Verknüpfungen zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$

Ein Verständnis für die Verbindung von Elektrizität und Magnetismus kam, wie wir schon festgestellt haben, erst sehr spät. Obwohl eine statische Ladungsverteilung ein elektrisches Feld hervorruft, findet man damit kein magnetisches Feld. Es kam völlig unerwartet, als Oerstedt berichtete, dass der **Strom** ein Magnetfeld hervorruft!

In Analogie zur elektrischen Influenz wurde nun vermutet, dass ein kontinuierlicher Strom in einem Leiter einen zweiten kontinuierlichen Strom in einem parallelen Leiter hervorrufen könnte. Dieser Strom wurde nie gefunden.

Wieder kam es völlig unerwartet, als Faraday am 29. August 1831 entdeckte, dass **veränderliche Magnetfelder** elektrische Ströme hervorrufen können.

Rekapitulation statischer Felder

Bei statischen elektrischen und magnetischen Feldern hatten wir eine seltsame Asymmetrie (und doch eine Art Symmetrie) der Feldgleichungen festgestellt:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \cdot \vec{j}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

Ferner konnten sowohl $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch ein Potential ausgedruckt werden.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \phi, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

und die Verbindung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern findet durch das Ohmsche Gesetz statt:

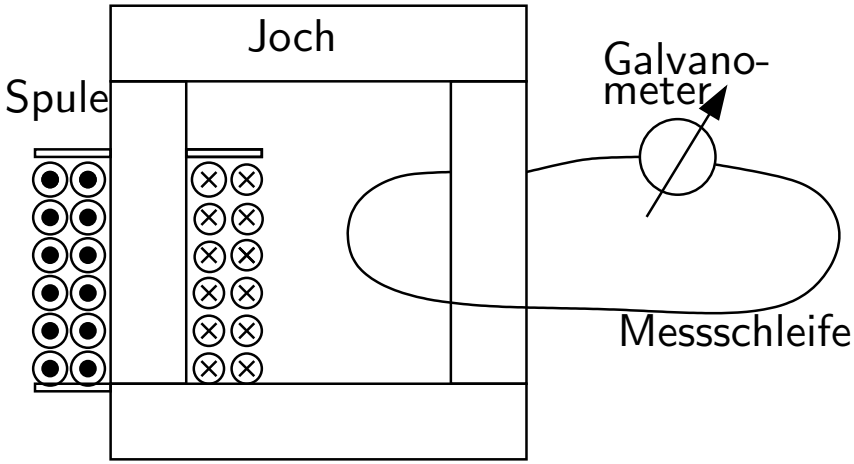
$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}, \quad \text{sowie} \quad \varepsilon_0 \cdot \mu_0 = 1/c^2.$$

Zeitlich veränderliche elektrische und magnetische Felder

Der enge Zusammenhang zwischen magnetischen und elektrischen Feldern wird bald noch offensichtlicher werden. Wir werden bald sehen, dass zeitlich veränderliche Magnetfelder elektrische Felder erzeugen und umgekehrt. Dieser Zusammenhang wird später mit den sog. Maxwellgleichungen deutlich werden.

Was passiert nun, wenn sich die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zeitlich verändern? Dabei untersuchen wir vorerst langsame Änderungen, in denen die Zeitskala T der Veränderungen von ρ und $\vec{j}$ langsamer (größer) ist als die Zeit, die das Licht braucht, um die Ladungs- oder Stromdichteverteilung zu durchqueren.

Das Faradaysche Induktionsgesetz

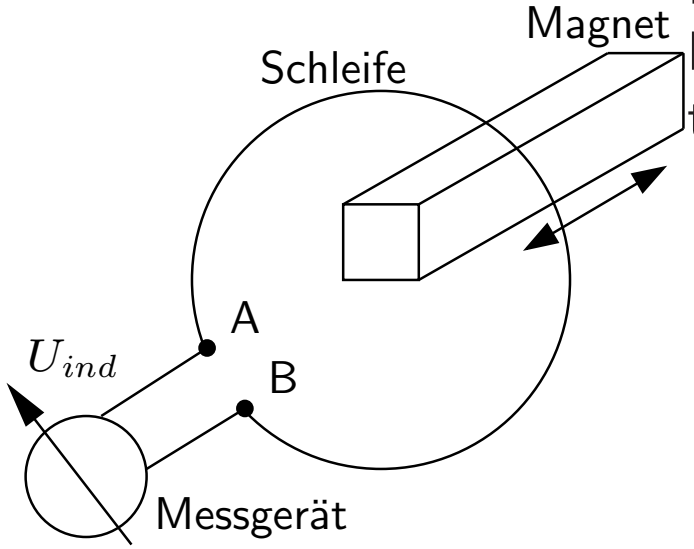


Die Entdeckung von Faraday ist heute eine Selbstverständlichkeit, zu ihrer Zeit muss sie für enormen Wirbel gesorgt haben. Heute gilt sie als epochal. Dank ihr ist es möglich, durch Bewegung Strom zu erzeugen, also mit Motoren potentielle, fossile, erneuerbare, Wind-, Gezeiten-, etc. Energie in Strom umzuwandeln.

Faraday entdeckte bei seinen Versuchen, dass beim Ein- und Ausschalten des Spulenstroms in der Messschleife ein Strom floss. Heute nennt man diese Anordnung Transformator.

Das Faradaysche Induktionsgesetz II

Heute wissen wir, dass das veränderliche Magnetfeld in einem geschlossenen Leiter einen Strom hervorruft. Dies kann durch (im Nachhinein) sehr einfache Experimente gezeigt werden.



Ein bewegter Magnet ruft in einer Leiterschleife kurzzeitig eine Spannung $U(t)$ hervor, die proportional ist zu:

- $v(t)$ Magnet,
- Anzahl Windungen mal Fläche der Schleife,
- $\cos\alpha$ (zw. Flächennormalen und $\vec{B}$.)

Beim Umdrehen des Magneten wechselt auch das Vorzeichen von $U(t)$.

Das Faradaysche Induktionsgesetz III

Wir können auch eine Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld bewegen und finden, dass dabei auch eine Spannung induziert wird. Es scheint also auf die Relativbewegung zwischen Magnetfeld und Schleife anzukommen. Drehen wir die Schleife rund um sich herum, so finden wir, dass sich das Vorzeichen der Spannung verändert, es entsteht eine **Wechselspannung**.

Dies können wir auch verstehen, der Kosinus des Winkels zwischen Schleifenfläche und Magnetfeld ändert sich ja!

Das Faradaysche Induktionsgesetz IV

Formal können unsere Experimente durch das Faradaysche Induktionsgesetz zusammengefasst werden:

$$U_{ind} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t},$$

wo Φ_m der magnetische Fluss ist:

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = B \cdot N \cdot A \cdot \cos(\phi(t)).$$

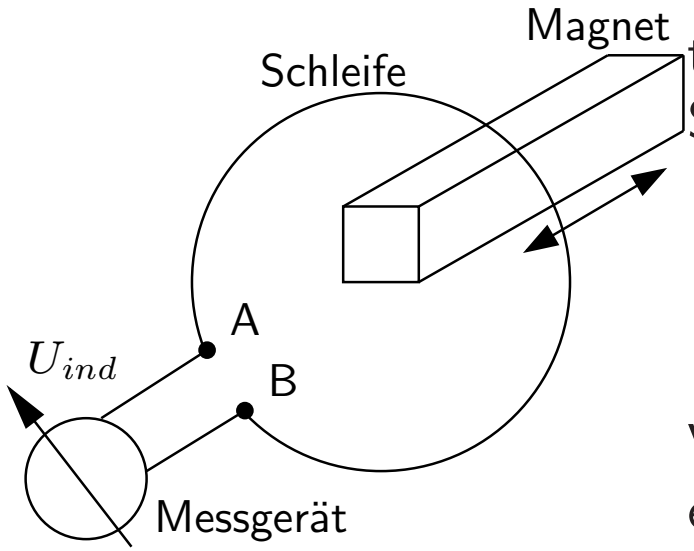
Der Wechselstromgenerator

Das Faradaysche Induktionsgesetz lässt sich nun ausnutzen, um eine Wechselspannung zu induzieren. Ist $\phi(t) = \omega \cdot t$ der zeitabhängige Winkel zwischen Magnetfeld und Spulennormale, so finden wir:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_m, \\ &= B \cdot N \cdot F \cdot \omega \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

Technisch wird dies als Wechselstromgenerator realisiert.

Induzierte Spannung – na und?



Wir haben gesehen, dass sich in der Konfiguration rechts zwischen den Punkten A und B eine Spannung U_{ind} aufbaut.

$$U_{ind} = -\int \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A}.$$

Von früher wissen wir aber, dass eine Spannung auf ein elektrisches Feld zurückgeführt werden kann,

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

wobei entlang der Leiterschleife integriert wird. Nach dem Satz von Stokes haben

wir aber auch

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \mathrm{d}\vec{A}.$$

Dies muss ja für alle Formen von Flächen gelten, und folglich:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}.$$

Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.

statische Ladungen	veränderliches Magnetfeld, $\dot{\vec{B}} \neq 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \neq 0$
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$	$\vec{E} \neq -\vec{\nabla}\varphi$
konservativ	nicht konservativ

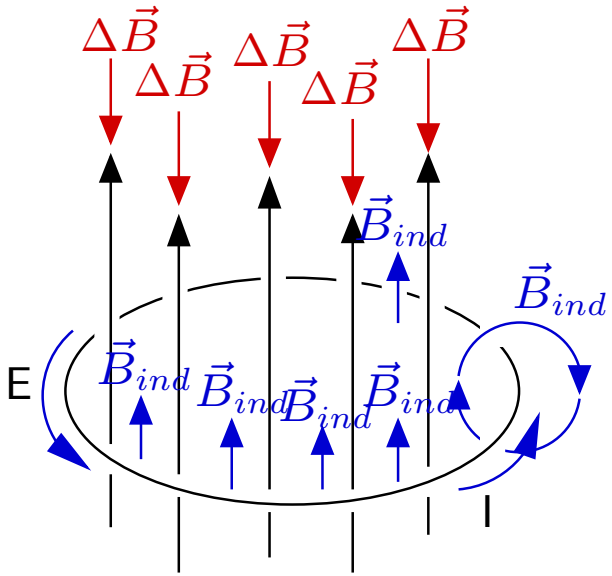
Die Lenzsche Regel

Was bedeutet das negative Vorzeichen im Faradayschen Induktionsgesetz $U_{ind} = -\dot{\Phi}_m$?

- Die induzierte Spannung U_{ind} führt zu einem Strom, der seinerseits wieder ein Magnetfeld erzeugt.
- U_{ind} ist positiv (negativ) für negative (positive) Magnetfeldänderungen.
- Die induzierten Ströme $I_{ind} = U_{ind}/R$ auch .
- Das induzierte Magnetfeld $\vec{B}_{ind}$ muss nach der rechte-Hand-Regel in die umgekehrte Richtung der Feldänderung zeigen.

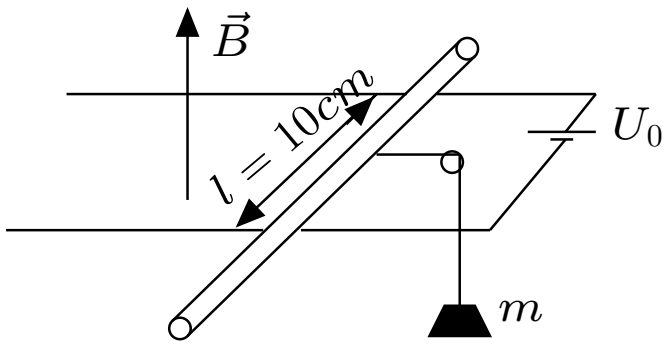
Die induzierten Größen behindern den induzierenden Vorgang.

Lenzsche Regel II



Die Richtung des induzierten Stroms I, der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und des induzierten Magnetfeldes $\vec{B}_{ind}$ wirken der Änderung des Magnetfeldes $\Delta\vec{B}$ entgegen. Sind die roten Pfeile umgekehrt (nimmer $\vec{B}$ zu), so zeigen I, $\vec{E}$ und $\vec{B}_{ind}$ in die andere Richtung. Zeigt $\Delta\vec{B}$ in die andere Richtung ($\vec{B}$ nimmt zu), so drehen sich alle Vorzeichen um (nach Induktionsgesetz) und damit auch $\vec{E}$, I und $\vec{B}_{ind}$. Das ist der Inhalt der Lenzschen Regel.

Übungsaufgabe: Linearmotor



Ein leitender Stab ($R = 0,1\ \Omega$) liege auf zwei leitenden, parallelen Schienen ($R \simeq 0$) mit 10 cm Abstand, an welchen eine Spannung $U_0 = 15$ V liegt. Der Stab ist über ein Seil mit einer Masse $m = 1,2$ kg verbunden. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_0 des Stabs, mit welcher er sich stationär bewegt, wenn ein homogenes Magnetfeld $B_0 = 10$ kGauß senkrecht durch die Schienenebene tritt. [$v_0 = 32,3$ m/s]

Lösung

Induzierte Spannung $U_{ind} = -\mathrm{d}\Phi_m/\mathrm{d}t = -B\mathrm{d}A/dt = -Bl\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Bewegung $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ führt zu Lorentzkraft auf Ladungsträger, $\vec{F}_{el} = I\int \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I \cdot l \cdot B$. Im stationären Zustand ist $\dot{v} = 0$, d. h. $F_{el} = F_G$, also

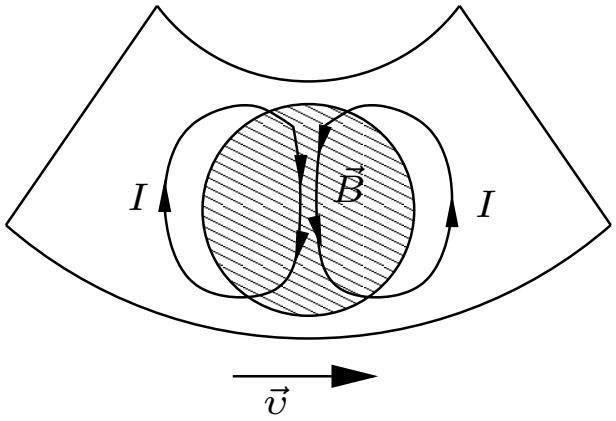
$$I \cdot l \cdot B = m \cdot g$$

$$\text{Strom: } I = \frac{U_0 + U_{ind}}{R} = \frac{U_0 - B \cdot l \cdot v}{R} = \frac{m \cdot g}{l \cdot B}$$

und folglich

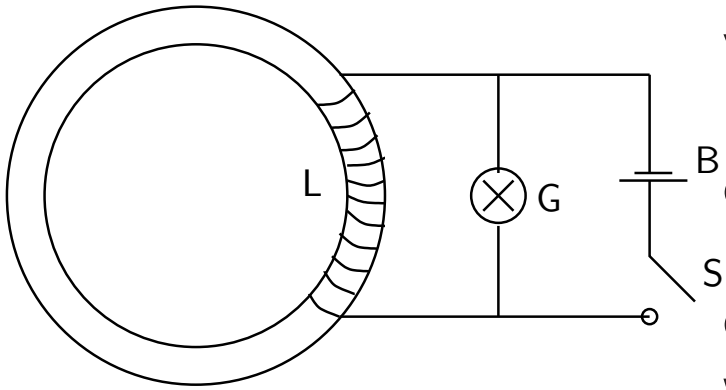
$$v = \frac{1}{l \cdot B}\left(U_0 - \frac{m \cdot g \cdot R}{l \cdot B}\right).$$

Wirbelströme



Die in ausgedehnten Leitern induzierten Ströme nennt man **Wirbelströme**. Sie fließen, wie wir jetzt gesehen haben, immer entgegengesetzt den induzierenden Größen. Damit kann man Wirbelströme sehr gut als Bremse verwenden. Die Ströme entstehen durch die auf die Leiterelektronen wirkende Lorentzkraft. Die entstehende Joulsche Wärme entzieht der Bewegung Energie.

Selbstinduktion

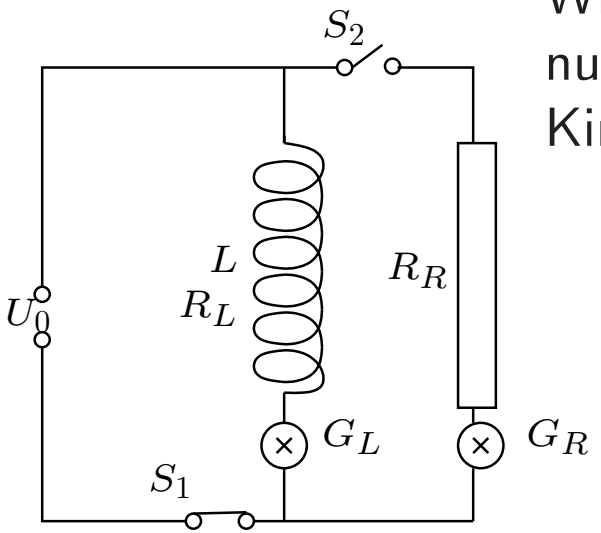


Fließt durch eine Spule ein Strom, so liegt die Vermutung nahe, dass das dadurch entstehende Magnetfeld bei Veränderung eine Spannung induzieren könnte. Diese Spannung ist nach der Lenzschen Regel entgegengesetzt zur Änderung in der angelegten Spannung. In der Anordnung links wird die Glühbirne G kurz aufleuchten, wenn der Stromkreis unterbrochen wird (Schalter S geöffnet). Die Proportionalitätskonstante L im Ausdruck

$$U_{ind} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

heißt einleuchtend **Selbstinduktionskoeffizient** oder **Induktivität**.

Ein- und Ausschalten eines Schaltkreises mit Spule



Wir betrachten nun den Einschaltvorgang bei der Anordnung links, S_1 wird geschlossen, S_2 bleibt offen. Nach Kirchhoff haben wir

$$\begin{aligned} U_0 &= I \cdot R - U_{ind} = I \cdot R + L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \\ \frac{U_0}{R_L} &= I + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

wo $1/R = 1/R_L + 1/R_R$ gilt, wobei R_L der ohmsche Widerstand der Spule und R_R derjenige des Widerstands ist.

Die allgemeine Lösung einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{y} + u(t)y = v(t)$$

ist

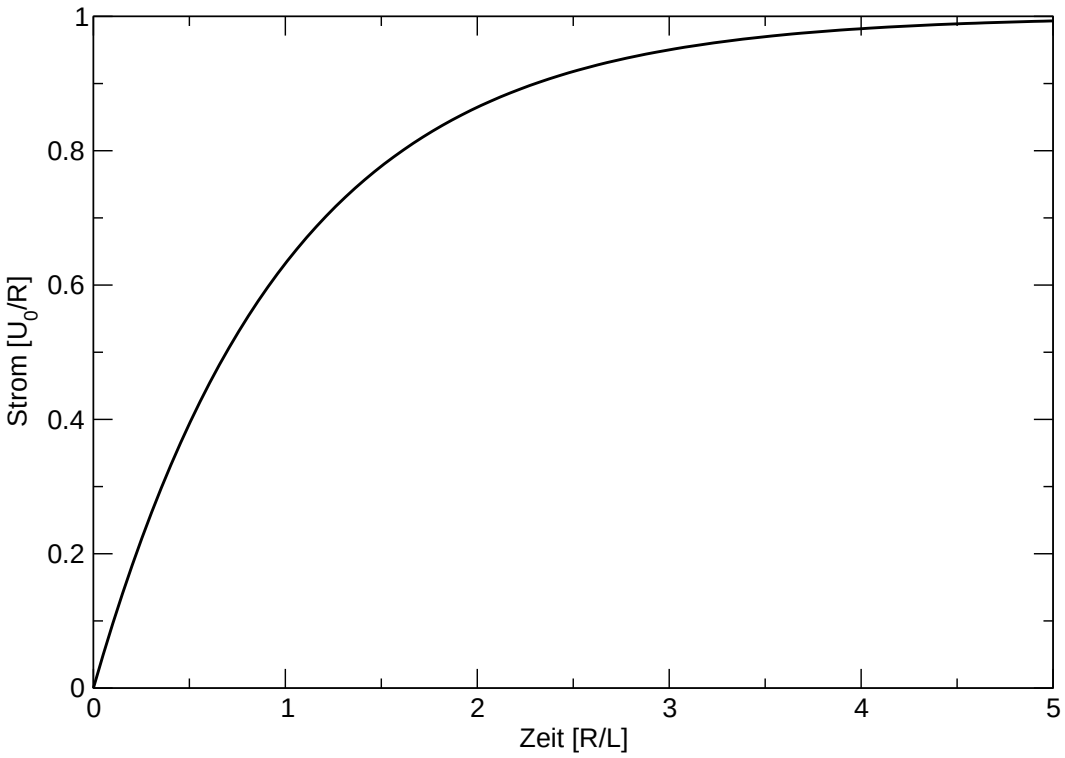
$y(t) = G(t)e^{-U(t)}$, wo $U = \int u(t)dt$ und $G = \int v(t)e^{U(t)}dt$.

Wir setzen ein

$$u(t) = \frac{R}{L}, \quad U(t) = \frac{R}{L} \cdot t, \quad v(t) = \frac{U_0}{L}, \quad G(t) = \frac{U_0}{L} \int e^{(r/L)t} = \frac{U_0}{R} e^{(R/L)t} + C'$$

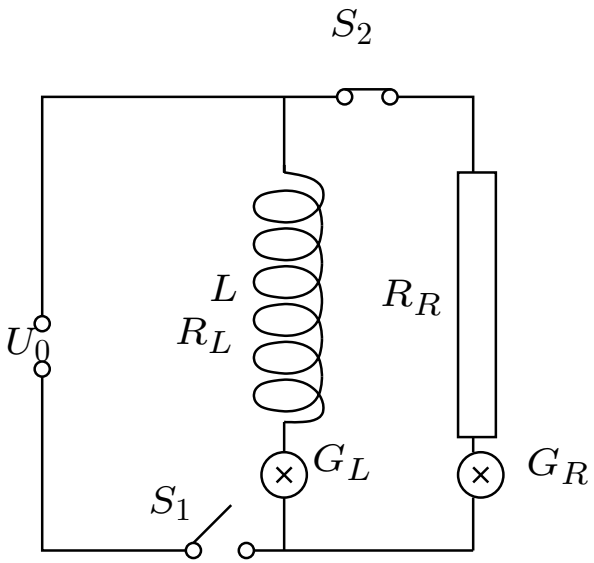
$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(e^{(R/L)t} + C \right) \cdot e^{-(R/L)t}, \text{ R. B: } I(t \to \infty) = \frac{U_0}{R} \Rightarrow C = -1$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t} \right).$$



Der Strom steigt rasch an und schmiegt sich asymptotisch an den Wert U_0/R. Die Zeitverzögerung gegenüber der rein ohmschen Situation kann qualitativ sichtbar gemacht werden, indem zu Beginn auch der Schalter S_2 geschlossen wird. Dann leuchtet Glühbirne G_L erst nach G_R auf. Über die Spule fließt der Strom $I_L = U_0/R_L$, über den Widerstand $I_R = U_0/R_R$.

Ausschalten des Schaltkreises



Nun wird der Schalter S_1 geöffnet, d. h. $U_0(t=0) = 0$ und $I_L(t=0) = I_L(t<0) = I_0$. Dann gilt nach der Maschenregel

$$I_L(t)\cdot(R_R+R_L)-U_{ind} = I_L(t)\cdot(R_R+R_L)+L\frac{\mathrm{d}I_L(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Die Lösung dieser homogenen linearen DGL 1. Ordnung ist

$$I_L(t) = I_0 \cdot e^{-((R_R+R_L)/L)\cdot t}.$$

Der Strom sinkt langsam (asymptotisch) auf Null ab mit der Zeitkonstante $\tau = L/R$, wo $R = R_R + R_L$. Über der Spule entsteht eine Induktionsspannung

$$U_{ind} = -I_L \cdot (R_R + R_L) = -L\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t},$$

so, dass jetzt durch die Glühbirne G_R ein größerer Strom $I_R = -I_L$ als vor dem Ausschalten in umgekehrter Richtung fließt. Wegen $U_0 = I_0 \cdot R_L$

$$U_{ind} = -U_0\frac{R_R + R_L}{R_L} \cdot e^{-(R/L)\cdot t},$$

welche wesentlich größer sein kann als U_0, weil in der Regel $R_R \gg R_L$. Folglich wird auch der Strom über G_L kurzzeitig wesentlich größer sein als vor dem Ausschalten, die Glühbirne leuchtet hell auf oder brennt sogar durch. Dieser Effekt wird zum Zünden von Leuchtstoffröhren verwendet.

Induktivität einer zylindrischen Spule

Das Magnetfeld im Innern einer mit einem Strom I durchflossenen Spule der Länge l mit n Windungen pro Meter und Querschnittsfläche A ist $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$ und folglich $\Phi_m = B \cdot A = \mu_0 \cdot n \cdot A \cdot I$.

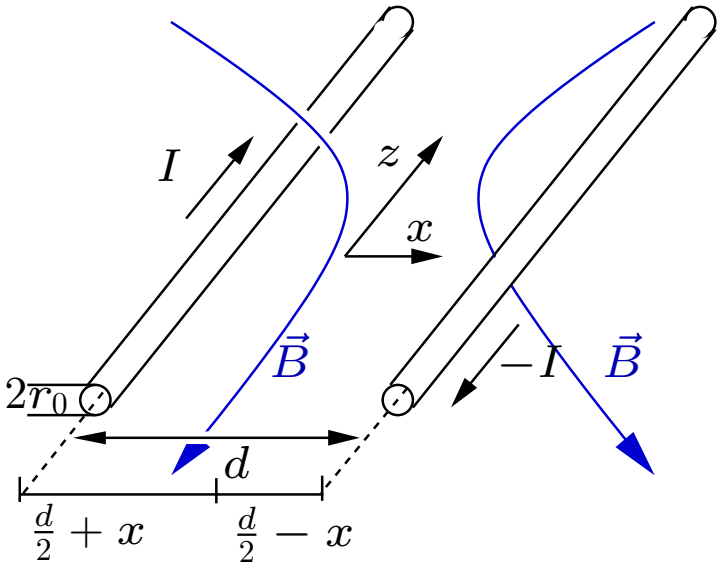
Ändert sich der Strom dI/dt, so ändert sich auch Φ_m, und es wird eine Spannung zwischen den beiden Enden der Spule induziert.

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -n \cdot l \frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}, \text{ weil } n \cdot l \text{ Windungen} \\ &= -\mu_0 \cdot n^2 \cdot l \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Induktivität der Spule mit Volumen $V = A \cdot l$

$$L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot V.$$

Induktivität von zwei parallelen Leitern



Das Magnetfeld der links skizzierten Anordnung liegt in der $x-y$-Ebene. Entlang der x-Achse gilt für $|\vec{B}|$

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{\frac{d}{2}+x}+\frac{1}{\frac{d}{2}-x}\right),$$

$$B_{i,l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2}\left(\frac{d}{2}+x\right), \text{innen, links}$$

$$B_{i,r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2}\left(\frac{d}{2}-x\right), \text{innen, rechts.}$$

Durch ein Flächenstück $A = d \cdot l$ in der $x - z$-Ebene geht also der magnetische Fluss

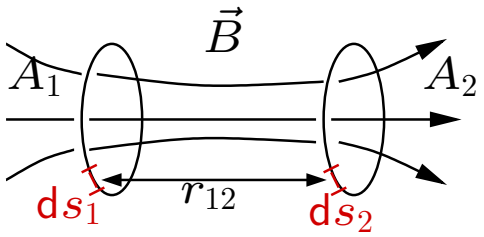
$$\begin{aligned}
\Phi_m &= l \cdot \left[\int_{-d/2+r_0}^{d/2-r_0} B_a(x)\mathrm{d}x + \int_{-d/2}^{-d/2+r_0} B_{i,l}(x)\mathrm{d}x + \int_{d/2-r_0}^{d/2} B_{i,r}(x)\mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} + \ln \frac{d - r_0}{r_0} \right].
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Induktivität der Anordnung

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} + \ln \frac{d - r_0}{r_0} \right],$$

welche mit zunehmendem Abstand logarithmisch wächst und auch für abnehmende Leiterradien r_0 zunimmt.

Gegenseitige Induktion



Wie beeinflussen sich zwei Stromkreise gegenseitig? Nach Biot-Savart erzeugt der stromdurchflossene Stromkreis 1 im Punkt $P_{(r_{12})}$ ein Magnetfeld mit dem Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\vec{s_1}}{r_{12}}.$$

Dieses Magnetfeld bewirkt einen magnetischen Fluss durch die durch die Leiterschleife s_2 aufgespannte Fläche A_2 wegen des Satzes von Stokes

$$\Phi_m = \int_{A_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}A = \int_{A_2} \vec{\nabla} \times \vec{A} \mathrm{d}A = \int \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s}_2.$$

Setzen wir den Ausdruck für $\vec{A}(\vec{r}_2)$ ein, so erhalten wir

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{s_1} \int_{s_2} \frac{\mathrm{d}\vec{s}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{s}_2}{r_{12}} = L_{12} I_1,$$

und den Proportionalitätsfaktor L_{12} **gegenseitige Induktivitẗ,**

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{s_1} \int_{s_2} \frac{\mathrm{d}\vec{s}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{s}_2}{r_{12}}$$

und ist in der Regel schwierig auszurechnen. Demtröder zeigt ein paar Beispiele.

Die Energie des magnetischen Feldes

Beim Ausschalten der Spannung über Spule und Widerstand stand die Glühbirne noch eine Weile unter Spannung und leuchtete zunächst noch wesentlich heller als vorher. Die dazu erforderliche Energie muss im Magnetfeld der Spule gesteckt haben, wo denn sonst? Damit muss die Energie des Magnetfeldes gegeben sein durch

$$W_{mag} = \int_0^\infty I \cdot U \cdot \mathrm{d}t = \int_0^\infty I^2 \cdot R \cdot \mathrm{d}t.$$

Setzen wir den Ausdruck für den Strom $I(t)$ ein,

$$W_{mag} = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-(2R/L)\cdot t} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2} I_0^2 \cdot L.$$

Setzen wir noch den Ausdruck $L = \mu_0 n^2 \cdot V$ für die Induktivität einer Spule ein,

so erhalten wir für die Energiedichte des magnetischen Feldes

$$w_{mag} = \frac{W_{mag}}{V} = \frac{1}{2}\mu_0 \cdot n^2 \cdot I_0^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

denn das Feld einer Spule ist ja bekanntlich $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$. Zusammenfassend gilt für elektrische und magnetische Felder

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2}CU^2 \qquad & W_{mag} &= \frac{1}{2}LI^2 \\ w_{el} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad & w_{mag} &= \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = 1/c^2$ erhalten wir einen Ausdruck für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes:

$$w_{elm} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(E^2 + c^2 B^2\right).$$

Der Verschiebungsstrom

Die Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$

die wir für stationäre Stromverteilungen gefunden hatten, ist im zeitabhängigen Fall höchst problematisch. Nehmen wir davon die Divergenz, so haben wir

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \vec{j} \right) \\
\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \\
0 &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}, \text{ aber auch} \\
\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= -\dot{\rho},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile direkt aus der Kontinuitätsgleichung folgt und für zeitlich veränderliche Ladungsverteilungen bedeutet, dass die obere Zeile unmöglich gelten kann! Maxwell hat erkannt, dass dieses Dilemma gelöst werden kann, indem man den Satz von Coulomb zu Hilfe nimmt

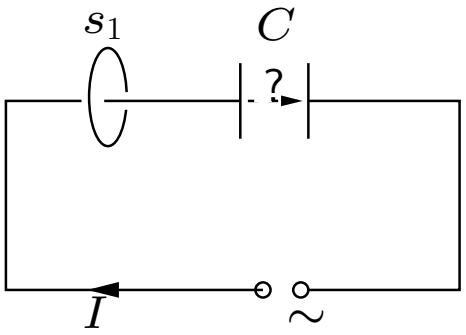
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

und ganz oben einsetzt. Das ermöglicht

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \right) = 0,$$

und erfordert eine Anpassung der Gleichung für das induzierte Magnetfeld:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j}.$$

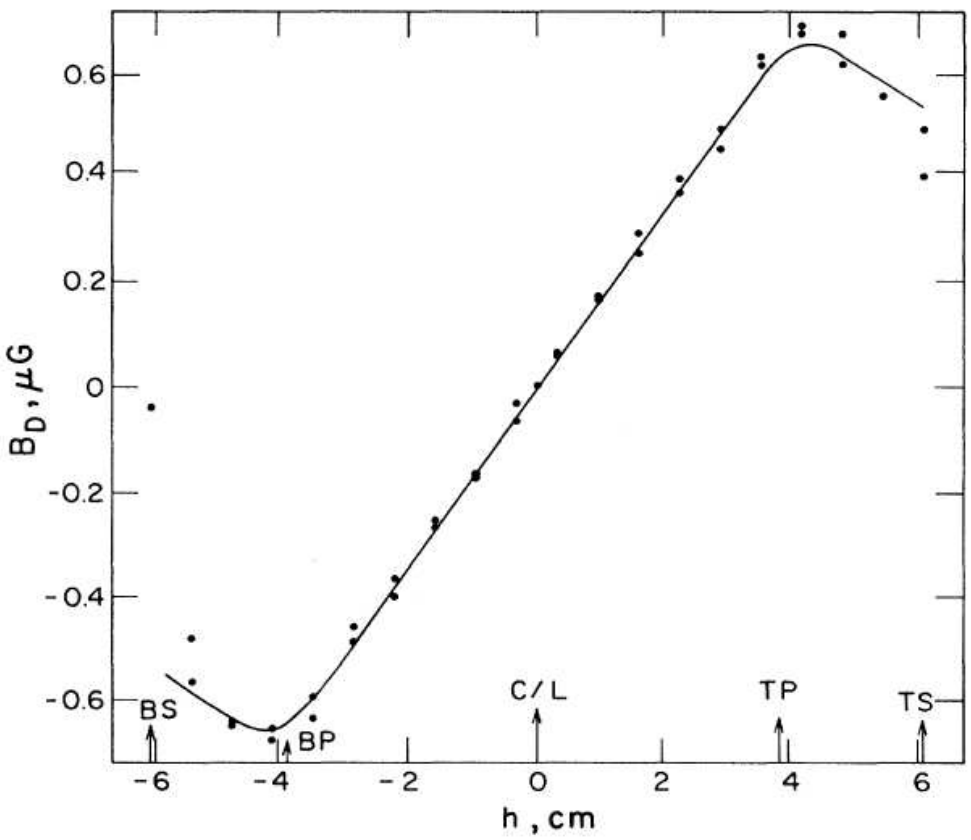


Die Größe

$$\vec{j}_V = \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}$$

heißt Verschiebungsstromdichte. Sie erklärt auch, weshalb beim Aufladen eines Kondensators entlang der Zuleitung ein Magnetfeld induziert werden kann. Natürlich fließt einStrom, aber warum und wie? Der Stromkreis ist doch wegen des Kondensators offen! Selbst wenn wir akzeptieren, dass der Strom fließt, was passiert denn mit dem Magnetfeld im Inneren des Kondensators? Der Verschiebungsstrom regelt's. Im Innern des Kondensators herrscht ein Magnetfeld (Bartlett und Corle, Phys. Rev. Lett., **55**, 59–62, (I985)). Der durch den Kondensator fließende virtuelle Strom (die Ladungsänderung an den beiden Platten führt zu einer Veränderung des elektrischen Feldes) induziert ein Magnetfeld.

Magnetfelder entstehen durch Ströme und zeitlich variable elektrische Felder.



Die Figur links zeigt das Resultat von Bartlett und Corle. Das Magnetfeld im Kondensator ist konsistent mit einem homogenen Strom der durch die Stirnflächen des Kondensators fließt. Der Messaufwand war erheblich. . .

Die Maxwell-Gleichungen

Damit können wir den Vorhang öffnen für die Maxwellschen Gleichungen!

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

welche, zusammen mit der Gleichung für die Lorentzkraft,

$$\vec{F} = q \left(\vec{v} \times \vec{B} \right),$$

alle elektromagnetischen Phänomene beschreiben.

Die Maxwell-Gleichungen in Differential- und Integralform

Wir haben im bisherigen Verlauf der Vorlesung gemerkt, dass es manchmal sinnvoller oder einfacher ist, die Gleichungen in differentieller oder in integraler Form zu betrachten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Vergleich elektrischer und magnetischer Größen

	elektr. Feld			magn. Feld	
Kraft	$\vec{F} = q\vec{E}$	N		$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$	
Dipolmoment	$\vec{p} = q\vec{l}$	Asm		$\vec{m} = \Phi\vec{l}$	V
rel. Permit.	ϵ_r	1	Permeab.	μ_r	
Verschiebung	$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$	$\mathrm{As/m^2}$	Flussdichte	$\vec{B} = \mu\vec{H}$	V
Kapazität	$C = Q/U$	F	Indiktivität	$L = U/(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$	
Energiedichte	$w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon\vec{E}^2$	$\mathrm{J/m^3}$		$w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} = \frac{1}{2}\mu\vec{H}^2$	J
Energie Kond.	$W_e = \frac{1}{2}CU^2$	J	Spule	$W_m = \frac{1}{2}LI^2$	