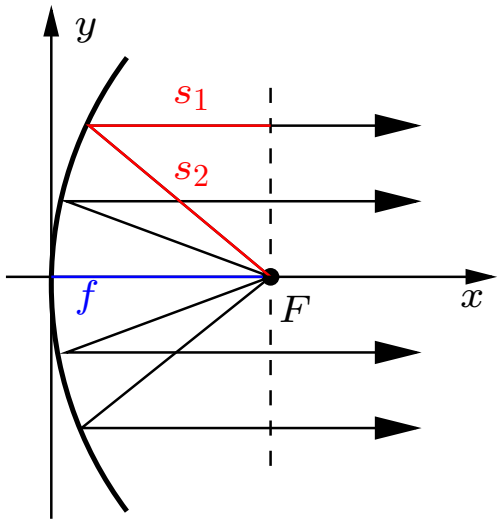
Lösung zum Parabolspiegel



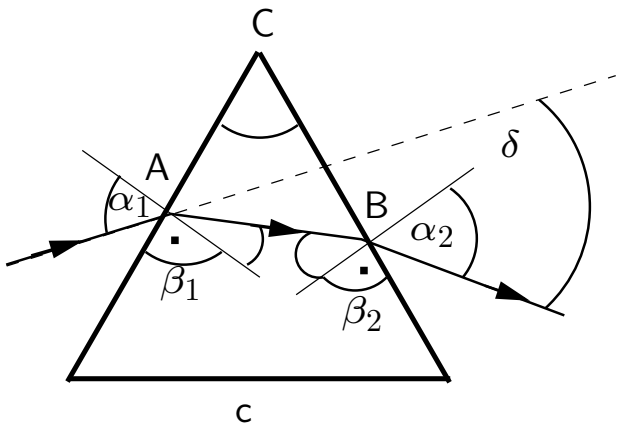
Offensichtlich muss $s = s_1 + s_2$ unabhängig vom Achsenabstand y bzw. über die Parabelgleichung auch unabhängig von x sein.

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ &= f - x + \sqrt{y^2 + (f-x)^2} \\ &= f - x + \sqrt{y^2 + f^2 - 2fx + x^2} \end{aligned}$$

s ist unabhängig von y bzw. x, wenn der Ausdruck unter der Wurzel gerade gleich $(f+x)^2$ ist. Also muss für einen Parabolspiegel

$y^2 = 4fx$ gelten, womit dann $s = f - x + (f + x) = 2f$.

Prismen



Prismen dienen in der Optik primär zwei Zwecken, der Umlenkung und der spektralen Zerlegung von Licht. Wir betrachten zunächst die erste Anwendung, die Um- und Ablenkung von Licht. Der Abb. links entnehmen wir, dass $\delta = \alpha_1 - \beta_1 + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$.

Oft will man den Austrittswinkel δ als Funktion des Einfallswinkels α_1 und des Prismenwinkels γ schreiben. Die Winkelsumme in ΔABC ist $\gamma + \pi/2 - \beta_1 + \pi/2 - \beta_2$ und folglich $\gamma = \beta_1 + \beta_2$. Damit gilt

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma.$$

Zu erwähnen bleibt lediglich noch, dass die Winkel des Prismas zur Seite c irrelevant sind, solange sich der Lichtstrahl nicht mit dieser Seite kreuzt.

Spektrale Zerlegung

Zum Verständnis der spektralen Zerlegung ist es nützlich, sich die minimale Ablenkung δ des Strahls zu überlegen. Diese erfolgt, wenn $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}\alpha_1 = 1 + \mathrm{d}\alpha_2/\mathrm{d}\alpha_1 = 0$, womit $\mathrm{d}\alpha_1 = -\mathrm{d}\alpha_2$. Nun betrachten wir die Ableitung (im Sinne einer Änderung) des Brechungsgesetzes $\sin\alpha = n \cdot \sin\beta$ für die beiden brechenden Prismenflächen

$$\frac{\mathrm{d}\sin\alpha_1}{\mathrm{d}\alpha_1}\mathrm{d}\alpha_1 = \cos\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_1 = n\cos\beta_1 \mathrm{d}\beta_1$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin\alpha_2}{\mathrm{d}\alpha_2}\mathrm{d}\alpha_2 = \cos\alpha_2 \mathrm{d}\alpha_2 = n\cos\beta_2 \mathrm{d}\beta_2.$$

Weil $\gamma = \beta_1 + \beta_2 = \mathrm{const.}$ gilt $\mathrm{d}\beta_1 = -\mathrm{d}\beta_2$, was mit Division obiger Gleichungen für den minimal abgelenkten Strahl $(\mathrm{d}\alpha_1 = -\mathrm{d}\alpha_2)$ ergibt

$$\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2}.$$

Jetzt verwenden wir noch einmal das Brechungsgesetz und quadrieren diese Gleichung

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\right)^2 &= \left(\frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2}\right)^2, \\
\frac{1-\sin^2\alpha_1}{1-\sin^2\alpha_2} &= \frac{1-\sin^2\beta_1}{1-\sin^2\beta_2} \\
&= \frac{1-(\sin^2\alpha_1)/n^2}{1-(\sin^2\alpha_2)/n^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{1-\sin^2\alpha_1}{1-\sin^2\alpha_2} = \frac{n^2-\sin^2\alpha_1}{n^2-\sin^2\alpha_2}.$$

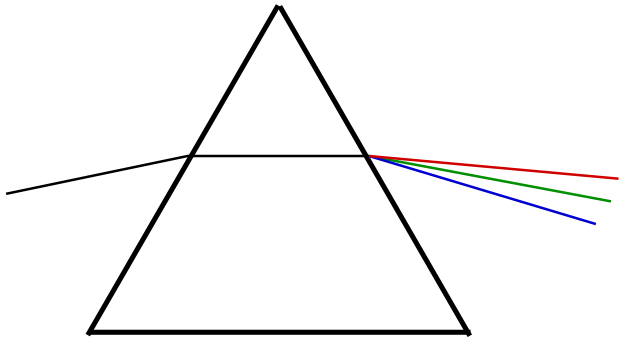
Für $n \neq 1$ kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ (und damit auch $\beta_1 = \beta_2$), d. h. wenn der Strahlengang symmetrisch ist. Der minimale Ablenkwinkel lautet dann

$$\delta_{min} = 2\alpha - \gamma.$$

Damit können wir auch den Winkel α berechnen, für den die minimale Ablenkung stattfindet,

$$\sin\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right) = \sin\alpha = n \cdot \sin\beta = n \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Um nun daraus endlich die spektrale Zerlegung von Licht zu finden, müssen wir nun überlegen, wie der Ablenkwinkel δ sich ändert, wenn der Brechungsindex n sich ändert. Schließlich ist ja n eine Funktion der Wellenlänge, $n = n(\lambda)$, und damit auch der Ablenkwinkel $\delta = \delta(\lambda)$.



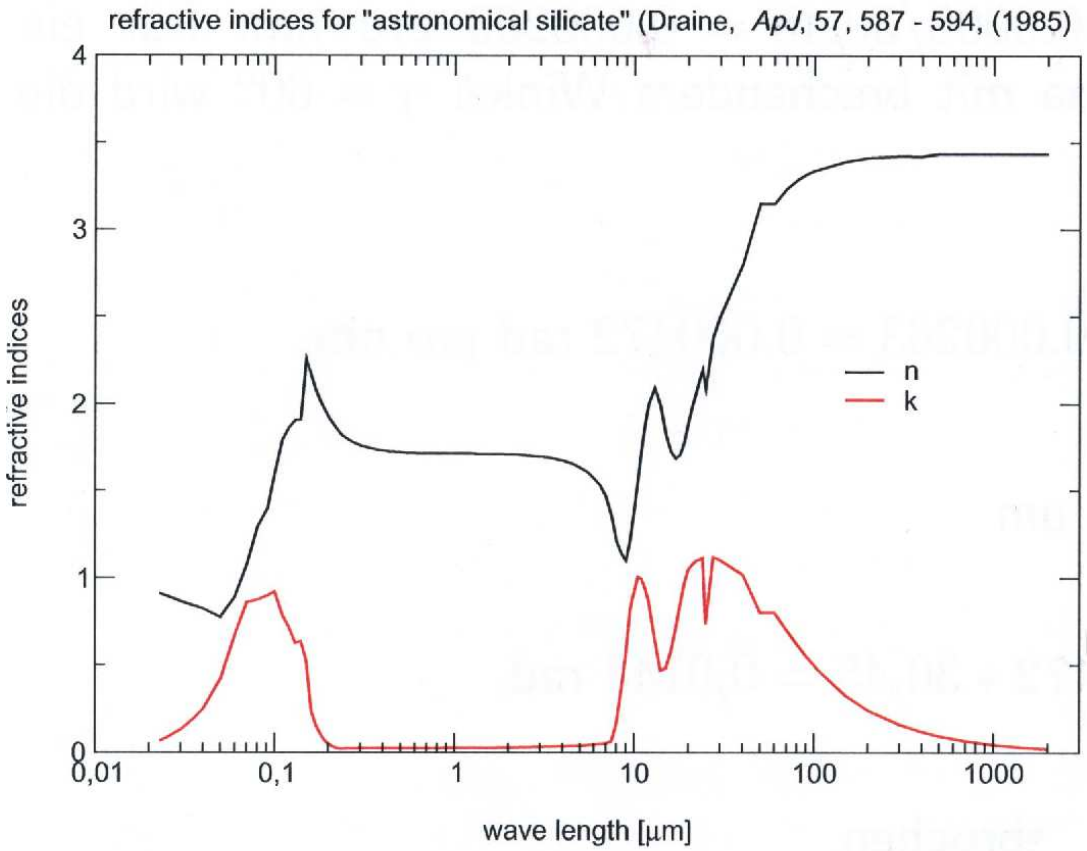
Wir können nun die obige Gleichung nach n auflösen und nach δ ableiten, dann haben wir wegen $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}n = (\mathrm{d}n/\mathrm{d}\delta)^2$

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}n} = \frac{2\sin(\gamma/2)}{\cos((\delta+\gamma)/2)} = \frac{2\sin(\gamma/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\gamma/2)}}.$$

Weil der Brechungsindex von der Wellenlänge abhängt, haben wir also auch die Abhängigkeit von δ und λ:

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{2\sin(\gamma/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\gamma/2)}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}.$$

Für die meisten durchsichtigen Medien gilt für sichtbares Licht $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda < 1$, weshalb blaues Licht stärker gebrochen wird als rotes.



Als Beispiel haben wir links den Brechungsindex für sog. astronomisches Silikat, den Stoff, aus dem viele Staubteilchen im interstellaren Medium bestehen. Im Bereich des sichtbaren Lichtes (ca. 400 nm bis ca. 800 nm) nimmt n ein wenig ab, die Änderung ist sehr klein, insbesondere, wenn man mit anderen Wellenlängenbereichen vergleicht.

Als weiteres Beispiel können wir Wasser bei rotem Licht untersuchen. Der Brechungsindex bei $\lambda = 686{,}72$ nm ist $N_B = 1{,}3304$, für die benachbarte Fraunhoferlinie C bei $\lambda = 656{,}273$ nm ist $n_C = 1{,}3312$. Wir nähern die Ableitung

durch $\Delta n/\delta\lambda$ = -0,0008/30,45 = 0,000263 pro nm. Für ein großes, mit Wasser gefülltes Prisma mit brechendem Winkel $\gamma = 60°$ wird die Winkelabweichung $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}\lambda$ nun

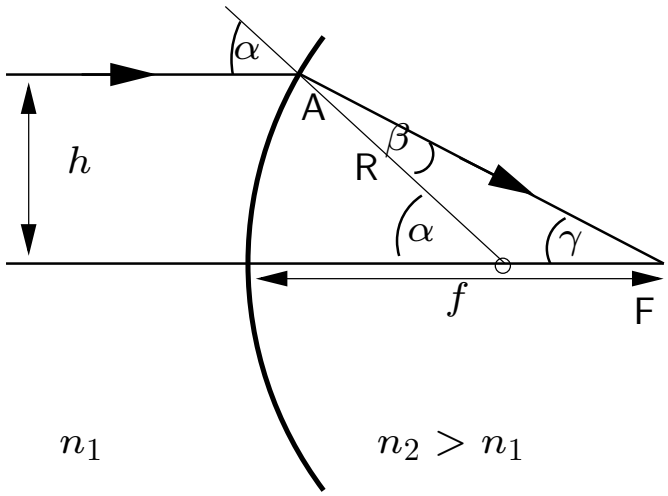
$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1,331^2 0,5^2}} 0,000263 = 0,000472 \text{ rad pro nm.}$$

Die beiden Fraunhoferlinien werden um

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda = 0,000472 * 30,45 = 0,0144 \text{ rad},$$

also um etwa 0,8 Grad verschieden gebrochen.

Linsen



Beim Übergang in ein optisch dichteres Medium, wie z. B. eine Linse, wird ein Lichtstrahl am Punkt A zum Lot hin gebrochen und trifft schließlich auf den Brennpunkt F. Für paraxiale Strahlen ($h \ll R$) gilt mit den nebenstehenden Definitionen und $\gamma = \alpha - \beta$

$$OA = R \cdot \alpha \approx f \cdot \gamma = f \cdot (\alpha - \beta) \Longrightarrow f = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot R.$$

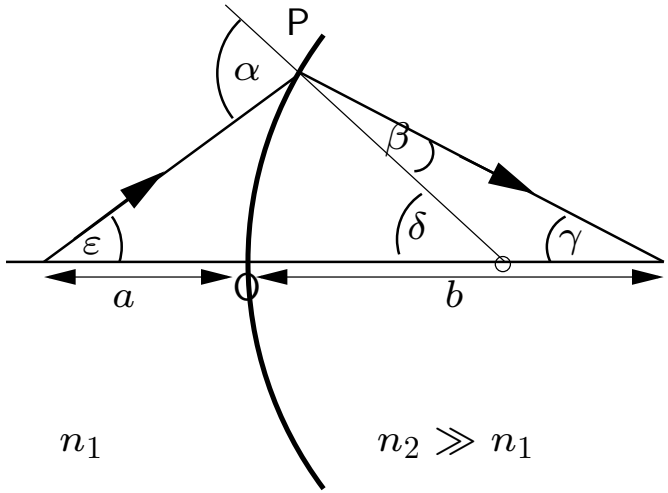
Mit dem Brechungsgesetz und für kleine Winkel haben wir

$$n_1 \cdot \alpha \approx n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \approx n_2 \beta \Longrightarrow \alpha \approx \frac{n_2}{n_1} \beta,$$

und damit $f_2 = \left(\frac{n_2}{n_2 - n_1} \right) R$, wo der Index 2 andeutet, dass F im Medium 2 liegt.

Die Reihenfolge der Medien (von dünn in dicht oder umgekehrt) ist an sich irrelevant, weshalb umgekehrt für den Übergang von dicht auf dünn gelten muss

$$f_1 = \left(\frac{n_1}{n_1 - n_2}\right) \cdot R.$$



Eine ähnliche Rechnung führt zu einer vorläufigen Version der Linsengleichung. Einsetzen der Winkel $\alpha = \delta + \varepsilon$ und $\beta = \delta - \gamma$ in das genäherte Brechungsgesetz $n_1\alpha \approx n_2\beta$ liefert für paraxiale Strahlen

$$n_1(\delta + \varepsilon) \approx n_2(\delta - \gamma).$$

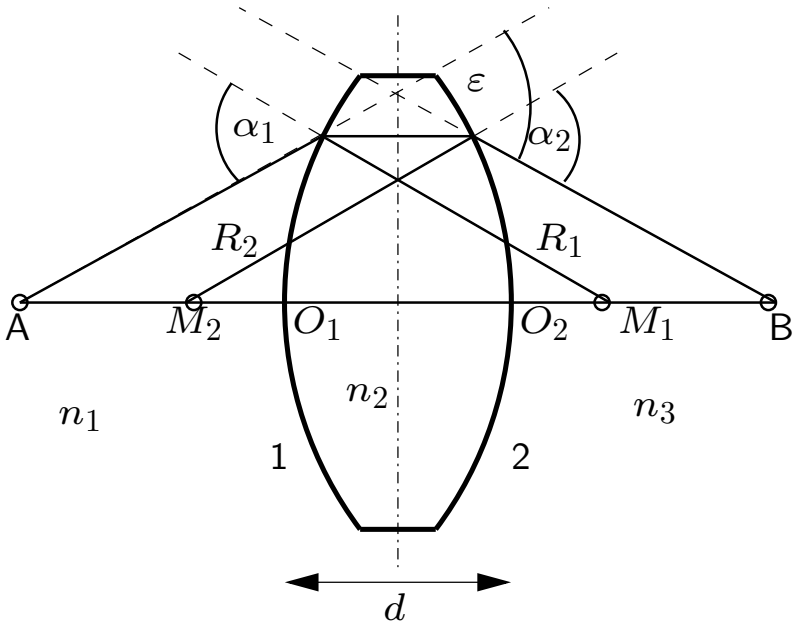
Dies dividieren wir durch eine Näherung für den Bogen $PO = R \cdot \delta \approx b\gamma \approx a\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\frac{n_1(\delta+\varepsilon)}{a\varepsilon} &= \frac{n_2(\delta-\gamma)}{b\gamma}, \\
\frac{n_1}{a}+\frac{n_2}{b} &= \frac{n_2\delta}{b\gamma}-\frac{n_1\delta}{a\varepsilon}, \\
\frac{n_1}{a}+\frac{n_2}{b} &= \frac{n_2-n_1}{R}.
\end{aligned}$$

Mit obigen Ausdrücken für f_1 und f_2

$$\frac{n_1}{a}+\frac{n_2}{b}=\frac{n_2}{f_2}=\frac{n_1}{f_1}.$$

Dünne Linsen

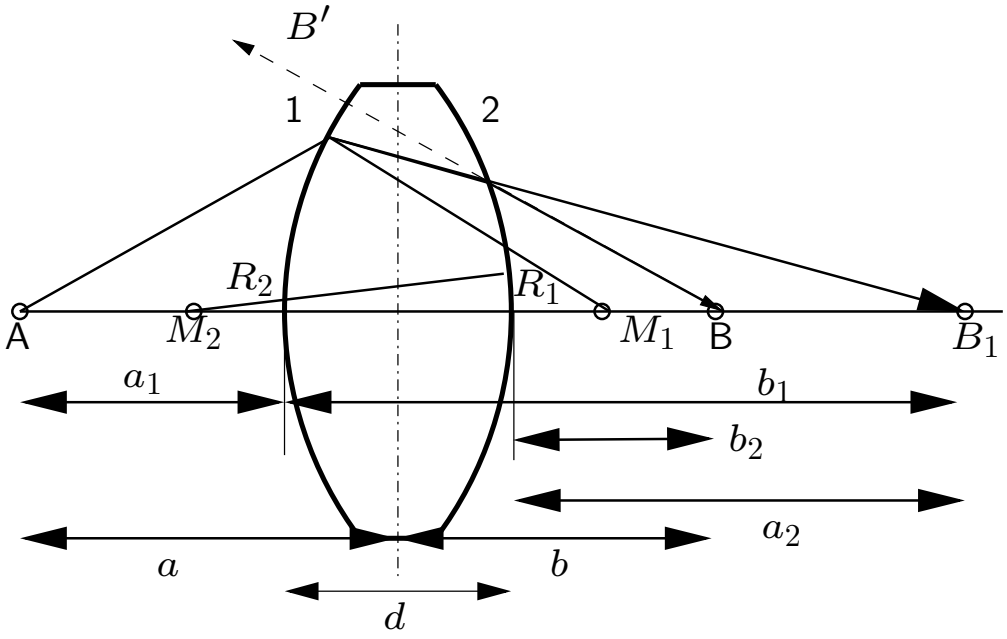


Linsen, bei denen der größte Abstand zwischen den Oberflächen $d = \overline{O_1O_2}$ sehr klein ist gegenüber den Brennweiten, nennen wir **dünne Linsen**. Ihre Abbildung kann als eine Folge von Abbildungen von Luft in die Linse (Übergang von n_1 in n_2) und von der Linse in die Luft (Übergang von n_2 in $n_3 = n_1$) aufgefasst werden. Damit haben wir die erforderlichen Formeln schon parat, mit $n_1 = 1$ und $n_2 = n$ haben wir von vorhin

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{R_1},$$

denn der Lichtstrahl würde, wäre die Linse nach rechts nicht begrenzt, in den

Bildpunkt B_1 (unten eingezeichnet) abgebildet.



Beim Austritt aus der Linse wird der Strahl an der Oberfläche 2 vom Lot weggebrochen, also stärker zur Achse hin. Dieser Übergang ist etwas komplizierter und bedarf etwas mehr Erklärung.

Wir betrachten B_1 formal als Gegenstand für eine zweite Abbildung in der der Lichtstrahl aus Luft in die Linse führt. Dabei wir der Strahl gebrochen, er ist als gestrichelte Linie dargestellt. Die Verlängerung dieser gestrichelte Linie ist der gesuchte Strahl rechts von der Linse, er trifft den wahren Bildpunkt der

Abbildung durch die Linse. Für die Abbildungsformel gilt also[1]

$$\frac{-n}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{-n}{b_1 - d} + \frac{1}{b_2} = \frac{1-n}{R_2}$$

Nun können wir die beiden Abbildungsgleichungen addieren und erhalten

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{nd}{b_1(b_1 - d)}.$$

Mit den neuen Abständen $a = a_1 + d/2$ und $b = b_2 + d/2$ erhalten wir für dünner Linsen ($d \ll a, \quad d \ll b$)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

[1] Achtung: Krümmungsradius $-R_2$!

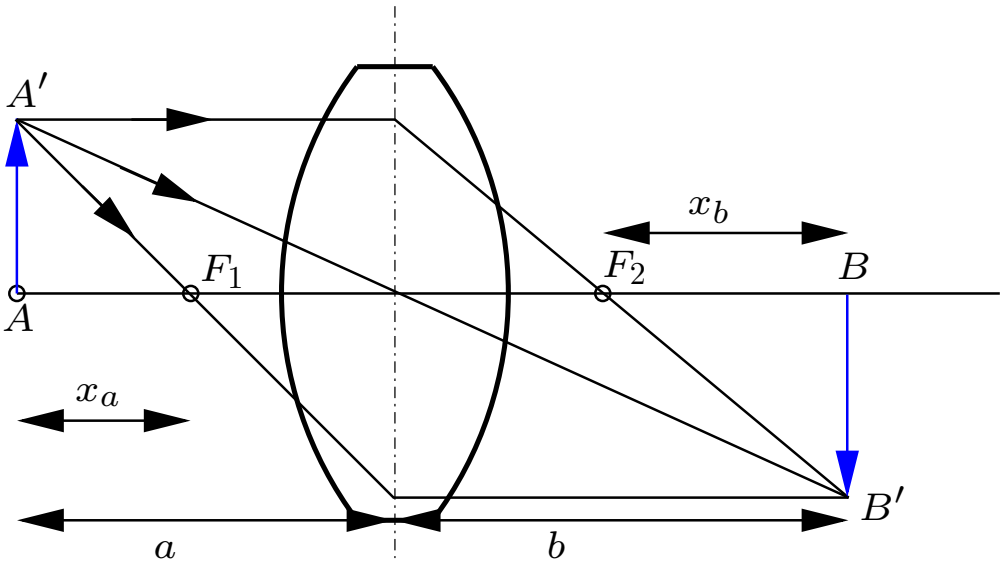
Die Brennweite kann einfach bestimmt werden, indem wir achsenparallele Strahlen betrachten für die $a = \infty$ und $b = f$ gilt. Dann erhalten wir

$$f = \frac{1}{n-1}\left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R2 - R1}\right),$$

was wir in die vorhin gefundene Abbildungsgleichung einsetzen um die endgültige Form der **Linsengleichung** zu erhalten:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Der Abbildungsmaßstab



Der Abbildungsmaßstab M ist wieder durch den Strahlensatz gegeben:

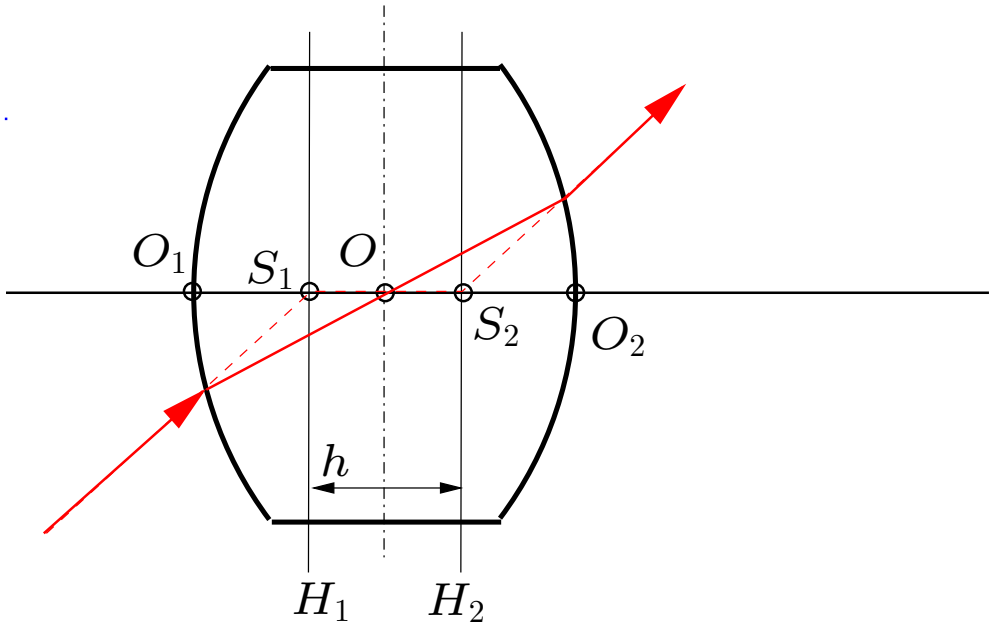
$$M = \frac{BB'}{AA'} = -\frac{b}{a} = \frac{f}{f-a}.$$

Der letzte Schritt folgt durch Multiplikation der Linsengleichung mit a.

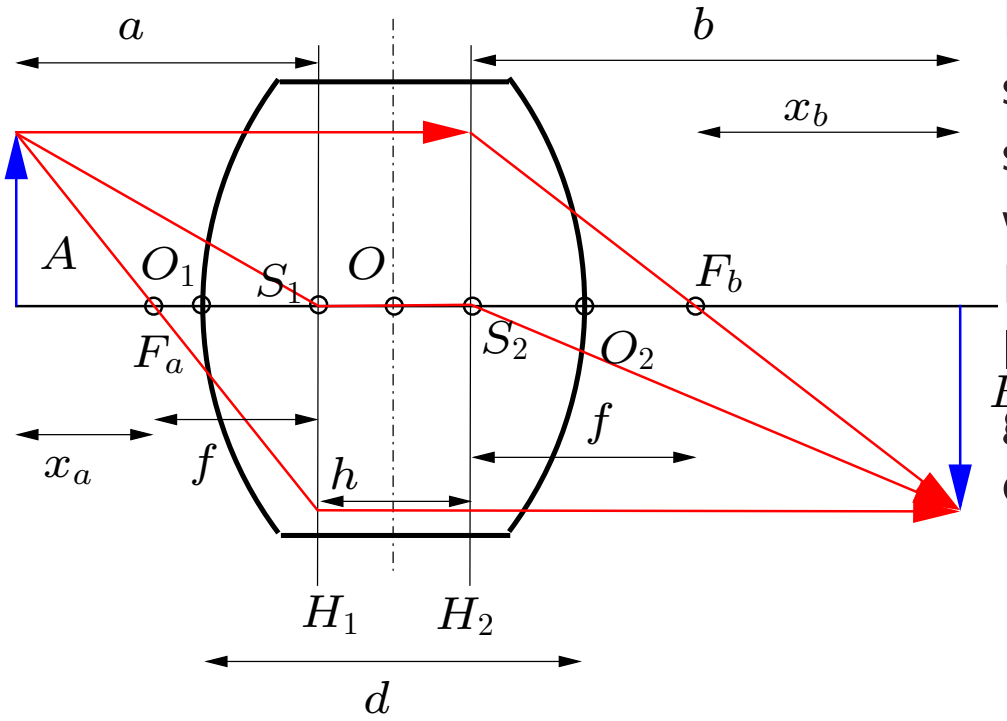
Verwendet man statt f und a und b die Größen $x_a = a - f$ und $x_b = b - f$, so ergibt sich die **Newtonsche Abbildungsgleichung**

$$x_a \cdot x_b = f^2.$$

Dicke Linsen



Bei dicken Linsen (Abb. links) können wir die Brechung an den beiden Grenzflächen nicht mehr, wie bei dünnen Linsen, durch eine entsprechende Brechung an der Mittelebene ersetzen. Die Parallelverschiebung bei dicken Linsen wird so groß, dass sie nicht vernachläßogt werden darf. Allerdings können wir einen solchen Strahl durch die links abgebildete gestrichelte Vereinfachung ersetzen. Der Strahl wird bis zu den **Hauptebenen** H_1 und H_2 geführt.



Die Konstruktion eines Bildes geschieht nun völlig analog zum Hohlspiegel und zur dünnen Linse, nur werden die Strahlen immer an den Hauptebenen umgelenkt. Mit den wie links definierten Abständen gilt die gewöhnliche Linsenformel wie auch die Newtonsche Abbildungsgleichung:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}, \quad \text{bzw.} \quad x_a \cdot x_b = f^2.$$