich $\lambda = \lambda_1 = -\lambda_2$.

Für $r > R_2$ ist $\vec{E} = 0$, da die Gesamtladung innerhalb des Zylinders mit Radius r gleich Null ist.

Innerhalb des Kabels ist das Feld des äußeren Leiters gleich Null (Feld innerhalb einer Hohlkugel), das Feld des inneren Leiters (Feld außerhalb einer Hohlkugel) ist:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}.$$

Für das Potential außerhalb des Koaxialkabels $(R_2 < r)$ gilt $\phi(r) = 0$, da $\vec{E}$ gleich Null ist und als Randbedingung $\phi(\infty) = 0$ gilt.

Das Potential innerhalb des Koaxialkabels $(R_1 < r < R_2)$ setzt sich zusammen aus dem Potential innerhalb eines Hohlleiters $(\phi = 0)$ und dem Potential eines unendlich langen geladenen Stabes:

$$\phi(r) = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R_2}$$

Leiter im elektrischen Feld

Auf die frei beweglichen Ladungen eines Leiters im elektrischen Feld wirkt die Kraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Diese Kraft verschiebt die Ladungen, bis sich durch die Ladungsverteilung ein Gegenfeld aufgebaut hat, das das äußere Feld kompensiert. Diese Ladungsverschiebung wird **Influenz** genannt. Das Innere des Leiters ist deshalb feldfrei, die Ladungen sitzen auf der Oberfläche des Leiters.

Im elektrischen Feld eines Plattenkondensators verschieben sich die Ladungen auf zwei sich berührenden Metallplatten zu den entgegengesetzten Oberflächen. Nach der Trennung der Metallplatten im Kondensator trägt eine Platte die Ladung Q, während die andere die Ladung $-Q$ trägt.

Van-de-Graaff Generator

Dieser Ladungstransport wird im **Van-de-Graaff Generator** genutzt. Über scharfe Spitzen werden Ladungen auf ein isolierendes Band aufgesprüht. Beim Umlaufen des Bandes werden die Ladungen von dem Band in das Innere einer leitenden Kugel transportiert. Dort werden sie von einem Leiterkamm, der mit der Innenwand der Kugel elektrisch verbunden ist, abgenommen. Auf Grund der Influenz werden die Ladungen auf die Außenfläche der Kugel transportiert, das Kugelinnere (Faradayscher Käfig) bleibt feldfrei. Mit einem Van-de-Graaff Generator kann Spannung von über 100 kV erzeugt werden, die erreichbare Spannung ist nur durch Überschläge begrenzt (z. B. feuchte Luft).

Kondensatoren und Kapazität

Eine Anordnung von zwei entgegengesetzt geladenen Leiterflächen wird **Kondensator** genannt. Eine Ladung Q, die auf eine der Flächen aufgebracht wird, erzeugt durch Influenz Ladungstrennung auf der anderen, ungeladenen Fläche. Auf der der ersten Fläche zugewandten Seite erscheint eine Ladung $-Q$, auf der entgegengesetzen Seite $+Q$. Wird die zweite Fläche geerdet, so fließt die äußere Ladung von der zweiten Fläche ab und behält damit die Ladung $-Q$ auf ihrer Innenseite.

Das elektrische Feld zwischen den Leiterflächen ist proportional zur Ladung Q auf den Leitern. Da für das Potential gilt $U = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, ist auch die Spannung zwischen den Leiterplatten proportional zur Ladung Q. Es gilt:

$$Q = C \cdot U,$$

wobei die Konstante C auch die **Kapazität** des Kondensators genannt wird. Die

Einheit der Kapazität ist

$$[C] = 1\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = 1\,\text{Farad} = 1\,\text{F}.$$

1 Farad ist eine sehr große Kapazität, deshalb werden Untereinheiten benutzt:

$$\begin{aligned} 1\,\text{Pikofarad} &= 1\,\text{pF} = 10^{-12}\,\text{F} \\ 1\,\text{Nanofarad} &= 1\,\text{nF} = 10^{-9}\,\text{F} \\ 1\,\text{Microfarad} &= 1\,\mu\text{F} = 10^{-6}\,\text{F} \end{aligned}$$

Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei gegenüberstehenden leitenden Platten. Der Abstand zwischen den beiden Platten sei d, die Ladung auf den Platten sei $+Q$ bzw $-Q$. Die Spannung zwischen den beiden Platten beträgt $U = \phi_1 - \phi_2$. Zwischen den Platten befindet sich keine Ladung, damit lautet (im eindimensionalen Fall) die Laplacegleichung:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

Damit ist das Potential zwischen den beiden Platten

$$\phi(x) = -\frac{U}{d} \cdot x + \phi_1.$$

Für das elektrische Feld gilt:

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{U}{d} \cdot \frac{\vec{x}}{x}$$

bzw. für den Betrag des elektrischen Feldes:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} = \frac{C \cdot U}{A\epsilon_0}.$$

Die Kapazität des Plattenkondensators beträgt damit:

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}.$$

Kugelkondensator

Ein Kugelkondensator besteht aus zwei leitfähigen, konzentrischen Kugelflächen mit Radius a (innere Kugelfläche) und Radius b (äußere Kugelfläche), die die Ladungen $+Q$ bzw. $-Q$ tragen. Innerhalb der inneren Kugelfläche herrscht kein Feld, das Potential ist damit konstant

$$\phi_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Im Zwischenraum zwischen den beiden Kugeln herrscht das Feld einer Punktladung, die im Kugelmittelpunkt sitzt:

$$\vec{E_{zw}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{r}$$

und das Potential

$$\phi_{zw} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Außerhalb des Kugelkondensators herrscht kein Feld, da die beiden Ladungen sich kompensieren. Damit ist das Potential der äußeren Kugel

$$\phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b}.$$

Die Spannung zwischen den beiden Kugelflächen beträgt also:

$$U = \phi_i - \phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Die Kapazität ist damit

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot a \cdot b}{b - a}.$$

Ist der Abstand $d = b - a$ klein gegen a, so ergibt sich die Kapazität zu

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot a \cdot b}{d} = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$$

wie beim Plattenkondensator.

Setzt man den Radius der äußeren Kugel b gleich unendlich, erhält man die Kapazität einer Kugel mit Radius a

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot a.$$

Parallel und Serienschaltung von Kondensatoren

Bei Parallelschaltung mehrerer Kondensatoren liegt an allen Kondensatoren dieselbe Spannung an. Die Ladungen addieren sich, und damit auch die Kapazitäten, so dass für die Gesamtkapazität gilt:

$$C = \sum_i C_i.$$

Bei Serienschaltung von Kondensatoren addieren sich die Spannungen der einzelnen Kondensatoren, alle Kondensatoren tragen die gleiche Ladung, die Gesamtkapazität wird kleiner:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

Die Energie des elektrischen Feldes I

Beim Aufladen einer leitenden Kugel mit Radius a durch kleine Ladungsportionen $\mathrm{d}Q$ wird für den Transport der Ladungen die Arbeit $\mathrm{d}W$ aufgewendet:

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q \cdot (\phi_a - \phi_\infty) = \mathrm{d}Q \cdot \phi_a.$$

Das Potential der Kugel mit der Ladung Q ist

$$\phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot a}.$$

Für die Aufladung der Kugel bis zur Ladung Q wird daher die Arbeit W benötigt:

$$W = \int \phi \mathrm{d}Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot a} \int Q \cdot \mathrm{d}Q = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot a} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

Der Energiegehalt einer auf die Spannung U aufgeladenen Kugel ist daher:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C \cdot U^2.$$

Dieses Ergebnis gilt allgemein für **beliebige** Kondensatoren mit der Kapazität C, die auf die Spannung U aufgeladen wurden.

Die Energie des elektrischen Feldes II

Bei einem ebenen Plattenkondensator mit der Fläche A ist $C = \epsilon_0 \cdot A/d$ und $U = E \cdot d$, so dass für die Energie gilt:

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \cdot a \cdot d = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \cdot V.$$

Die **Energiedichte** des elektrischen Feldes im Kondensator ist dann

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

Dielektrika im elektrischen Feld

Durch Einbringen eines Isolators (Dielektrikum) in einen Kondensator sinkt die Spannung des Kondensators um einen Faktor ϵ. Da die Ladung erhalten bleibt, wird also die Kapazität um den Faktor ϵ größer. Die Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum ist also:

$$C_{\mathrm{Diel}} = \epsilon \cdot C_{Vak} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad \text{mit} \qquad \epsilon > 1.$$

Die dimensionslose Zahl ϵ heißt **relative Dielektrizitätskonstante** oder **Dielektrizitätszahl** des Isolators.

Dielektrische Polarisation I

Die Verminderung des elektrischen Feldes wird durch die Verschiebung von Ladungen im Dielektrikum bewirkt, wie bei der Influenz. Die Ladungen eines Isolators können jedoch nicht bis an den Rand des Isolators verschoben werden, sondern nur innerhalb eines Atoms bzw. Moleküls. Die Ladungsschwerpunkte der Elektronenhüllen fallen nun nicht mehr mit dem Ladungsschwerpunkt des Atomkerns zusammen, so dass die Atome nun elektrische Dipole sind. Diese durch ein äußeres elektrisches Feld erzeugten Dipole werden auch **induzierte Dipole** genannt, der Vorgang der Dipolbildung heißt **Polarisierung**. Bei einer Verschiebung d der Ladungsschwerpunkte gegeneinander ist das induzierte Dipolmoment jedes Atoms

$$\vec{p} = q \cdot \vec{d}.$$

Dielektrische Polarisation II

Die Vektorsumme der Dipolmomente aller N Atome pro Volumeneinheit heißt die **Polarisation**

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p_i}.$$

Ohne andere Wechselwirkungen richten sich alle Dipole parallel zur Feldrichtung $\vec{E}$ aus, so dass

$$P = N \cdot q \cdot d.$$

Die Ladungsschwerpunkte werden so weit verschoben, bis die rücktreibenden Anziehungskräfte der verschobenen Ladungen die äußere Kraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ kompensieren.

Dielektrische Polarisation III

Für kleine Auslenkungen ist die rücktreibende Kraft $-\vec{F}$ proportional zur Auslenkung d, also

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}.$$

Die Proportionalitätskonstante α heißt **Polarisierbarkeit**. Sie ist ein Maß für die Rückstellkräfte im Atom und hängt von den Atomdaten ab. Im Allgemeinen hängt α von der Raumrichtung ab.

Polarisationsladungen

An den Stirnflächen des Dielektrikums treten durch die Ladungsverschiebung im elektrischen Feld Ladungen auf, die so genannten **Polarisationsladungen** Q_{pol}. Die Flächenladungsdichte

$$\sigma_{\mathrm{pol}} = \frac{Q_{\mathrm{pol}}}{A} = \frac{N \cdot q \cdot d \cdot A}{A} = P.$$

Das elektrische Feld $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0$ im Plattenkondensator wird im Dielektrikum durch das durch die Polarisation entstandene Gegenfeld $E = \sigma_{\mathrm{pol}}/\epsilon_0$ überlagert, so dass die resultierende Feldstärke im Dielektrikum

$$\vec{E_{\mathrm{Diel}}} = \frac{\sigma - \sigma_{\mathrm{pol}}}{\epsilon_0} = \vec{E_{\mathrm{Vak}}} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

wird. Die Feldstärke im Dielektrikum wird also kleiner.

Damit lässt sich die Polarisation $\vec{P}$ auch als

$$\vec{P} = N \cdot \alpha \vec{E_{\text{Diel}}} = \epsilon_0 \chi \vec{E_{\text{Diel}}}$$

schreiben. Die Größe $\chi = (N \cdot \alpha)/\epsilon_0$ heißt **dielektrische Suszeptibilität**. Damit wird

$$E_{\text{Diel}} = \frac{E_{\text{Vak}}}{1 + \chi}$$

und

$$\epsilon = 1 + \chi = 1 + (N \cdot \alpha/\epsilon_0).$$

Die Polaristion ist damit

$$P = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot E_{\text{Diel}} = \epsilon_0(\epsilon - 1)E_{\text{Diel}} = \epsilon_0(E_{\text{Vak}} - E_{\text{Diel}}).$$

Multipole

Da die Poisson Gleichung linear ist ($\nabla\phi = -\sigma/\epsilon_0$), überlagern sich die Coulombpotentiale ϕ_i, die durch im Raum verteilte Ladungen Q_i erzeugt werden, linear. Für N Punktladungen $Q_i(\vec{r_i})$ erhält man damit für das Gesamtpotential im Punkt $left(\vec{R}right)$

$$\phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{\left|\vec{R} - \vec{r_i}\right|}.$$

Bei einer räumlich kontinuierlichen Ladungsverteilung mit einer Ladungsdichte $\sigma(r)$ erhält man

$$\phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\sigma\left(\vec{r}\right) \mathrm{d}V}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|}.$$

Multipolentwicklung

Für beliebige Ladungsverteilungen ist das Integral nicht immer analytisch lösbar. Man kann aber für Punkte, deren Entfernung R vom Ladungsgebiet groß gegen dessen Ausdehnung ist, das Potential $\phi(\vec{R})$ durch eine Taylorentwicklung des Integranden und gliedweise Integration bestimmen. Dabei wird zweckmäßigerweise der Ursprung in den Ladungsschwerpunkt S der Ladungen eines Vorzeichens gelegt und nach $r/R << 1$ entwickelt. Diese **Multipolentwicklung** zerlegt das Potential der Ladungsverteilung in Summanden $\phi_n(R)$, die von Punktladungen (Monopolen), Punktladungspaaren (Dipolen), Dipolpaaren (Quadrupolen) etc. erzeugt werden, und die jeweils mit verschiedenen Potenzen R^{-n} mit zunehmender Entfernung vom Ladungsschwerpukt S abfallen.

Der elektrische Dipol I

Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen $Q_1 = Q = -Q_2$ im Abstand l. Sein **Dipolmoment** $\vec{p} = Q \cdot \vec{l}$ zeigt definitionsgemäß von der negativen zur positiven Ladung.

Feldstärke und Potential in einem beliebigen Punkt $P(\vec{R})$ erhält man durch die Überlagerung der Felder der beiden Punktladungen. Am einfachsten ist es, zunächst das Potential zu berechnen und dann das Feld durch Gradientenbildung zu erhalten,

$$\phi_D(\vec{R}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{l}\cdot\vec{R}}{R^3}.$$

Das Potential lässt sich damit auch als $-l \cdot \nabla\phi_M$ schreiben.

Der elektrische Dipol II

Für $r >> l$ gelten die Näherungen $r_1 r_2 = r^2$ und $r_2 - r_1 \approx l \cos\vartheta$.

Damit wird das Feld des Dipols:

$$\phi_D = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^2}\cos\vartheta$$

mit dem Dipolmoment

$$p = l \cdot Q.$$

Der elektrische Dipol III

Die Feldstärke lässt sich am besten in Zylinderkoordinaten berechnen. Die Feldstärke in radialer Richtung erhält man durch:

$$E_r = -\frac{\partial \phi_D}{\partial r} = \frac{2p\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Die Feldstärke in den dazu senkrechten Richtungen erhält man durch:

$$E_\vartheta = -\frac{\partial \phi_D}{r\partial\vartheta} = \frac{p\sin\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad \text{und} \qquad E_\varphi = -\frac{\partial \phi_D}{r\sin\vartheta\partial\varphi} = 0.$$

Der elektrische Dipol IV

Der Betrag der resultierenden Feldstärke ist

$$E_D = \sqrt{E_r^2 + E_\vartheta^2 + E_\varphi^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}$$

Der elektrische Dipol V

In einem äußeren elektrischen Feld hat ein elektrischer Dipol die potentielle Energie

$$W_{pot} = Q\phi_1 - Q\phi_2 = Q(\phi_1 - \phi_2),$$

die zu Null wird, wenn die beiden Ladungen $+Q$ und $-Q$ auf einer Äquipotentialfläche liegen, der Dipol also senkrecht zu $\vec{E}$ steht.

Bei beliebiger Lage des Dipols bewirkt ein homogenes elektrisches Feld die Kräfte $\vec{F_1} = Q \cdot \vec{E}$ und $\vec{F_2} = -Q \cdot \vec{E}$ auf die beiden Ladungen, die wiederum ein Drehmoment mit dem Betrag $D = 2Q\frac{l}{2}\sin\alpha$ bewirken, das senkrecht auf $\vec{l}$ und $\vec{E}$ steht:

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Der elektrische Quadrupol

Werden zwei positive und zwei negative Ladungen im Raum so angeordnet, dass zwei benachbarte antiparallele Dipole entstehen mit dem Abstand a, so heben sich für Punkte, deren Entfernung groß gegen a sowie l sind, die Dipolfelder praktisch auf. Eine solche Anordnung aus vier Monopolen wird **Quadrupol** genannt. Das Potential ergibt sich aus der Überlagerung zweier Dipolpotentiale:

$$\phi_Q = \phi_D(\vec{R} + \vec{a}/2) - \phi_D(\vec{R} - \vec{a}/2) = \vec{a}\nabla\phi_d.$$

Damit wird analog zum Dipol:

$$\phi_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\vec{a} \cdot \nabla\frac{\vec{l} \cdot \vec{R}}{R^3}.$$

Die Entstehung von Gewittern

Gewitter enstehen, wenn durch das Zusammentreffen warmer und kalter Luftmassen starke vertikale Stömungen entstehen, die elektrisch geladene Staub- und Eispartikel sowie Wassertropfen transportieren und damit örtliche Ladungsunterschiede aufbauen, welche zu sehr großen elektrischen Feldern führen. Vertikale Strömungen feuchter Luft zwischen Regionen mit großen Temperaturunterschieden führen zur Kondensation der Wassermoleküle beim Transport von wärmeren zu kälteren Gebieten bzw. zur Verdampfung von Wassertröpfchen beim Transport in wärmere Regionen. Dabei enstehen große Cumuluswolken. Die oberen Schichten der Wolken haben eine positive, die unteren eine negative Überschussladung, da die Wassertröpfchen im elektrischen Feld der Erde ein induziertes Dipolmoment erhalten, dessen positive Ladung nach unten zeigt. Größere Tröpfchen fallen auf Grund ihres Gewichts nach unten, dabei lagern sich überwiegend negative Ionen an der in Fallrichtung positiven Seite an. Kleinere Tröpfchen werden von der Luftströmung nach oben befördert und laden sich dabei nach demselben Prinzip

positiv auf. Bei genügend großen Feldstärken zwischen oberem und unterem Teil der Wolke, oder zwischen Wolke und Erdoberfläche, entsteht ein elektrischer Durchschlag (Blitz), der zu einem Ladungsausgleich führt. Dabei wird im Mittel eine Ladung von 10 C innerhalb von 10^{-4} s transportiert, was einem Strom von 10^5 A entspricht.

Elektrostatische Kopierer und Drucker

Der elektrostatische Kopierer (Xerox) basiert aus einer Kombination von photoelektrischen Eigenschaften bestimmter Stoffe mit der elektrostatischen Abscheidung von Farbstaub auf geladenen Flächen. Ein mit Selen beschichteter Zylinder wird (im Dunkeln) elektrostatisch aufgeladen. Das zu kopierende Bild wird optisch auf die Zylinderfläche abgebildet, durch die Belichtung wird ein Teil der Ladung auf dem Zylinder entfernt (Photoeffekt), dabei ist die Anzahl der emittierten Elektronen proportional zur auftreffenden Lichtintensität. An den dunklen Stellen befindet sich jetzt also mehr Obeflächenladung als an den hellen Stellen. Entgegengesetzt aufgeladener Staub wird auf die Trommel beschleunigt und setzt sich an den aufgeladenen Stellen ab. Ein aufgeladenes Blatt Papier wird dann auf die sich drehende Trommel gepresst und nimmt den geladenen Farbstaub von der Trommel ab. In einer Heizkammer schmilzt der Farbstaub und brennt sich dauerhaft in das Papier ein.