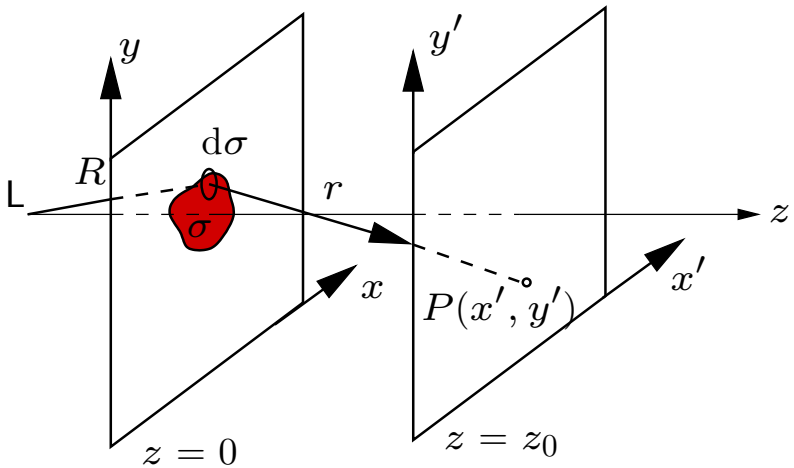
Das Beugungsintegral

Beugung kann natürlich nicht nur an Spalten auftreten, sondern an beliebigen Blendenöffnungen, ja sogar an Kanten undurchsichtiger Körper, z. B. am Mond! Die allgemeine Behandlung ist mathematisch etwas anspruchsvoller als die bisherige Behandlung, wir gehen hier nur auf die Grundgedanken ein.



Das Licht, welches auf die Blendenöffnung σ bei $z = 0$ fällt, habe die Amplitude $E_\sigma = E_0(x, y)e^{i\phi(x,y)}$. Von einem infinitesimalen Element $d\sigma$ werden nach Huygens Kugelwellen ausgesandt, die im Punkte $P(x', y')$

$$\mathrm{d}E_P = C\frac{E_\sigma \cdot d\sigma}{r}e^{-ikr}$$

beitragen, wo C ein Proportionalitätsfaktor ist. Die Beiträge aller $d\sigma$ addieren

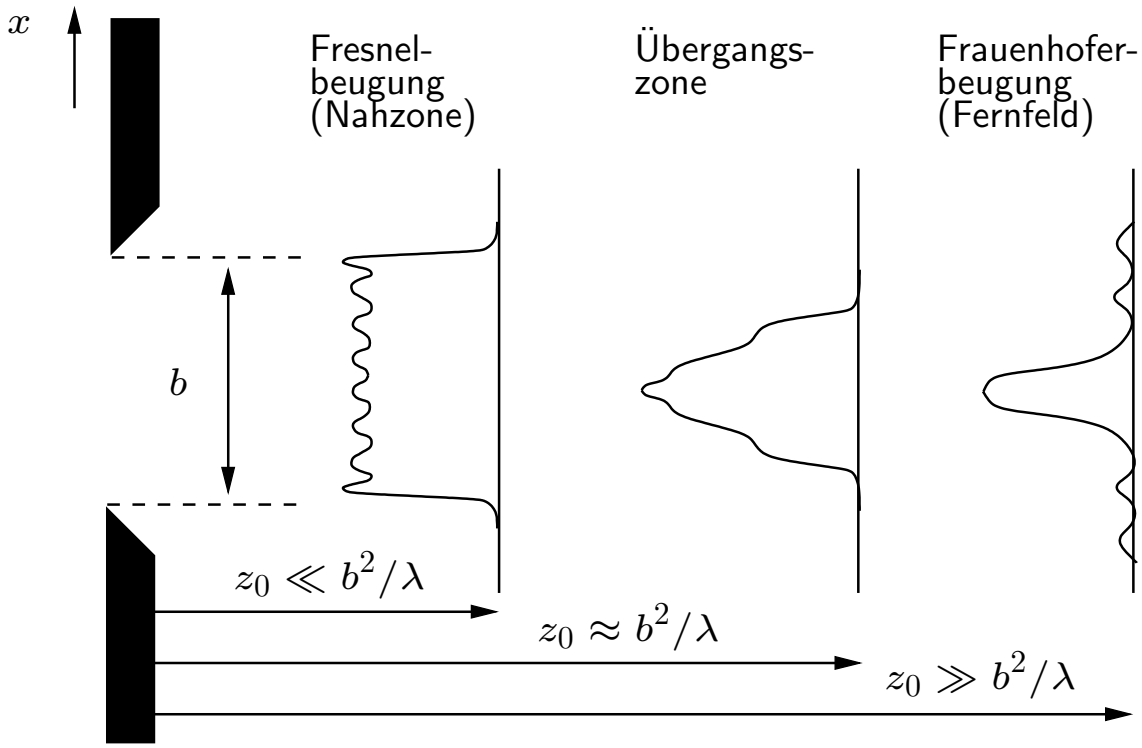
sich im Punkte P zur Totalamplitude:

$$E_P = \int\int C \cdot E_\sigma \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Dieses Integral heißt **Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral**. Es ist sehr allgemein anwendbar, die detaillierten Berechnungen sind allerdings oft nur numerisch möglich.

Trotzdem können wir zwei Näherungen (z_0 klein und z_0 groß) und zwei Beispiele (Lochblende, Kante) untersuchen.

Fresnelnäherung



Ist der Abstand r zwischen den einzelnen Punkten in der Blendenöffnung $\sigma(x, y)$ und dem Punkte $P(x', y')$ groß gegenüber den Abständen innerhalb der Blendenöffnung x, y, so kann man den Abstand im Nenner des Beugungsintegrals durch $r \approx z_0$ ersetzen. Im Exponenten aber können wir dies nicht tun, hier steckt ganz wesentliche Information drin! Die Phase ist ja entscheidend für die Bildung von Interferenz,

und steckt im Exponenten. Dort müssen wir uns also eine bessere Näherung leisten,

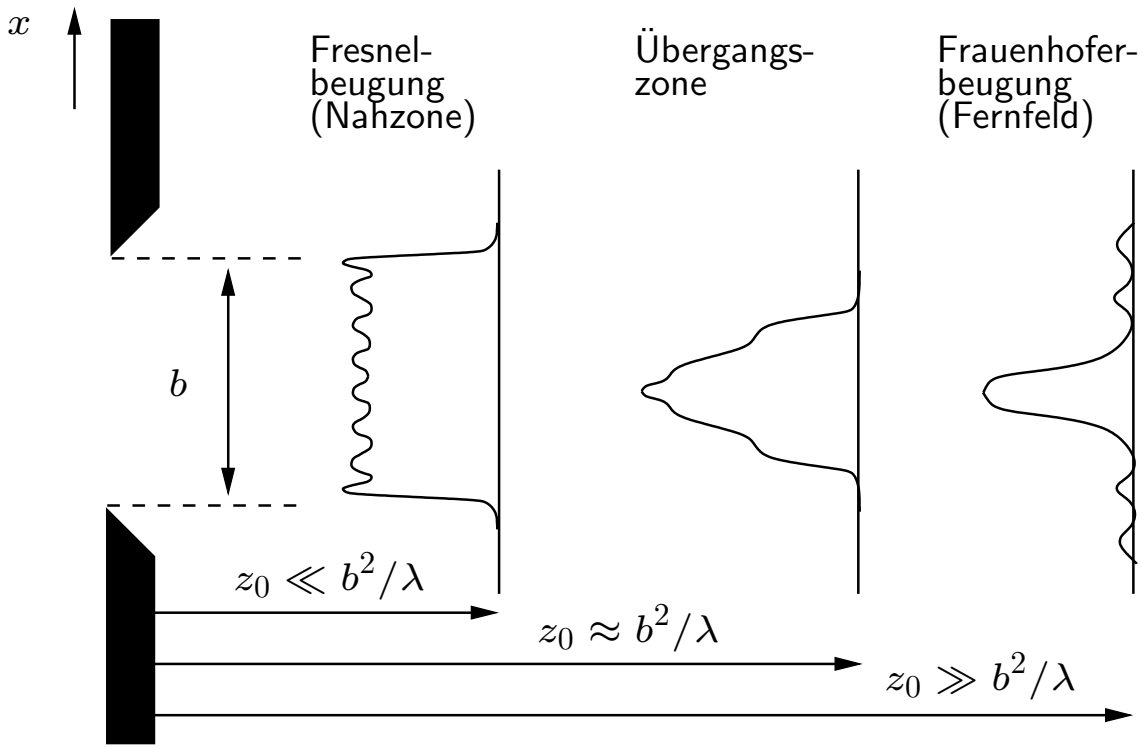
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z_0^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} \\ &= z_0 \left(1 + \frac{(x-x')^2}{2z_0^2} + \frac{(y-y')^2}{2z_0^2} + \dots\right). \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung der nicht angegebenen Terme dieser Taylorreihenentwicklung und unter Berücksichtigung von $C = 1/(i\lambda)$ (siehe z. B. Demtröder) wird das Beugungsintegral

$$E_P(x', y', z_0) = \frac{e^{-ikz_0}}{i\lambda z_0} \int_\infty \int_\infty E_\sigma(x, y) e^{\frac{-ik}{2z_0}\left((x-x')^2 + (y-y')^2\right)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Bei der Fresnelnäherung spielt die "Krümmung" der auslaufenden Wellenfront bei der Blendenöffnung σ eine wesentliche Rolle.

Fraunhoferbeugung



Sind die Abstände in der Blendenöffnung sehr klein gegenüber z_0, so können wir die Näherungen weiter vereinfachen. Ist $z_0 \gg \frac{1}{\lambda}(x^2+y^2)$, so sind die quadratischen Terme x^2 und y^2 vernachlässigbar, d. h. der Abstand im Exponenten vereinfacht sich zu

$$r \approx z_0 \left(1 + \frac{xx'}{z_0^2} + \frac{yy'}{z_0^2} + \frac{x'^2+y'^2}{2z_0^2}\right),$$

denn $e^{(x^2+y^2)/\lambda z_0} \approx 1$ nach

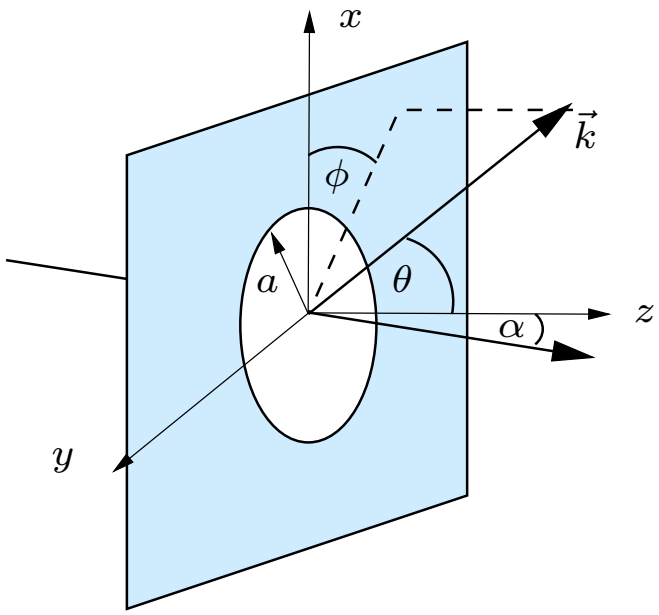
Voraussetzung. Weil das Integral über die Blendenöffnung läuft (also x und y), können wir die quadratischen Terme in x' und y' vor das Integral ziehen

$$E_P(x', y', z_0) = \frac{e^{-ikz_0}}{i\lambda z_0} e^{(\frac{i\pi}{\lambda z_0})\cdot(x'^2+y'^2)} \int_\infty^\infty \int_\infty^\infty E(x,y) \cdot e^{\frac{-ik}{z_0}(xx'+yy')} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Diese Näherung heißt **Fraunhoferbeugung**.

Kann der Exponent nicht linear geschrieben werden, ist also $z_0 \lesssim (x^2+y^2)/\lambda$, so nennt man die Erscheinung **Fresnelbeugung**.

Beugung an einer Lochblende

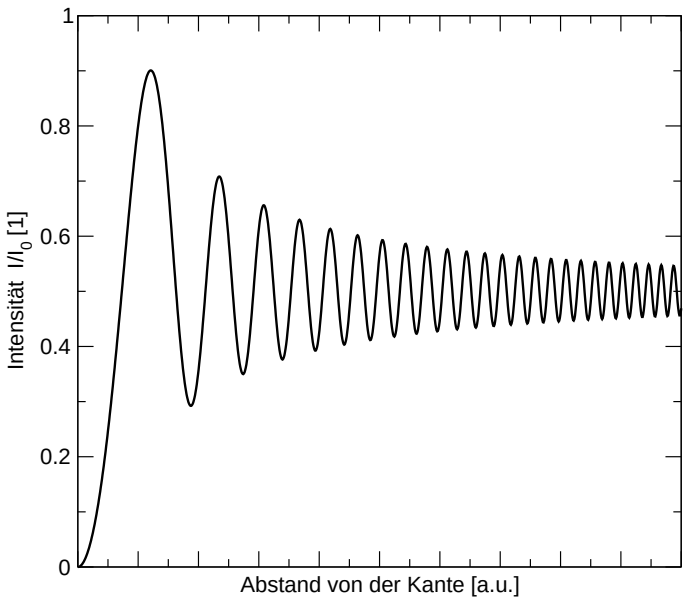


Die Beugung an einer Lochblende ist wohl physikalisch sehr einfach zu verstehen. Wir stellen uns einfach vor, der Spalt werde irgendwie zu einem Loch verformt, es ergibt sich ein kreissymmetrisches Beugungsbild. Die exakte Form aber ergibt sich nur durch sorgfältige mathematische Analyse. Man findet für die in ein Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ emittierte Leistung

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \propto \cos^2\alpha \left(\cos^2\theta + \cos^2\phi \sin^2\theta\right) \left|\frac{2J_1(ka\xi)}{ka\xi}\right|^2 ,$$

wo ξ eine Kombination der Winkelfunktionen von α, θ und ϕ ist und $J_1(x)$ eine sog. Besselfunktion erster Art der Ordnung 1 ist. Diese scheinbar einfache Anordnung ist also gar nicht so einfach!

Beugung an einer Kante



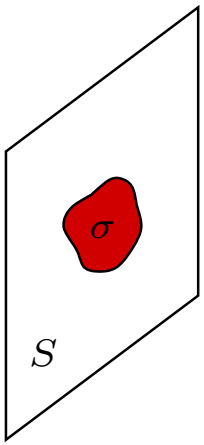
Die Beugung an einer Kante ist ein weiteres scheinbar einfaches Beispiel. Das Phänomen tritt z. B. auf, wenn ein Stern hinter dem Mond hervortritt bzw. verschwindet. Die Intensität des Lichtes oszilliert, weil sich das Beugungsmuster am Beobachter vorbeibewegt. Die Intensität ist durch die sog. Fresnelschen Integrale $S(x)$ und $C(x)$ gegeben,

$$I(x) = I_0 \cdot \left(C^2(x) + S^2(x)\right), \quad \text{wo}$$

$$C(x) \doteq \int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}\pi\xi^2\right) \mathrm{d}\xi \quad \text{und} \quad S(x) \doteq \int_0^x \sin\left(\frac{1}{2}\pi\xi^2\right) \mathrm{d}\xi.$$

Mehr Details dazu finden sich unter
`http://spiff.rit.edu/richmond/occult/bessel/bessel.html`.

Das Prinzip von Babinet



In der Diskussion des Beugungsintegrals haben wir gelernt, dass für das Beugungsmuster das Integral der Feldstärke über die Blendenöffnung entscheidend ist. Dies führt zu einer erstaunlichen Tatsache, dem **Prinzip von Babinet**. Hätte der Schirm S keine Öffnung σ, so würde kein Beugungsmuster entstehen. Die elektrische Feldstärke im Beugungsbild ist gegeben durch das Beugungsintegral über die Feldstärke in der Blendenöffnung. Die Feldstärke, die eine komplementäre Blendenöffnung $S \setminus \sigma = S \bigcap \overline{\sigma}$ (S weg σ) im Beugungsbild hervorruft, ist demnach gegeben durch das Beugungsintegral über die komplementäre Blendenöffnung $S \setminus \sigma$. Die Summe der beiden muss aber Null geben

$$E_{P\,\sigma} + E_{P\,S\setminus\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{P\,\sigma} = -E_{P\,S\setminus\sigma},$$

weil das Integral linear ist. Die Intensität im Beugungsbild ist aber durch das

Quadrat der Feldstärken gegeben und folglich

$$E^2_{P\,\sigma} = E^2_{P\,S\setminus\sigma} \quad \Rightarrow \quad I_{P\,\sigma} = I_{P\,S\setminus\sigma}.$$

Dieses **Prinzip von Babinet**, dass also eine Blendenöffnung und ihr Komplement das gleiche Beugungsmuster erzeugen, vereinfacht in vielen Fällen die Berechnung der durch Blenden entstehenden Beugungsmuster.

Intermezzo: Fourierreihen und -integrale

Das Konzept der Fourierreihen haben wir bereits in der Akustik kennen gelernt. Die Idee dabei ist, aus einem periodischen Signal alle vorkommenden Frequenzen herauszufiltern. Das im Intervall $0 \leq t \leq a$ stückweise glatte Signal $f(t)$ (d. h. sowohl f als auch $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ stückweise stetig) kann also aufgeteilt werden in seine **Fourierkoeffizienten** f_n

$$f_n \doteq \frac{1}{a} \int_0^a \mathrm{d}t \, e^{-in\frac{2\pi t}{a}} f(t).$$

Die Reihe

$$\overline{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\frac{2\pi t}{a}}$$

konvergiert dann für jeden Wert von t und definiert eine periodische Funktion

$$\overline{f}(t+a) = \overline{f}(t).$$

Die Identität von Parzeval

$$\frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{d}t\, f(t)g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, g_{n-1}.$$

Ist insbesondere $g = f^*$, so gilt

$$\frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{d}t\, |f(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 .$$

Ist $f(t)$ reell, dann gilt $f_n = f^*_{-n}$. Ist ferner $f(t)$ gerade ($f(t) = f(-t)$), periodisch und stetig, so ist $f_n = f_{-n}$ und die Fourierreihe reduziert sich auf eine Cosinusreihe

$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, 2\cos\left(n\frac{2\pi t}{a}\right).$$

Im ungeraden Fall gilt analog

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, 2i \sin\left(n \frac{2\pi t}{a}\right).$$

Korollar 1: Jede glatte Funktion $f(t)$ lässt sich auf dem Intervall $0 \leq t \leq b$ auch als Cosinusreihe darstellen.

Beweis: Erweitere die Definition von $f(t)$ vom Intervall $[0, b]$ mit $f(-t) = f(t)$ auf $[-b, b]$ und setze $f(t)$ mit $f(t + 2b) = f(t)$ periodisch fort. Somit:

$$\overline{f}(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, e^{in\frac{2\pi t}{a}}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(e^{in\frac{2\pi t}{a}} + e^{-in\frac{2\pi t}{a}} \right) \\
&= f_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\left(n\frac{2\pi t}{a} \right) \\
&= f_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos\left(n\frac{\pi t}{a} \right) \quad \text{QED.}
\end{aligned}
$$

Die Fouriertransformation

Für die Fouriertransformation verlangen wir nun nicht mehr, dass die Funktion auf ein Intervall begrenzt oder periodisch ist, sondern nur noch:

Sei $f(t)$ auf $-\infty \leq t \leq \infty$ stetig und habe stückweise stetige erste Ableitungen und verschwinde für $t \longrightarrow \pm\infty$ genügend rasch, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, |f(t)| \leq \infty, \quad \text{f(t) sei “betragsintegrierbar”.}$$

Dann ist die **Fouriertransformation** von $f(t)$ durch

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-i\omega t} f(t) \quad \text{definiert.}$$

Sie hat auch eine inverse Transformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega e^{ikt} \tilde{f}(\omega).$$

Die Identität von Parzeval für Fourierreihen gilt auch für die Fouriertransformation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t f(t) g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \tilde{f}[\omega] \tilde{g}(\omega)$$

und für $g = f^*$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega |\tilde{f}(\omega)|^2.$$

Fouriertransformierte in mehreren Dimensionen

Oft verwenden wir Funktionen in mehreren Dimensionen. Ist $\vec{x} \doteq (x_1, x_2, ..., x_d)$ und $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_d)$, so ist die Fouriertransformierte von $f(\vec{x})$ definiert durch

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int \mathrm{d}^d x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}).$$

Ist f betragsintegrierbar, so ist das obige Integral absolut konvergent. Ist $f(\vec{x})$ sogar stetig und in allen x_i beliebig oft differenzierbar, dann verschwindet $\tilde{f}(\vec{k})$ für $|\vec{k}| \longrightarrow \infty$ schneller als jede Potenz von $|\vec{k}|$ (d. h. $\lim_{|\vec{k}|\longrightarrow\infty} |k|^\alpha \tilde{f}(\vec{k}) = 0$ für alle α). Dann besitzt auch $\tilde{f}(\vec{k})$ eine Fouriertransformierte, es gilt der **Satz von Fourier**

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathrm{d}^d k \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}).$$

(Die Forderung der beliebig hohen stetigen Differenzierbarkeit ist nicht zwingend

notwendig). Auch für mehrdimensionale Fourierintegrale gilt die Identität von Parzeval, sofern die Integrale konvergieren.

Beispiel: Die Feldamplitude einer Lichtquelle klinge exponentiell ab, $E(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t)$. Wie lautet die Fouriertransformierte $\tilde{E}(\omega)$?

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(\omega) &= A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-i\omega t} e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) \\
&= \frac{A_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \left(e^{-i(\omega-\omega_0)-\gamma t} + e^{-i(\omega+\omega_0)-\gamma t} \right) \\
&= A_0 \left(\frac{1}{i(\omega-\omega_0)+\gamma} + \frac{1}{i(\omega+\omega_0)+\gamma} \right).
\end{aligned}$$

Die auftretenden Integrale sind oft kompliziert, darum gibt es umfangreiche Tabellenwerke mit Fouriertransformierten. Mathematische Programme wie Mathema-

tica oder Maple kennen diese Tabellen. Die Intensität der Fouriertransformierten lautet

$$I(\omega) = |\tilde{E}(\omega)|^2 = \frac{A_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2},$$

eine Resonanzkurve!

Fouriermethoden in der Beugung

Als Anwendung bestimmen wir das Beugungsmuster einer rechteckigen Blendenöffnung $\tau(x, y)$, wo $\tau = 1$ im Rechteck und $\tau = 0$ außerhalb. In der Fraunhofernäherung (Fraunhoferbeugung) lautet das Beugungsintegral

$$E_P(x', y', z_0) = \underbrace{\frac{e^{-ikz_0}}{i\lambda z_0} \cdot e^{\left(\frac{i\pi}{\lambda z_0}\right)\cdot(x'^2+y'^2)}}_{A(x',y',z_0)} \int_\infty^\infty \int_\infty^\infty E(x, y)\cdot\tau(x, y) e^{\frac{-ik}{z_0}(xx'+yy')} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

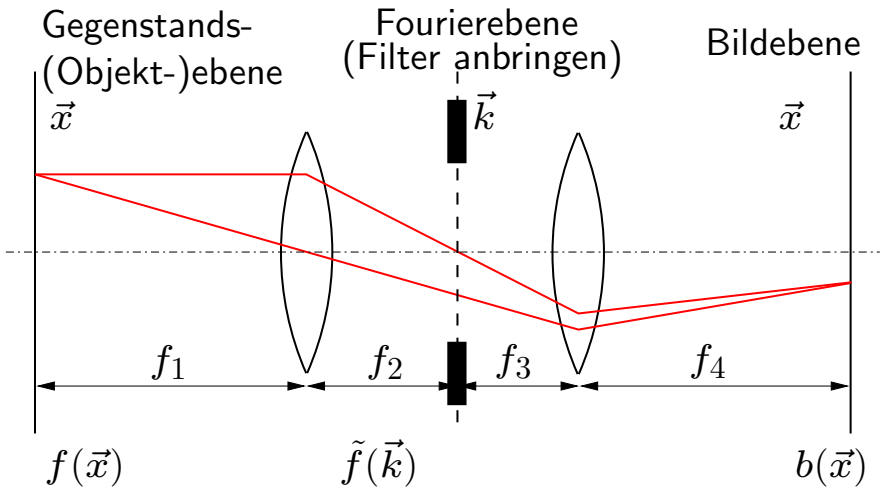
Dies ist aber nach den vorherigen Überlegungen gerade proportional zur Fouriertransformierte von $E(x, y) \cdot \tau(x, y)$, die Intensität (messbare Größe) ist dann gerade das Betragsquadrat davon. Das sagt uns auch, wegen der Identität von Parzeval, dass wir hinten auf dem Schirm nicht mehr Licht haben, als vorne durch die Blende kommt.

Wir hätten die Rechnung auch explizit durchführen können und dabei die Integrationsgrenzen $-\infty$ und ∞ in x und y Richtung durch die Grenzen des Rechtsecks ($-a/2, a/2$ und $-b/2, b/2$) ersetzen können. Die Rechnung ergibt

$$I(x', y') = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x' a}{\lambda z_0}\right)}{\left(\frac{\pi x' a}{\lambda z_0}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi y' b}{\lambda z_0}\right)}{\left(\frac{\pi y' b}{\lambda z_0}\right)^2},$$

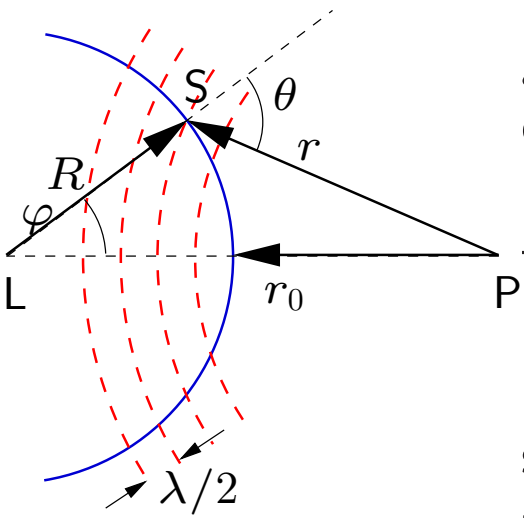
was der Überlagerung der Beugungsmuster von zwei Spalten mit Breiten a und b entspricht. Damit sehen wir, dass für die Fourieranalyse von eckigen Rechtecken (scharfen Kanten) hohe Frequenzen notwendig sind.

Fourieroptik



Die Eigenschaft des Beugungsintegral, die Fouriertransformierte des beugenden Objektes zu sein, kann man nun ausnutzen, um Bilder zu filtern. Bei der Abbildung eines Objektes entsteht in der **Fourierebene** der optischen Anordnung die Fouriertransformierte dessen. Hier können nun durch Einbringen von geeigneten Filtern oder Blenden bestimmte Frequenzen herausgefiltert werden. Regelmäßig auftretende Streifen auf zusammengesetzten Bildern oder "Sandkorn-Streifen" in Strandfotografien können so entfernt werden. Hoch-, Tief, oder Bandpassfilter können also auch auf Bilder angewendet werden! Die Abbildung zeigt einen Tiefpass womit körnige Strukturen in einem Bild entfernt ("verschmiert") werden. Als Hochpass würde eine Scheibe in der Mitte des Strahlengangs funktionieren.

Die Fresnelbeugung



Die im Punkte L ausgesandte Kugelwelle (blau, durchgezogene Kreislinie) sendet in jedem Punkt (z. B. S) wieder Kugelwellen aus, die sich im Punkt P überlagern. Die Abstände von Punkten entlang der von L ausgesandten Kugelwelle zum Punkt P sind als gestrichelte (rote) Kreislinie eingezeichnet. Die eingezeichneten Abstände von P aus unterscheiden sich je um $\lambda/2$ und begrenzen die sog. **Fresnelzonen**. Der Beitrag einer solchen Fresnelzone zur Amplitude (Feldstärke) im Punkt P ist also

$$\mathrm{d}E = K\frac{E_a}{r}e^{i(-k(R+r)+\omega t)}\mathrm{d}S,$$

wo $K = K(\theta)$ eine langsam veränderliche und über eine Fresnelzone etwa konstante Funktion ist, die die θ-Abhängigkeit der im Punkte S abgestrahlten Amplitude

angibt. Die Fläche einer Fresnelzone ergibt sich aus dem verallgemeinerten Satz von Pythagoras und seiner Ableitung nach φ,

$$r^2 = R^2 + r_0^2 - 2R(R + r_0)\cos\varphi, \quad \text{bzw.} \quad 2r\mathrm{d}r = 2R\,(R + r_0)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

Die Fläche einer Fresnelzone mit Radius $R\sin\varphi$ ist $\mathrm{d}S = 2\pi R\mathrm{d}\varphi \cdot R\sin\varphi$, was mit der obigen Überlegung die folgende Fläche ergibt

$$\mathrm{d}S = \frac{2\pi R}{R + r_0} r\mathrm{d}r.$$

Der Beitrag einer m-ten Fresnelzone im Abstand $r_m = r_0 + m \cdot \lambda/2$ ist dann

$$E_m = K_m \cdot E_a \cdot \frac{2\pi R}{R + r_0} \int_{r_{m-1}}^{r_m} \mathrm{d}r\; e^{-i(k(R+r)-\omega t)} = -\left[\frac{\lambda K_m E_a R}{i(R + r_0)} e^{-i(k(R+r)-\omega t)}\right]_{r_{m-1}}^{r_m}.$$

Mit $k = 2\pi/\lambda$ und $r_m = r_0 + m \cdot \lambda/2$ folgt aber

$$E_m = (-1)^{m+1} \frac{2\lambda K_m E_a R}{i(R + r_0)} e^{-i(k(R+r_0)-\omega t)},$$

d.h. die Beiträge E_m der einzelne Fresnelzonen wechseln ihr Vorzeichen von Zone zu Zone. Damit ist die Gesamtfeldstärke im Punkte P

$$E(P) = \sum_{m=1}^{N} = |E_1| - |E_2| + |E_3| - \ldots \pm |E_n|.$$

Weil sich aber K_m nur sehr langsam ändert, gilt auch $E_m \approx (1/2) \cdot (|E_{m-1}| + |E_{m+1}|)$, womit wir die obige Reihe gliedweise umstellen können

$$E(P) = \frac{1}{2}|E_1| + \left(\frac{1}{2}|E_1| - |E_2| + \frac{1}{2}|E_3|\right) + \left(\frac{1}{2}|E_3| - |E_4| + \frac{1}{2}|E_5|\right) + \ldots + \frac{1}{2}|E_N|.$$

Mit $E_m \approx (1/2) \cdot (|E_{m-1}| + |E_{m+1}|)$ folgt aber dann, dass $E(P) \approx (1/2)(|E_1| + |E_N|)$. Weil aber $K(\theta) \propto \cos\theta$, verschwindet der Term $|E_N|$ (tangential!) und folglich

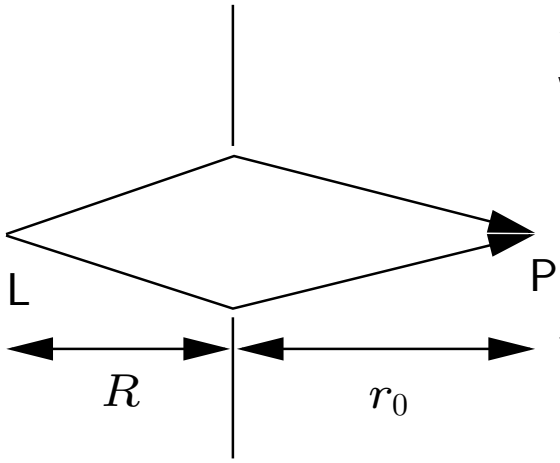
$$E(P) \approx \frac{1}{2}|E_1| = \frac{2\lambda K_1 E_a R}{i(R+r_0)} e^{-i(k(R+r_0)-\omega t)}.$$

Andererseits muss für die Primärwelle, die von L ausgeht auch gelten

$$E(P) = \frac{E_0}{R+r_0} e^{-(k(R+r_o)-\omega t)}, \quad \text{womit} \quad K_1 = \frac{i}{\lambda}.$$

Die Größe einer Fresnelzone kann durchaus makroskopisch sein. Nach der Definition einer Fresnelzone gilt

$$\rho \approx \sqrt{r^2 - r_0^2} = \sqrt{(r_0 + m \cdot (\lambda/2))^2 - r_0^2} \approx \sqrt{m r_0 \lambda} \quad \text{für} \quad r_0 \gg \lambda.$$



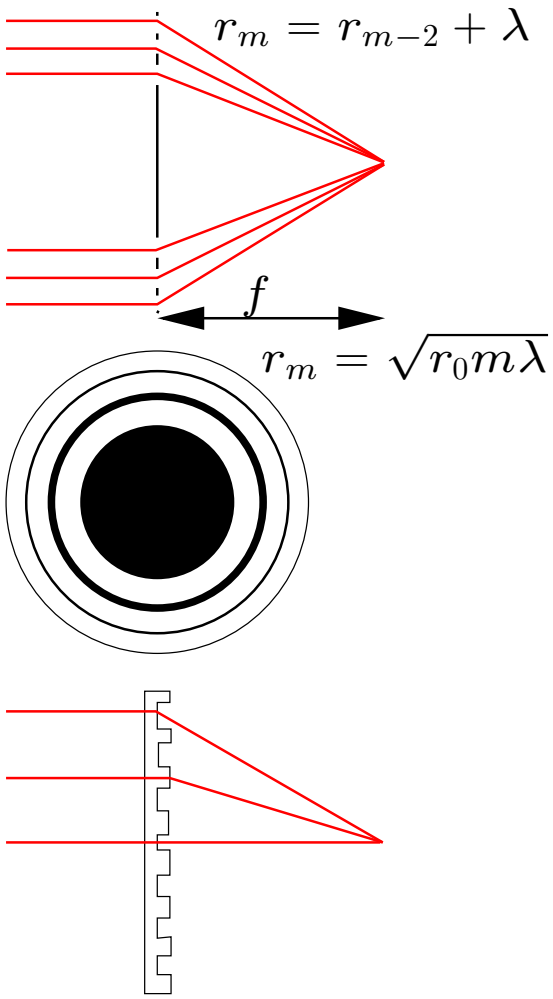
Soweit so gut, aber was bedeutet das Ganze? Setzen wir eine Blende in die Region der ersten Fresnelzone (Abb. links) so werden wir im Punkte P die Feldstärke

$$E(P) = |E_1| = \frac{2E_0}{R + r_0} e^{-(k(R+r_o)-\omega t)}, \quad \text{womit} \quad K_1 = \frac{i}{\lambda}$$

feststellen, welche doppelt so groß ist, wie sie ohne Schirm wäre. Die Intensität ist also viermal so groß! Dies kommt durch die Verhinderung der destruktiven Interferenz der anliegenden Fresnelzonen zustande. Die erste Fresnelzone wirkt wie eine Linse! Setzen wir statt der Blende in diese Region einen Schirm, so kommt genauso viel Licht an, wie ohne Hindernis.

Diese erstaunlichen Tatsachen belegen die Nützlichkeit des Prinzips von Huygens.

Die Fresnelsche Zonenplatte und Fresnellinse



Dieses Verhalten kann man ausnutzen, um mit einer planaren Anordnung möglichst viel Licht in einen Punkt P zu fokussieren. Dies geschieht mit einer sog. **Fresnelschen Zonenplatte**, deren Brennweite f von der Wellenlänge λ abhängt, nach den links gezeigten Verhältnissen also

$$f = \frac{r_m^2}{m\lambda} = \frac{r_1^2}{\lambda}.$$

Mit einer Fresnellinse kann noch mehr Licht gesammelt werden, weil keine Flächenabgedeckt werden, sondern durch eine Vertiefung (durch ätzen hervorgerufen) die erforderliche Phasenverschiebung erreicht wird.