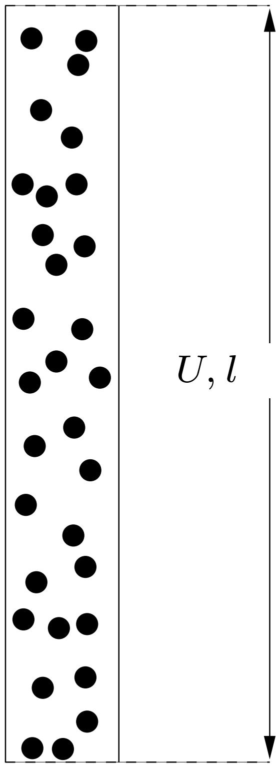
Der elektrische Strom



Legen wir über einen Leiter der Länge l eine Spannung U an, so wirkt darin ein elektrisches Feld. Je nach Natur des Leiters sind darin freie Elektronen, Ionen oder Elektron-Loch-Paare vorhanden, die durch das Feld beschleunigt werden. Nach einer kurzen Strecke stoßen sie aber immer wieder mit einem (relativ) immobilen Partner (Atomrümpfe im Festkörper und Halbleiter, langsame Ionen in elektrolytischen Lösungen) zusammen, wodurch ihre Bewegung einen zufälligen Charakter annimmt ("random walk", siehe Thermodynamik), der hier mit einer systematischen Driftbewegung überlagert wird. Netto wird so Ladung transportiert, es fließt ein **Strom** I.

$$I \doteq \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = \text{Ladung pro Zeit.}$$

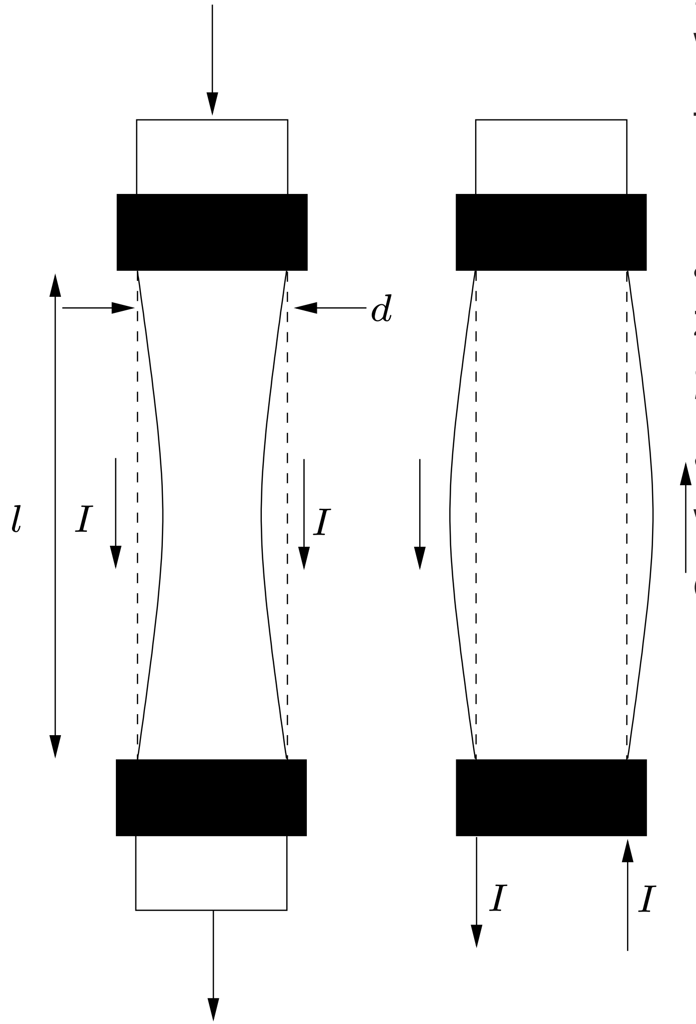
Die Stromstärke I wird in der SI-Basiseinheit Ampère A gemessen,

$$[I] = 1 \text{ Ampère} = 1\mathrm{A}.$$

Wir werden später sehen, dass die mit dem Strom verbundene Geschwindigkeit der Bewegung sehr langsam ist. Vorerst sei dies nur als Übung formuliert.

Übung: Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Elektronen in einem Kupferdraht mit Querschnittsfläche 1 mm^2. Die Dichte der Elektronen betrage 13.5 mm^{-3}, der Strom 1.35 A. Wieso leuchtet die Glühlampe trotzdem "sofort" auf?

Definition des Ampères



Zur Definition des Ampères brauchen wir eigentlich Wissen, welches wir erst nächste Woche bearbeiten werden. Wir führen das Ampère deshalb rein phänomenologisch ein. Im Anschluss an Entdeckungen von Oerstedt hat Ampère bemerkt, dass sich zwei stromdurchflossene Drähte anziehen, wenn der Strom in ihnen parallel fließt, und sich gegenseitig abstoßen, wenn er antiparallel fließt. Quantitativ wurde bei den schwierigen Messungen herausgefunden, dass für die Kraft gilt:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}.$$

Die Größe μ_0 ist heute definiert als

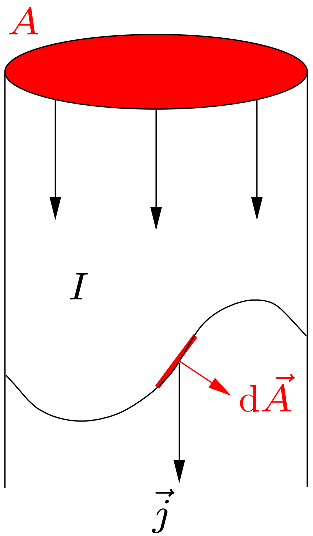
$$\mu_0 \doteq 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N\ A}^{-2}.$$

Damit wird das **Ampère** definiert:

> "Das Ampère ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 m voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigt kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je Meter Leiterlänge die Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde."

9. Generalkonferenz für Maß und Gewicht, 1948

Stromdichte



Als **Stromdichte** $\vec{j}$ wird der Strom definiert, der durch eine Einheitsquerschnittsfläche senkrecht zu $\vec{j}$ fließt.

$$I = \int_A \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

über die gesamte Querschnittsfläche A. Als Übervereinfachung stellt man sich oft vor, dass sich die n Ladungen q pro Volumeneinheit mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ in eine Richtung bewegen. Damit fließen in einem Zeitintervall Δt alle Ladungen des Volumens $V = \vec{A} \cdot \vec{v}\Delta t$ durch den Querschnitt $\vec{A}$. Damit wird

$$I = nq\vec{A} \cdot \vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{j} = nq\vec{v}.$$

Mit der Ladungsdichte $\rho = nq$ wird dies zu

$$\vec{j} \doteq \rho \vec{v}.$$

Sind im Leiter negative und positive Ladungsträger vorhanden, so addieren sich deren Ladungsdichten, $\rho = \rho^+ + \rho^- = n^+q^+ + n^-q^-$ und die Stromdichte wird dann

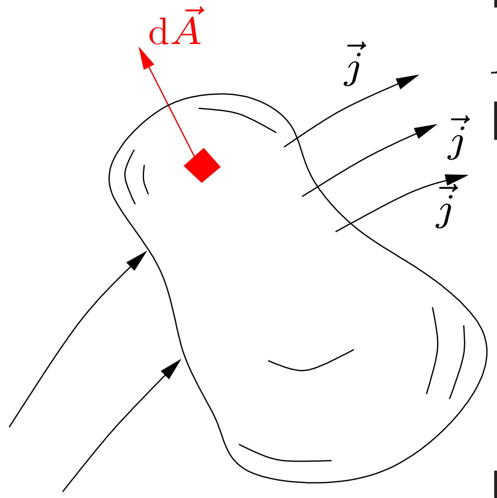
$$\vec{j} = n^+q^+\vec{v}^+ + n^-q^-\vec{v}^-.$$

Tragen die Ladungsträger dieselben, aber entgegengesetzte Ladungen, $q^+ = -q^- = -e$, so gilt oft, wegen der Quasineutralität,

$$\vec{j} = en\left(\vec{v}^+ - \vec{v}^-\right).$$

Anmerkung: Der "technische" Strom fließt von positiv nach negativ (Definition!), auch wenn wir heute wissen, dass die Elektronen umgekehrt fließen.

Die Kontinuitätsgleichung



Der durch eine geschlossene Oberfläche $\vec{A}$ fließende Strom I muss gleich der zeitlichen Änderung der darin enthaltenen Ladungen sein.

$$I = \oint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \rho \mathrm{d}V.$$

Übung: Ändert sich in der Skizze links die Ladung im Innern der "Kartoffel"?

Mit dem Satz von Gauss schreiben wir dies um:

$$\oint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \, \mathrm{d}V.$$

Dieser Sachverhalt muss in jedem Volumenelement gelten und folglich gilt die sog. **Kontinuitätsgleichung** für den elektrischen Strom:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}, t).$$

Dies wird oft noch knapper geschrieben:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\dot{\rho}.}$$

Elektrischer Widerstand und das Ohm'sche Gesetz

Die Stöße der Ladungsträger im Leiter unterbrechen deren freie Bewegung immer wieder. Deren Geschwindigkeit wird deshalb im Mittel $\langle\vec{v}\rangle = a\tau = \vec{F}/m\tau$ sein, wo τ die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen bedeutet, $\tau = \lambda/\bar{v}$, siehe Vorlesung Physik I. Die auftretende Kraft ist natürlich gerade $\vec{F} = q\vec{E}$. Wir setzen dies in $\vec{j} = n\ q\ \vec{v}$ ein,

$$\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E} \doteq \sigma\vec{E},$$

wo die Größe σ die **elektrische Leitfähigkeit** bedeutet. Sie hängt vom Material ab (Dichte und Masse der Ladungsträger, Stoßfrequenz!). Die soeben gefundene Beziehung ist das **Ohm'sche Gesetz** in differentieller Form

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

Die Wirkung der Stöße kann auch durch eine "Reibungskraft" beschrieben werden.

Für sie muss dann gelten:

$$\vec{F}_R + q \cdot \vec{E} = 0$$

bei einer mittleren Driftgeschwindigkeit $\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_D$. Reibungskräfte sind bei kleinen Geschwindigkeiten proportional zur Geschwindigkeit $\vec{v}_D$.

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= n\ q\ \vec{v}_D = \sigma \vec{E} \ \text{ also} \\
\vec{E} &= \frac{n\ q}{\sigma} \ \text{ in Glg. f. } \vec{F}_R \text{ einsetzen} \\
\vec{F}_R &= -\frac{n\ q^2}{\sigma} \vec{v}_D.
\end{aligned}$$

Die Größe $u = \frac{\sigma}{n\ q}$ heißt **Beweglichkeit** und gibt die Geschwindigkeit der Ladungsträger an bei einem elektrischen Feld von 1 V/m.

Das Ohm'sche Gesetz II

Wir wollen nun das Ohm'sche Gesetz in integraler Form schreiben. Dazu nehmen wir uns einen homogenen Leiter mit Querschnitt A und Länge L her. Ferner wissen wir, dass

$$U = \int E \, \mathrm{d}L = E \cdot L.$$

Mit

$$I = \int \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = j \cdot A$$

und dem Ohmschen Gesetz $j = \sigma E$ finden wir nun

$$I = \frac{\sigma \ A}{L} U.$$

Der von der Form und dem Material des Leiters abhängige Term $R = L/(\sigma \ A)$ heißt **elektrischer Widerstand** des Leiters. Die von der Geometrie des Leiters unabhängige Größe $\rho_S = 1/\sigma$ ist der **spezifische Widerstand** des Leitermaterials. Die Einheit des Widerstands ist das **Ohm**

$$[R] = \left[\frac{U}{I}\right] = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ampère}} = 1 \text{ Ohm} = 1\Omega.$$

Der spezifische Widerstand hat die etwas gewöhnungsbedürftige Einheit Ωm, Ohm mal Meter, was den Widerstand eines Würfels mit Kantenlänge 1 m des Leitermaterials angibt. Weil man es selten mit solchen Leitern zu tun hat, verwendet man oft auch die handlichere Einheit Ω mm^2/m $= 10^{-6}\Omega$m, welche den Widerstand eines Leiters mit 1 mm^2 Querschnitt und 1 m Länge angibt.

Das Ohm'sche Gesetz III

Das Ohm'sche Gesetz wird sehr oft auch so geschrieben:

$$U = R \cdot I,$$

was mich als Schweizer natürlich besonders freut[1]. Dies sollte aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass bei weitem nicht alle Leiter das Ohm'sche Gesetz in dieser Form erfüllen. Nur eine ganz bestimmte Klasse, die sog. Ohmschen Leiter, weisen einen Widerstand auf, der über weite Bereiche vom Strom oder von der Spannung unabhängig ist. Ob der Leiter Ohmsch ist, kann durch Ausmessen der sog. Kennlinie des Leiters (bzw. des Widerstands) verifiziert werden.

[1] Uri ist einer der drei Schweizer Urkantone Uri, Schwyz und Nidwalden.

Temperaturabhängigkeit

Die Stöße der Ladungsträger mit den Atomen des Kristallgitters führen zu Schwingungen des Gitters (Phononen) und damit zu einem Energieverlust der Ladungsträger. Bei höherer Temperatur wird die thermische Energie der Elektronen größer, gleichzeitig aber auch die Wahrscheinlichkeit, dem Gitter Energie abzugeben. Deshalb nimmt die mittlere freie Weglänge der Elektronen ab und folglich nimmt auch die elektrische Leitfähigkeit ab, der elektrische Widerstand steigt mit der Temperatur.

$$\rho_S(T) = \rho_S(T_0)\ \ [1\ +\ \alpha\ \ (T - T_0)]\,.$$

Diese lineare Beziehung gilt über weite Temperaturbereiche. Reine Metalle haben α-Werte zwischen 0,004 und 0,006 K^{-1}, Legierungen wie Konstantan $\alpha \sim 0,00003\mathrm{K}^{-1}$ und Graphit ein α von $-0,0002\mathrm{K}^{-1}$.

Joulsche Wärme und elektrische Leistung

Das Verschieben einer Ladung q von einem Ort mit Potential φ_A zu einem Ort mit Potential φ_B kostet Arbeit

$$W = q\ (\varphi_A - \varphi_2) = q \cdot U,$$

welche je nach Potential und Ladung positiv oder negativ ist. Wir haben gesehen, dass zwischen den beiden Enden eines Leiters die Spannung U liegt. Dann beträgt die Arbeit, um einen Ladungsträger vom einem Ende zum anderen zu bringen, $W = qU$. Diese Arbeit wird freigesetzt und durch Stöße (Reibung) an den Leiter abgegeben, der sich erwärmt. Die Leistung ist Arbeit pro Zeit, bei zeitlich konstanter Spannung U ist also

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = U\ \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = U \cdot I, \quad \text{also} \quad P = U \cdot I.$$

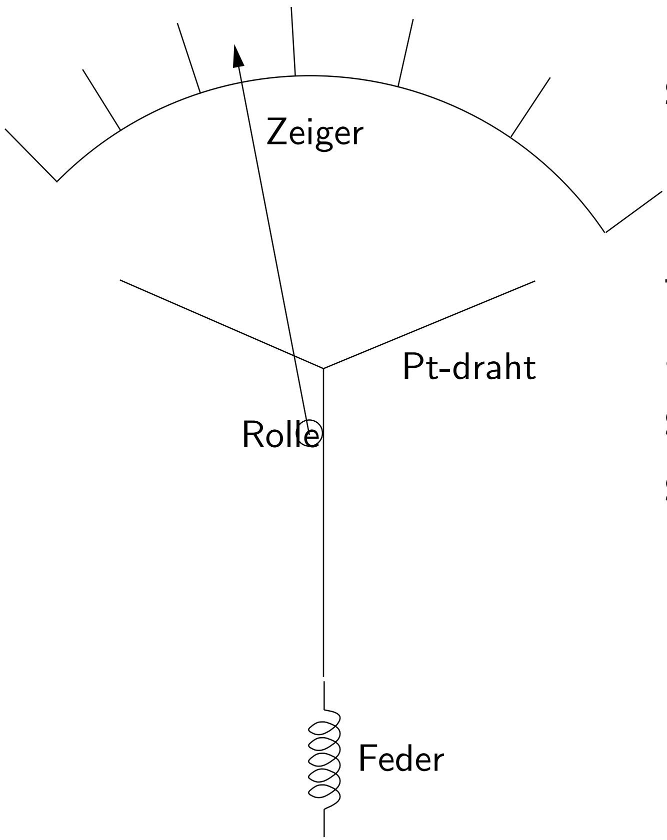
Die Einheit der Leistung ist (immer noch) das Watt,

$$[P] = 1\mathrm{V} \cdot \mathrm{A} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{A\,s}}\mathrm{A} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}.$$

Für Ohmsche Leiter können wir $P = U \cdot I$ wegen $U = R \cdot I$ auch anders schreiben:

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}.$$

Die Eigenschaft $P = U^2/R$ führt bei Anwendungen konstanter Spannung mit Bauteilen mit negativem Temperaturkoeffizienten zu potentiell gefährlichen "Run-away" Situationen, in denen der Widerstand sinkt, die Leistung also größer, die Temperatur höher, der Widerstand kleiner werden und die Anordnung schließlich instabil werden kann. Eine Stabilisierung tritt nur ein, wenn die Wärme schnell genug abgestrahlt (σT^4) oder durch die Leitungen abgeführt werden kann.



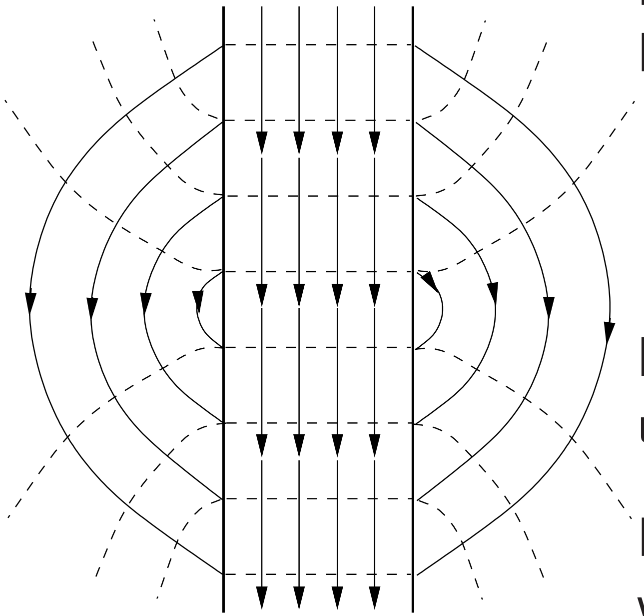
Die Ausdehnung eines Platinleiters durch die Joulsche Erwärmung wird in (heute nicht mehr gebräuchlichen) Hitzdrahtinstrumenten ausgenutzt. Der Pt-Draht wird mit einer Feder immer gespannt gehalten, die Kontraktion der Feder wird über eine Rolle abgenommen und angezeigt. Der Vorteil dieser Instrumente liegt darin, dass sie nur auf I^2 empfindlich sind und deshalb das Vorzeichen des Stroms keine Rolle spielt.

Glühbirne und Halogenlampe

Die Erwärmung eines Drahtes wird in der Glühbirne zur Lichterzeugung ausgenutzt. Dabei wird die Wolfram-Wendel sehr heiß, sie erreicht ca. 2600 K. Dabei verdampft ein Teil davon und setzt sich an der kühleren Glaswand ab. Dadurch verdünnt sich der Draht zunehmend. Um die Verdampfung zu verringern, wird heute ein Füllgas (Krypton) beigegeben. Die Lebensdauer könnte dramatisch verlängert werden, wenn die Wendeln weniger heiß betrieben würden, was wegen des Wienschen Verschiebungsgesetzes aber unerwünscht ist.

Bei den viel kleineren Halogenlampen wird als Füllgas Iod oder Brom (Halogene) verwendet. Das verdampfende Wolfram verbindet sich an der kühleren Wand mit dem Halogen und wird flüchtig. Es diffundiert durch die Lampe, ein Teil trifft auf die Wendel, wo die Verbindung dissoziiert und das Wolfram zurückbleibt. Dadurch ist es möglich, die Lampen länger leben zu lassen oder sie heißer, und deshalb auch näher am weißen Licht, zu betreiben.

Das elektrische Feld entlang eines Leiters



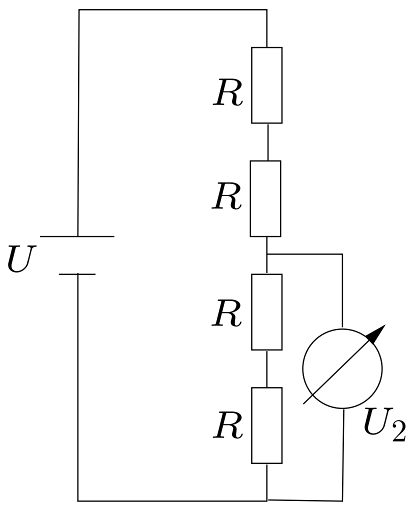
Entlang eines stromdurchflossenen Leiters kann das Potential nicht mehr konstant sein.

$$U(x) = \varphi_A - \varphi(x) = R \cdot I \cdot \frac{x}{L}.$$

In der Skizze nebenan sind Feldlinien durchgezogen und Äquipotentialflächen(-linien) gestrichelt.

Die Veränderung des Potentials entlang von Leitern wird zur Bildung von Spannungsteilern benutzt.

Der Spannungsteiler



Wir können uns einen Leiter vorstellen als eine Serie von lauter kleinen identischen Widerständen. Weil das Potential ja vom Ort abhängt,

$$U(x) = \varphi_A - \varphi(x) = R \cdot I \cdot \frac{x}{L},$$

können wir, bei gegebener Gesamtspannung U entlang des Leiters, jede beliebige Spannung $U_2 < U$ abgreifen.

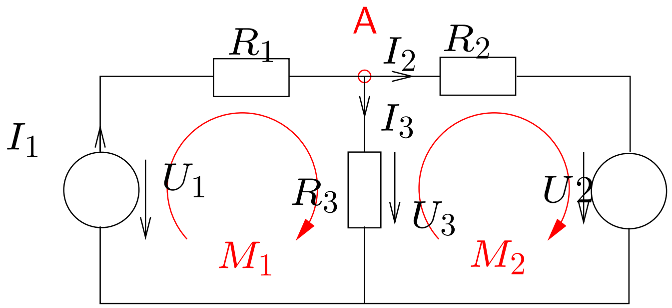
Netzwerke: Kirchhoffsche Regeln

Das Verhalten von Stromkreisen kann man auch etwas allgemeiner behandeln, was vor allem bei komplizierten Netzwerken sehr nützlich ist. Dabei spielen 2 Regeln eine Rolle, welche nach Kirchhoff benannt sind, **die Kirchhoffschen Sätze**. Ihre Anwendung führt zu einem System von Gleichungen, mit dem alle auftretenden Ströme und Spannungen berechnet werden können. Kirchhoff hat die beiden Regeln als Student im Anschluss an eine Seminaraufgabe angegeben:

1: **Knotenregel:** Die Summe aller in einem Punkt zusammenlaufenden Ströme verschwindet, $\sum I_k = 0$.

2: **Maschenregel:** Die Summe aller Spannungen entlang einer Masche verschwindet, $\sum U_k = 0$.

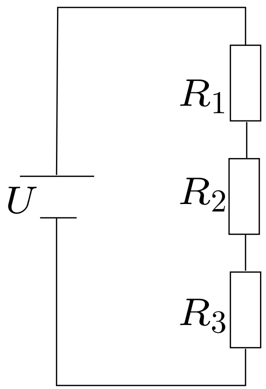
Ein Beispiel



Im Netzwerk links treten drei Spannungen und drei Ströme auf, linear unabhängige Gleichungen gibt es für den Knoten A und die Maschen M_1 und M_2. Die Gleichungen für den Knoten unterhalb von A und für die Gesamtmasche sind nicht linear unabhängig von den anderen drei Gleichungen. Drei Unbekannte, drei linear unabhänige Gleichungen.

$$
\begin{aligned}
A: &\qquad I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\
M_1: &\qquad R_1\ I_1 + R_3\ I_3 - U_1 = 0 \\
M_2: &\qquad R_2\ I_2 + U_2 - R_3\ I_3 = 0
\end{aligned}
$$

Reihenschaltung von Widerständen



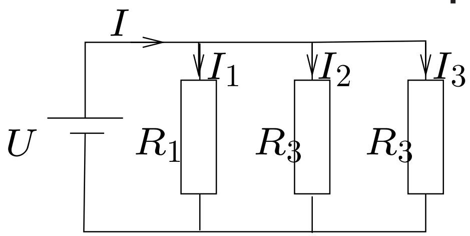
In diesem Beispiel sagen die Kirchhoffschen Regeln, dass $U = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3)$, was impliziert, dass der Gesamtwiderstand der Anordnung

$$R = R_1 + R_2 + R_3,$$

oder allgemein für in Serie geschaltete Widerstände:

$$R = \sum_i = R_i.$$

Parallelschaltung von Widerständen



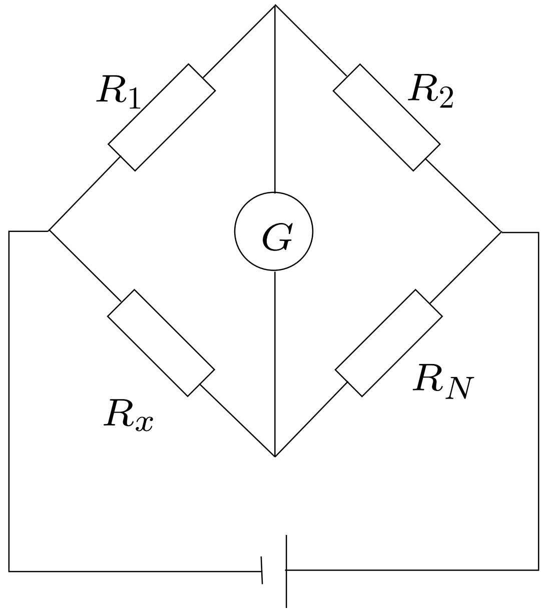
Hier gilt offensichtlich:

$$\frac{U}{R} = I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

und folglich muss für parallel geschaltete Widerstände gelten:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

Wheatstonesche Brücke

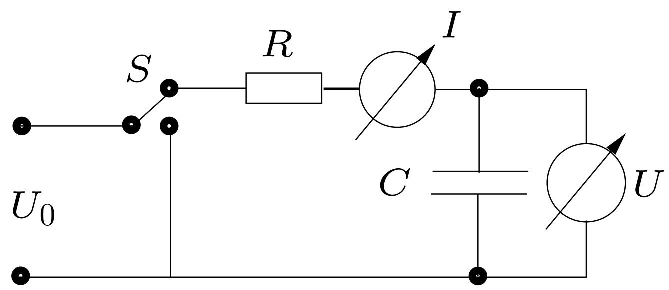


Ein unbekannter Widerstand R_x kann mit Hilfe einer Wheatstoneschen Brücke sehr genau vermessen werden. Dazu braucht es zwei bekannte Widerstände R_1 und R_2 (oft die zwei Hälften eines Widerstandsdrahtes) und einen variablen Widerstand R_N. Dieser wird variiert, bis über die Brücke G kein Strom mehr fließt bzw. über der Brücke keine Spannung herrscht.

Übung: Zeigen Sie, dass der unbekannte Widerstand

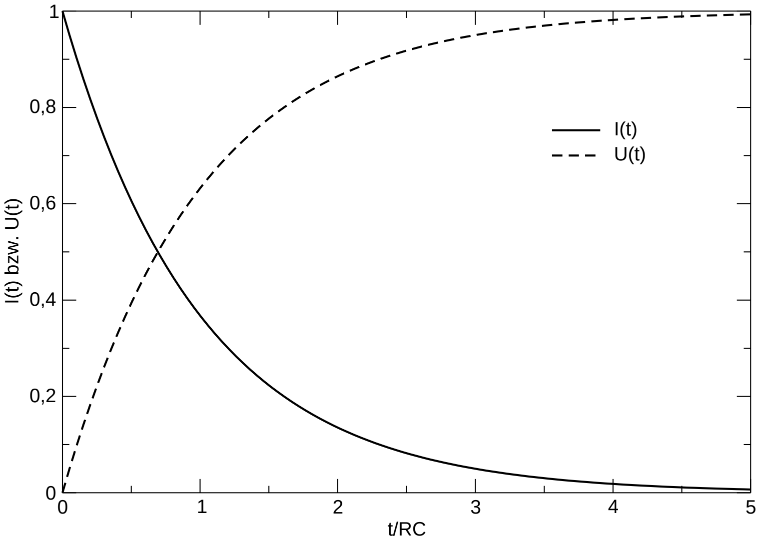
$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_N.$$

Aufladung eines Kondensators



Wir betrachten nun eine Kombination eines Kondensators mit einem Widerstand. Ein Kondensator der Kapazität C wird durch eine Spannungsquelle U_0 über einen Widerstand R aufgeladen. Die Spannung am Kondensator ist proportional zum Zeitintegral des Aufladestroms $I(t)$. Ferner gilt nach der Maschenregel:

$$U_0 = U_R(t)R + U_C(t)R = I(t) \cdot R \; + \; \frac{1}{C}\int I(t)\ \mathrm{d}t,$$

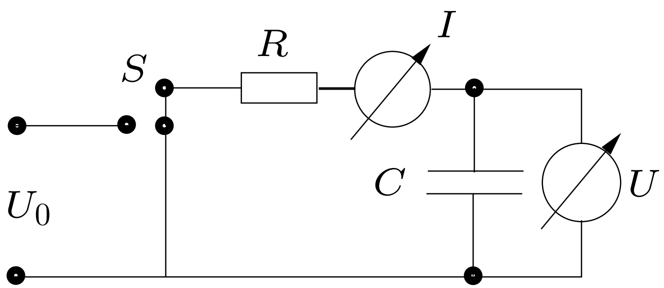


und nach Division durch R

$$\begin{aligned}
\frac{U_0}{R} &= \frac{U_R(t)}{R} + \frac{U_C(t)}{R}, \\
&= I(t) \; + \; \frac{1}{R\,C} \int I(t)\,\mathrm{d}t, \; \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right. \\
\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{R\,C} \cdot I(t), \\
I(t) &= I_0 \cdot e^{-t/(R\cdot C)}, \\
U_C(t) &= U_0 \cdot \left(1 \; - \; e^{-t/(R\cdot C)}\right).
\end{aligned}$$

Das RC-Glied heißt oft auch so und hat die Einheit einer Zeit.

Entladen eines Kondensators



Nun wird der Schalter S umgekippt und der Kondensator entladen. Dabei müssen alle Ladungen Q des Kondensators als Strom abfließen,

$$I(t) = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{U(t)}{R}.$$

Wir integrieren nach der Zeit und erhalten

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \cdot e^{-t/(R \cdot C)}, \quad \text{bzw.} \\ I(t) &= I_0 \cdot e^{-t/(R \cdot C)}. \end{aligned}$$