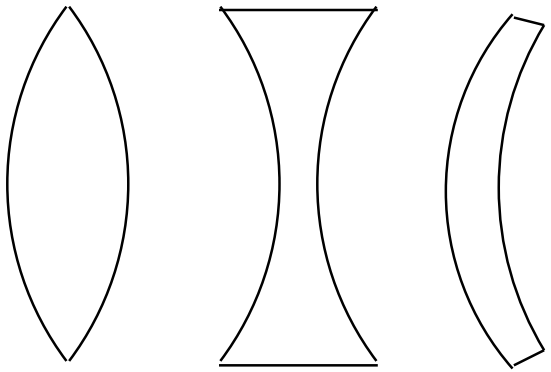
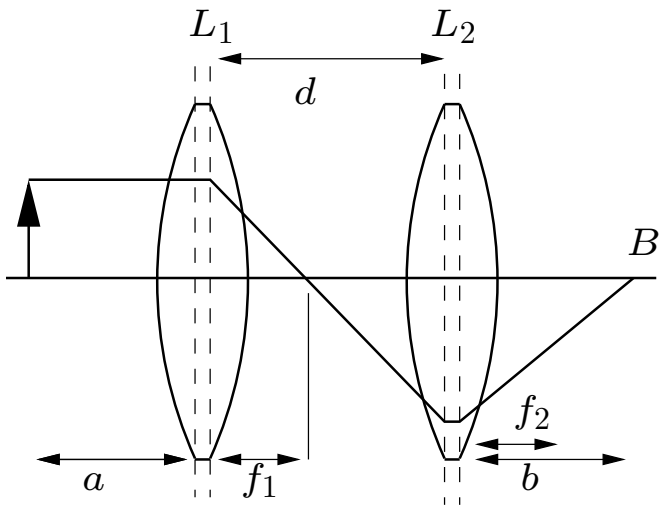
Sammel- und Streulinsen



Linsen können auch durchaus verschiedene Formen haben, je nachdem, was sie für eine Funktion erfüllen. Sammellinsen (a) sind konvex, Streulinsen sind konkav, ferner gibt es auch konvex-konkave Kombinationen (c).

Übung: Eine Sammel- und eine Streulinse haben je Krümmungsradien von 40 cm und mögen aus Glas mit $n = 1,65$ bestehen. Berechnen Sie für beide Linsen ihre Brennweiten. [$f = \pm$ 31 cm]

Linsensysteme



Die meisten optischen Apparate vereinigen mehrere Linsen zu einem Linsensystem, ein Zoom-Objektiv einer Kamera weist mindestens drei Linsen auf. Um solche Systeme verstehen zu können, besprechen wir vorerst die Kombination von zwei Linsen L_1 und L_2. Der achsenparallele Strahl bildet den Gegenstand auf den Brennpunkt von L_1 ab. Das dort entstehende Zwischenbild erscheint L_2 als Gegenstand in Gegenstandsweite $a_2 = d - f_1$ und wird in die Bildweite b abgebildet:

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2} \Longrightarrow \frac{1}{d - f_1} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2} \Longrightarrow b = \frac{(d - f_1) f_2}{d - f_1 - f_2}.$$

Will man eine Linsengleichung für das Gesamtsystem finden, so muss man die Brennweite des Systems ansetzen als

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.$$

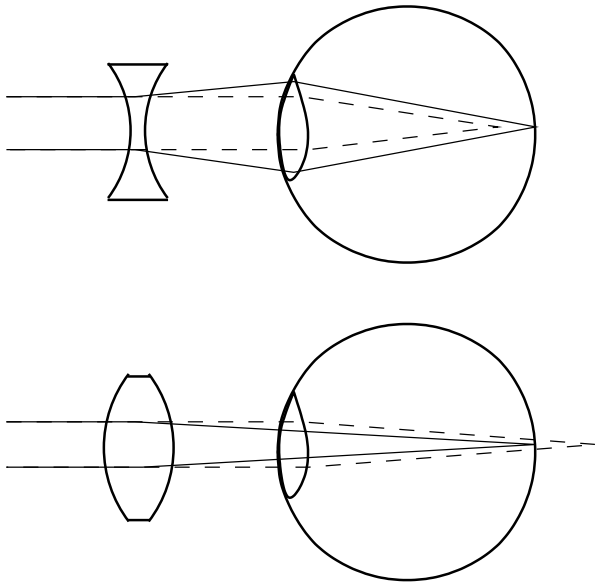
Für kleine Abstände d wird der letzte Term vernachlässigbar. Dies ist bei den meisten Objekten der Fall, man hat ja ein Interesse, diese so kompakt wir möglich zu bauen. Oft wird die reziproke Brennweite als **Brechkraft** bezeichnet

$$D^* = \frac{1}{f} \text{ gemessen in } \textbf{Dioptrien}.$$

Für kompakte Systeme addieren sich die Kehrwerte der Brennweiten bzw. die Brechkräfte,

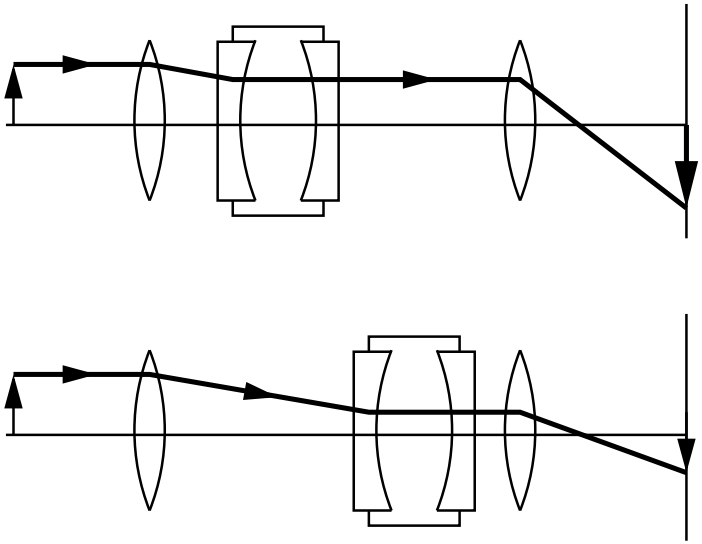
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \text{ bzw. } D^* = D_1^* + D_2^*.$$

Das menschliche Auge I



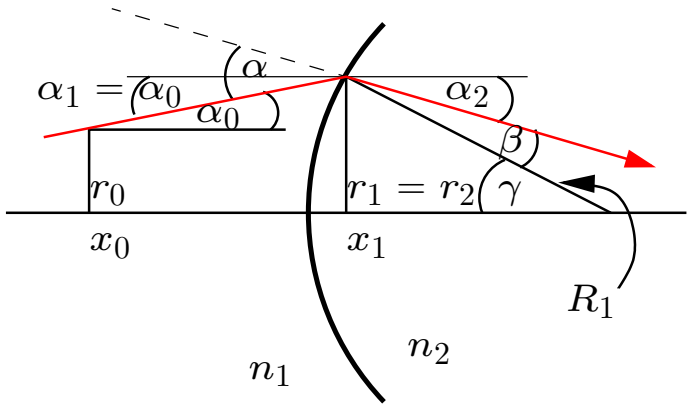
Diese Kombination von Linsen zu einem System wird ausgenutzt, um die häufigen Sehfehler Kurz- und Weitsichtigkeit zu korrigieren. Bei beiden vermögen die Augenmuskeln nicht genügend zu deformieren. Bei Kurzsichtigkeit (oben links) kann die Augenlinse nicht genügend gestreckt werden. Das Bild liegt vor der Netzhaut, während es bei sehr nahen Gegenständen gerade auf diese zu liegen kommt. Kurzsichtigkeit kann deshalb durch eine Zerstreuungslinse korrigiert werden. Bei Weitsichtigkeit (unten) vermögen die Augenmuskeln die Augenlinse zu wenig zu krümmen, was durch eine Sammellinse korrigiert werden kann.

Ein einfaches Zoomobjektiv



Ein Zoomobjektiv soll bekanntlich eine variable Vergrößerung M erlauben, muss aber gleichzeitig, bei konstantem Abstand zwischen Gegenstand und Bildebene, ein scharfes Bild ergeben. Am einfachsten erreicht man dies durch eine Anordnung wie links skizziert. Die Zerstreuungslinsen "biegen" die Strahlen nach der Eintrittslinse wieder in parallele Lichtstrahlen um, die dann durch die Austrittslinse auf die Bildebene fokussiert werden.

Komplizierte Linsensysteme



Komplizierte Linsensysteme werden mit Vorteil nicht mehr wie bis jetzt durch dedizierte Formeln behandelt, sondern durch eine verblüffend einfache lineare Methode, die sog. Matrixmethode. Weil sich ein Lichtstrahl in einem homogenen Medium geradlinig bewegt, lässt er sich durch eine lineare Gleichung (Geradengleichung) beschreiben. In der Abbildung links ist $\alpha_1 = \alpha_0$ und $r_1 = (x_1 - x_0)\alpha_0 + r_0$, in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (x_1 - x_0) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ r_0 \end{pmatrix}.$$

Dabei werden Winkel positiv gezählt, wenn sie von der x-Achse aus im Gegen-

uhrzeigersinn erscheinen, sonst negativ.

Wenn es uns also nun gelingt zu zeigen, dass auch die Brechung durch eine Matrix beschrieben werden kann, so können wir anschließend komplizierte Systeme durch einfaches Aneinandermultiplizieren von Matrizen berechnen.

Mit dem Brechungsgesetz von Snellius haben wir (für achsennahe Strahlen!) $-n_1\alpha = n_2\beta$. Mit den Hilfswinkeln $-\gamma = \beta + \alpha_2$ und $\alpha = \alpha_1 + \gamma$ erhalten wir leicht

$$\begin{aligned} n_2\alpha_2 &= n_1\alpha_1 + (n_1 - n_2)r_1/R_1 \\ r_2 &= r_1 \end{aligned}$$

was auch in Matrixschreibweise geschrieben werden kann:

$$\begin{pmatrix} n_2\alpha_2 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n_1-n_2}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1\alpha_1 \\ r_1 \end{pmatrix}$$ QED.

Abbildungsfehler

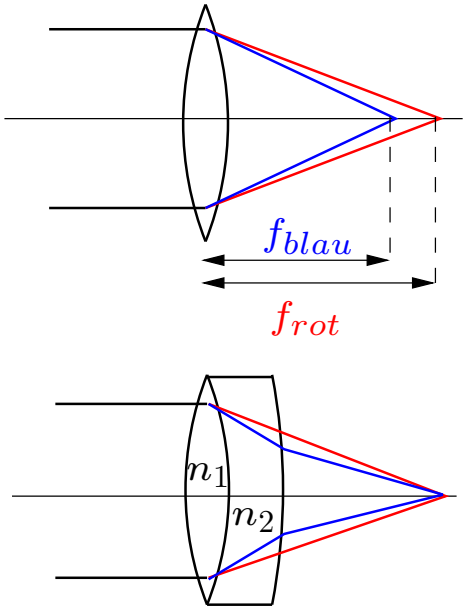
+ chromatische Aberration

+ sphärische Aberration

+ Astigmatismus

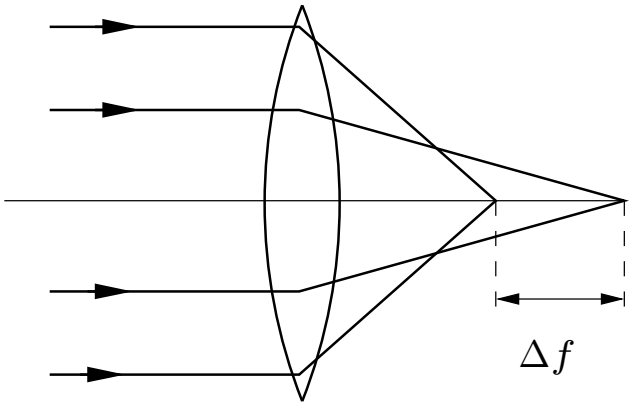
- Koma
- Bildfeldwölbung
- Verzeichnung
- aplanatische Abbildung

Chromatische Aberration



Der unterschiedliche Brechungsindex für verschiedene Wellenlängen führt zu einem unterschiedlichen Brennpunkt für die verschiedenen Farben (griechisch $\chi\rho\omega\mu\omega\sigma$, chromos). Dieser Effekt heißt chromatische Aberration. Weil für die meisten Materialien blau stärker gebrochen wird als rot, erscheint blau in einem näheren Brennpunkt als rot. Dieser Abbildungsfehler ist oft in billigen Optiken zu beobachten und führt zu "Regenbogen"-Erscheinungen an den Rändern abgebildeter Objekte. Der Effekt kann durch sog. Achromate korrigiert werden, dabei werden Systeme aus zwei verklebten Linsen (eine Sammel- und eine Zerstreuungslinse) mit unterschiedlichem Brechungsindex verwendet. Offensichtlich spielt bei der Dimensionierung der Krümmungsradien der Brechungsindex eine große Rolle (Brennpunkt!).

Sphärische Aberration



Die sphärische Aberration haben wir beim sphärischen Hohlspiegel bereits im Detail untersucht. Der Effekt tritt, das sollte nicht überraschen, genauso auch bei sphärischen Linsen auf. Weil es wesentlich schwieriger ist, eine korrigierte Linse zu schleifen, als einen Parabolspiegel zu bauen, verwendet man bei Linsen oft andere Lösungen:

- Begrenzung der Eintrittsbreite des Strahls auf paraxialen Bereich
- Verwendung plan-konvexer Linse, konvexe Seite dem Strahl zugewandt
- Kombination verschiedener Linsen zu einem korrigierten Linsensystem
- Verwendung entsprechend geschliffener Linsen

Astigmatismus

Nicht alle Gegenstände befinden sich zufälligerweise gerade auf der optischen Achse einer Linse. Ihre Abbildung schräg zur Achse führt zum sog. Astigmatismus. Dieser beruht darauf, dass nicht mehr alle Strahlen unter demselben Einfallswinkel auf die Linse fallen, was zu einem unterschiedlichen Brechungswinkel führt. Insbesondere werden dann die Strahlen in der durch den Zentralstrahl und die optische Achse aufgespannte Ebene (Meridionalebene) in einen anderen Bildpunkt abgebildet als die Strahlen, die in der dazu senkrechten Ebene (Sagittalebene) liegen. Das Bild wird dann, je nach Abstand von den beiden Bildpunkten, zwischen einer Linie in der Sagittalebene und einer Linie in der Meridionalebene ellipsenförmig verformt. Die Hauptachsen sind die vorher erwähnten Bildlinien. Astigmatismus ist ein häufiger Sehfehler, der durch eine zusätzliche zylindrische Krümmung von Brillengläsern in der Hauptebene korrigiert werden kann.

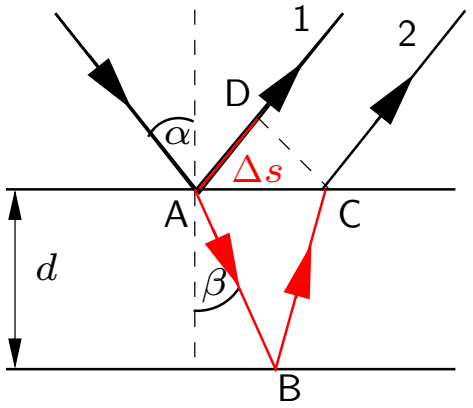
Astigmatismus kann mit einer Zylinderlinse gut demonstriert werden.

Interferenz und Beugung

Ein Verständnis optischer Instrumente verlangt nach mehr als nur den Abbildungseigenschaften und der Kenntnis häufiger Abbildungsfehler. So kann man im Prinzip Teleskope mit berauschender Vergrößerung bauen (und erstaunlicherweise auch verkaufen), die die beobachteten Gegenstände dann riesig groß, aber unscharf abbilden. Optische Instrumente soll man eben nicht nur nach ihrer Vergrößerung, sondern insbesondere auch nach ihrer **Auflösung** beurteilen.

Damit wir diese wichtige Eigenschaft verstehen können, müssen wir nun noch die Beugung und die Interferenz behandeln.

Interferenz an einer plan-parallelen Platte

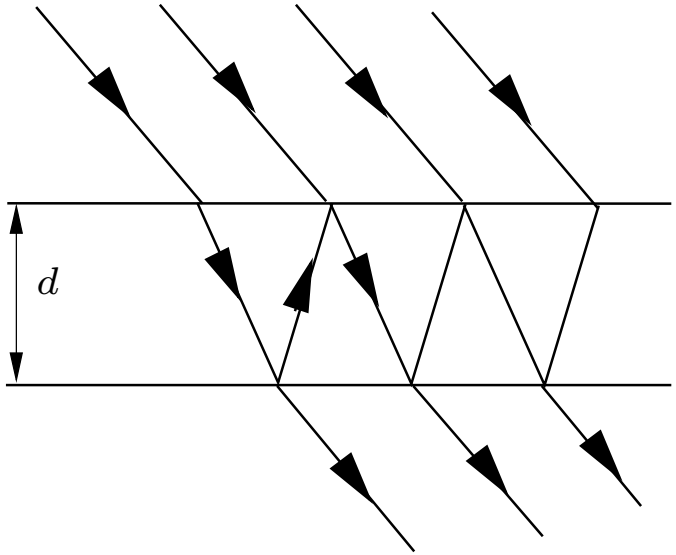


Das Prinzip der Interferenz haben wir bereits bei der Vergütung von optischen Linsen besprochen. Wir wollen dies hier auffrischen. Der Gangunterschied Δs zwischen den beiden reflektierten Lichtstrahlen 1 und 2 ist $\Delta s = n(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{AD} = 2nd/\cos\beta - 2d\tan\beta\sin\alpha$. Mit dem Brechungsgesetz von Snellius, $\sin\alpha = n\sin\beta$ lässt sich dies umformen

$$\Delta s = 2nd/\cos\beta - 2nd\sin^2\beta/\cos\beta = 2nd\cos\beta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}.$$

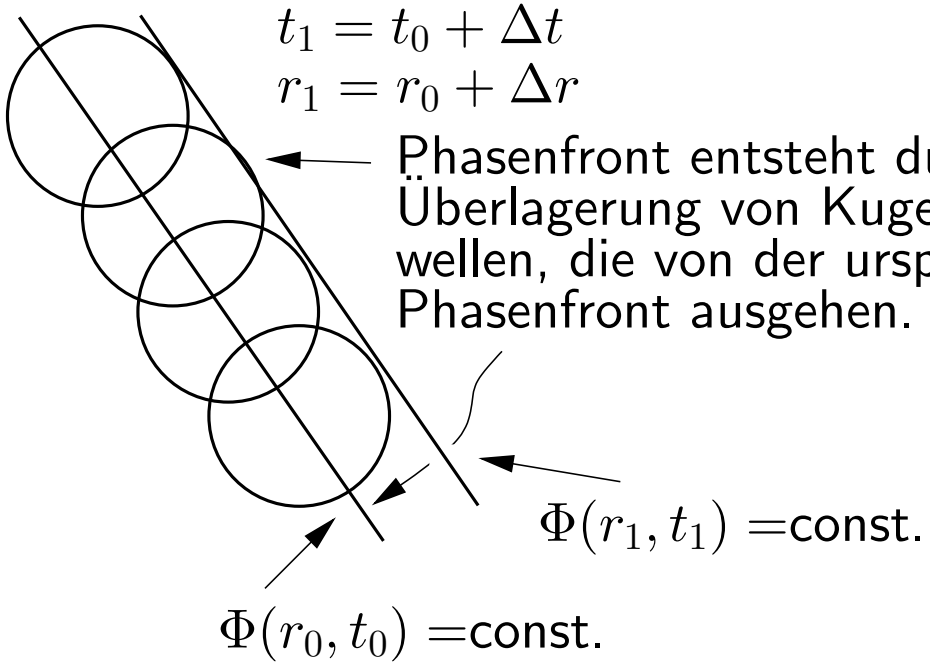
Bei der Reflexion zum optisch dichteren Medium ergibt sich zudem ein Phasensprung von π, womit wir für die Phasenverschiebung haben $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s - \pi$, was bei $\Delta\phi = m2\pi$ konstruktive und für $\Delta\phi = (2m+1)\pi$ destruktive Interferenz erzeugt.

Das Fabry-Perot-Interferometer



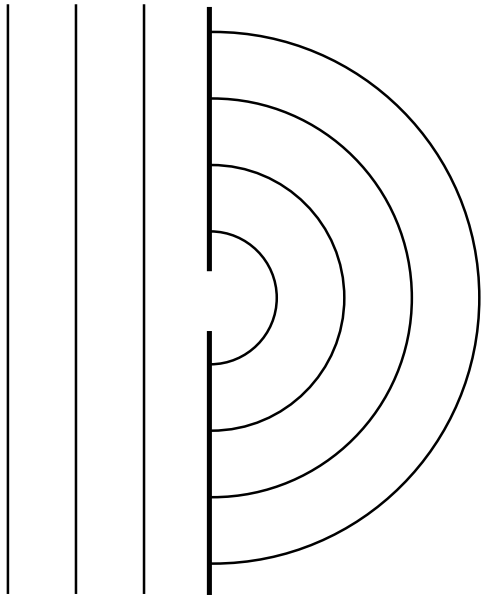
Diese Interferenzerscheinung, aber im transmittierten Licht, wird im Fabry-Perot-Interferometer (1897!) ausgenutzt, um sehr präzise Spektren zu messen. Dabei wird parallel einfallendes Licht wie vorhin durch eine planparallele leicht verspiegelte Glasplatte geschickt. Das einmal reflektierte austretende Licht ist gegenüber dem direkt austretenden Licht um $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)2nd/\cos\beta$ phasenverschoben. Die Transmission ist also für bestimmte Wellenlängen maximal. Das austretende (wieder parallele) Licht wird durch eine Sammellinse auf einen Detektor gsammelt, die Transmission kann so sehr einfach gemessen werden. Fabry-Perot-Interferometer sind heute stark verbreitet.

Das Prinzip von Huygens



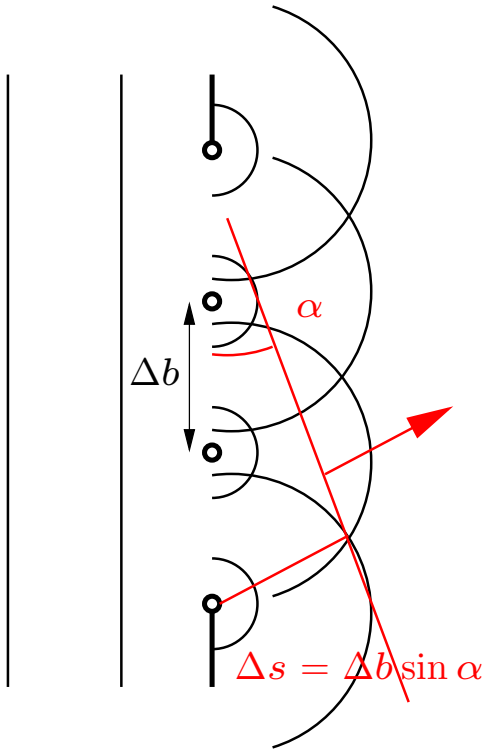
Das Prinzip von Huygens besagt, dass sich die Ausbreitung von Wellen dadurch beschreiben lässt, dass an jedem Punkt der Phasenfront einer Welle neue Kugelwellen gebildet werden, die sich von dort aus ausbreiten. Die Überlagerung resultiert in einer neuen Phasenfront, an der ihrerseits wieder Kugelwellen ausgesandt werden, etc.

Das Prinzip von Huygens II



Damit lässt sich auch die Situation links beschreiben. Eine monochromatische ebene Welle läuft gegen eine Wand mit einem Loch (Blendenöffnung, z. B. Spalt). Dieses wirkt nun als Quelle von Kugelwellen. Wird die Wand durch eine löchrige Wand ersetzt, so befinden sich dort viele Kugelwellenzentren. Insbesondere sagt das Huygensche Prinzip voraus, dass auf einem Schirm hinter der Blende Licht auch Orte erreichen kann, die es nach der geometrischen Optik nicht erreichen dürfte!

Beugung am Spalt



Wie tritt nun das Licht durch die Blende? In jedem Punkt der Blendenöffnung entsteht eine neue Kugelwelle, die sich ausbreitet (hier sind nur 4 eingezeichnet). Diese können nun verschiedene Phasenfronten (rot) bilden, die in verschiedene wohldefinierte Richtungen laufen (rote Pfeile). Zwischen den Richtungen liegen Bereiche, in denen Wellentäler und -berge vermischt werden und folglich auch das Signal kleiner wird. Wir erwarten also, dass in einigen ausgezeichneten Richtungen mehr Licht auf einen Schirm fallen wird als in anderen. Die Rechnung dafür ist exakt dieselbe, die wir angestellt haben, um zu zeigen, warum Licht gerade durch ein Fenster geht.

Der Abstand von Wellenberg zu Wellenberg beträgt $\Delta s = \Delta b \sin\alpha$ und verursacht wiederum einen Phasenunterschied,

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta b \sin\alpha.$$

Die Gesamtamplitude E aller Kugelwellen auf der Geraden x in Richtung α ist dann die Summe aller Teilamplituden E_j von Kugelwellen, die von den N Teilstrecken $\Delta b = b/N$ ausgesandt werden.

$$E = \sum_{j=1}^{N} E_j = E_0 \left(\frac{\Delta b}{b}\right) \sum_{j}^{N} e^{i(\omega t + \phi_j)} = E_0 \left(\frac{\Delta b}{b}\right) e^{i\omega t} \sum_{j=1}^{N} e^{i\cdot(j-1)\Delta\phi},$$

weil wir die Phase der ersten Welle $\phi_1 = 0$ gesetzt haben. Dies ist eine geometrische Reihe[1]

[1] $\sum_{k=0}^{N-1} q^k = (q^N - 1)/(q-1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} e^{i\cdot(j-1)\Delta\phi} &= \frac{e^{iN\Delta\phi}-1}{e^{i\Delta\phi}-1} \\
&= \frac{e^{iN\Delta\phi/2}}{e^{i\Delta\phi/2}} \cdot \frac{e^{iN\Delta\phi/2}-e^{-iN\Delta\phi/2}}{e^{i\Delta\phi/2}-e^{-i\Delta\phi/2}} \\
&= e^{i\left(\frac{N-1}{2}\right)\Delta\phi} \cdot \frac{\sin(N\Delta\phi/2}{\sin\Delta\phi/2}.
\end{aligned}$$

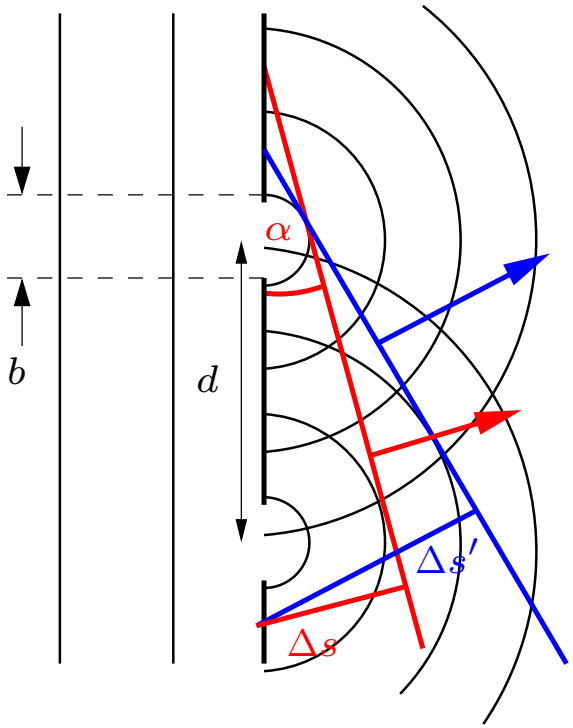
Die Intensität $I = \varepsilon_0 c|E|^2$ des gestreuten Lichts ist nun einfach zu finden. Wir denken uns die Spaltbreite als eine Reihe von $N = b/\Delta b$ Sendern mit Senderamplitude $A = A_0 \cdot \Delta b/b$.

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2[N\pi(\Delta b/\lambda)\sin\alpha]}{\sin^2[\pi(\Delta b/\lambda)\sin\alpha]} = I_0 \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2[\pi(b/\lambda)\sin\alpha]}{\sin^2[\pi\,(b/(N\lambda))\sin\alpha]}$$

Für $N \longrightarrow \infty$ geht $x/N = \pi\,(b/(N \cdot \lambda))\sin\alpha$ gegen Null, also erhalten wir für die Intensitätsverteilung

$$I(\alpha) \overset{N \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Beugung an mehreren Spalten



Was passiert nun, wenn die Blende mehrere Spalten aufweist? Links ist eine Situation mit zwei Spalten skizziert. Die von den beiden Blendenöffnungen ausgehenden Kugelwellen können nun verschiedene Phasenfronten (rot, blau) bilden, die in verschiedene wohldefinierte Richtungen laufen (rote, blaue Pfeile). Zwischen den Richtungen liegen Bereiche, in denen Wellentäler und -berge vermischt werden und folglich auch das Signal kleiner wird. Wir erwarten also, dass in einigen ausgezeichneten Richtungen mehr Licht auf einen Schirm fallen wird als in anderen.

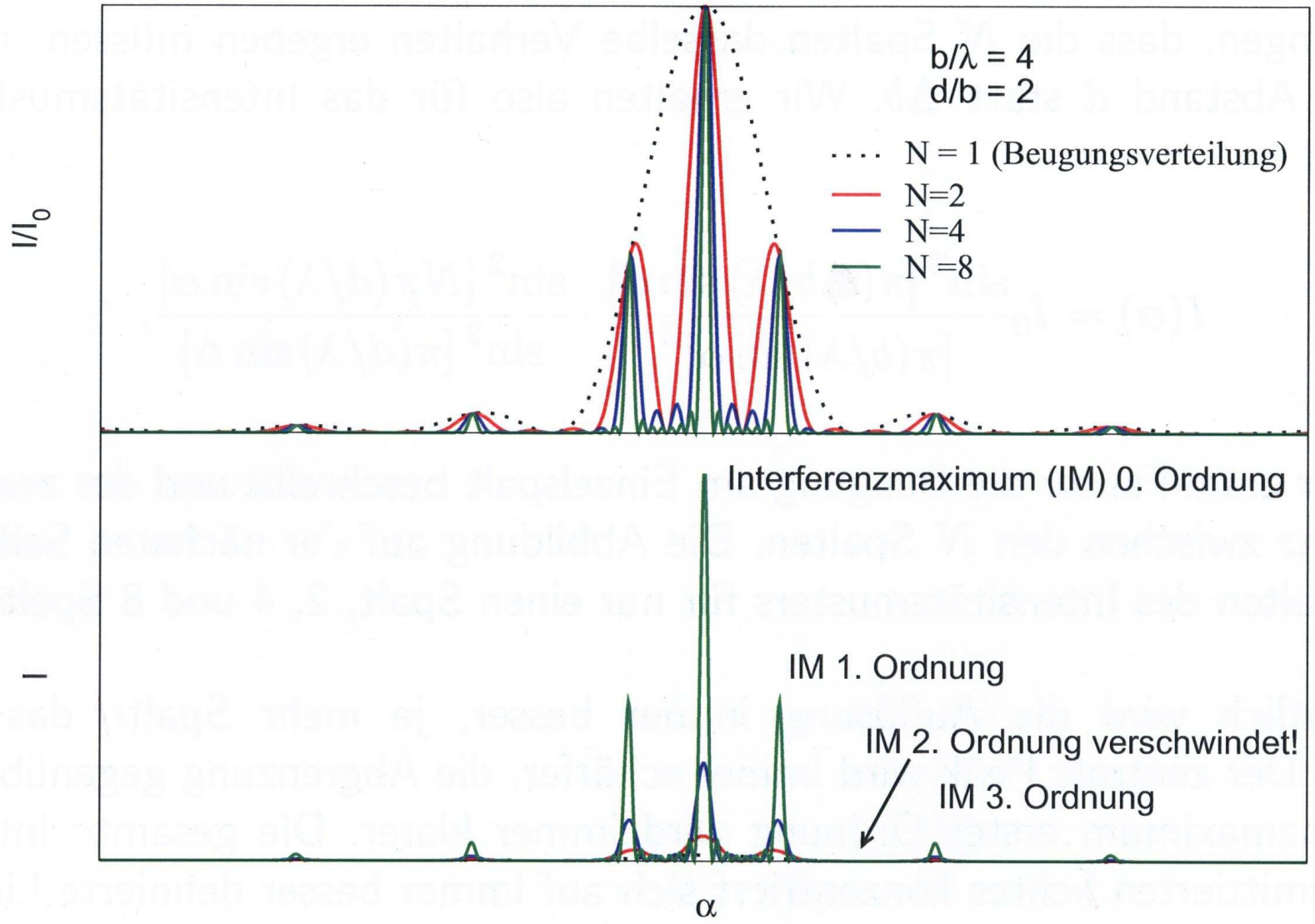
Zum Interferenzmuster der normalen Beugung am Spalt kommt also nun noch

ein Beitrag von der Interferenz der Beiträge der einzelnen Spalten dazu! Wenn ich jeden Spalt als ein Zentrum für Kugelwellen auffasse, dann ergeben die vorherigen Überlegungen, dass die N Spalten dasselbe Verhalten ergeben müssen, nur mit anderem Abstand d statt Δb. Wir erhalten also für das Intensitätsmuster den Ausdruck

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2[\pi(b/\lambda)\sin\alpha]}{[\pi(b/\lambda)\sin\alpha]^2} \cdot \frac{\sin^2[N\pi(d/\lambda)\sin\alpha]}{\sin^2[\pi(d/\lambda)\sin\alpha]},$$

wobei der erste Faktor die Beugung am Einzelspalt beschreibt und der zweite die Interferenz zwischen den N Spalten. Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt das Verhalten des Intensitätsmusters für nur einen Spalt, 2, 4 und 8 Spalten.

Offensichtlich wird die Auflösung immer besser, je mehr Spalten das Gitter aufweist. Der zentrale Peak wird immer schärfer, die Abgrenzung gegenüber dem Interferenzmaximum erster Ordnung wird immer klarer. Die gesamte Intensität des transmittierten Lichtes konzentriert sich auf immer besser definierte Linien.


b/λ = 4
d/b = 2
N = 1 (Beugungsverteilung)
N=2
N=4
N =8
I/I0
Interferenzmaximum (IM) 0. Ordnung
IM 1. Ordnung
IM 2. Ordnung verschwindet!
IM 3. Ordnung
I
α