Elektrotechnische Anwendungen: Wechselstromgenerator

Das Faradaysche Induktionsgesetz bildet die Grundlage für die technische Realisierung von elektrischen Motoren und Generatoren. Das einfachste Modell eines Wechselstromgenerators ist eine rechteckige Spule mit der Windungsfläche F, die im homogenen Magnetfeld B mit der Winkelgeschwindigkeit ω gedreht wird. Sie liefert die induzierte Spannung:

$$U = B \cdot F \cdot \omega \cdot \sin t.$$

Diese Spannung kann über zwei Schleifenkontakte abgegriffen werden. Wird an die Kontakte jedoch eine Wechselspannung U_e angelegt, so dreht sich die Spule (eventuell erst nach Anstoßen) mit der Frequenz der externen Wechselspannung. Der **Generator** ist zum **Motor** geworden.

Gleichstromgenerator

Schickt man Gleichstrom durch die Spule, so kann sie höchstens eine halbe Umdrehung vollführen. Polt man jedoch die Richtung des Stromes im richtigen Moment um, so dreht sich die Spule kontinuierlich im konstanten Magnetfeld. Diese Umpolung geschieht durch einen geschlitzten Schleifkontakt (**Kommutator**), der aus zwei isolierten Hälften besteht, die mit den Enden der Spule leitend verbunden sind. Der Generator ist damit als **Gleichstromgenerator** oder -**motor** verwendbar. Der Generator liefert pulsierende Gleichspannung. Durch Verwendung von N Spulen, deren Ebenen um den Winkel π/N gegeneinander verdreht sind, kann die Spannung geglättet werden. Mit N zweiteiligen Kommutatoren können die Wechselspannungen der Spulen gleichgerichtet und dann überlagert werden. Denselben Zweck erfüllt ein Kommutator, der $2N$ Segmente und N Abnehmer hat. Dazu wird das Ende einer Spule mit dem Anfang der nächsten Spule und mit einem Segment des Kommutators verbunden.

Aufbau eines Generators bzw. Elektromotors

Die drei wichtigsten Bestandteile eines Generators bzw. eines Elektromotors sind:

- der feststehende Feldmagnet (**Stator**)
- die rotierenden Spulen (**Rotor**)
- der **Kommutator** mit den Schleifkontakten

Wechselstrom I

Eine **Wechselspannung**

$$U = U_0 \cdot \cos \omega t,$$

die an einem Widerstand R anliegt, erzeugt einen **Wechselstrom**

$$I = I_0 \cdot \cos \omega t$$

mit $I_0 + U_0/R$. Die Zeit $T = 2\pi/\omega$ zwischen zwei Maxima heißt die **Periode**. Sie beträgt in Mitteleuropa mit $\omega = 2\pi \cdot 50$ Hz $\Rightarrow T = 20$ ms.

Wechselstrom II

Die elektrische Leistung dieses Wechselstromes $P_{el} = U \cdot I = U_0 I_0 \cos^2 \omega t$ ist ebenfalls eine periodische Funktion der Zeit. Ihr zeitlicher Mittelwert ist

$$\begin{aligned} \bar{P}_{el} &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos^2 \omega \mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad T = 2\pi/\omega \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0. \end{aligned}$$

Ein von einer Gleichspannung $U = U_0/\sqrt{2}$ erzeugter Gleichstrom $I = I_0/\sqrt{2}$ würde die gleiche mittlere Leistung haben wie der Wechselstrom mit den Amplituden U_0, I_0. Man nennt deshalb $U_{eff} = U_0/\sqrt{2} \quad \text{und} \quad I_{eff} = I_0/\sqrt{2}$ die **Effektivwerte** von Spannung und Strom des Wechselstromes.

Enthält der Stromkreis Induktivitäten L oder Kapazitäten C, so sind im Allgemeinen Strom und Spannung nicht mehr in Phase.

Es gilt dann für die Wechselspannung

$$U = U_0 \cdot \cos \omega t, \quad I = I_0 \cdot \cos(\omega t + \phi).$$

Die mittlere Leistung ist dann

$$\begin{aligned} \bar{P}_{el} &= \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{U_0 I_0}{2} \cdot \cos \phi. \end{aligned}$$

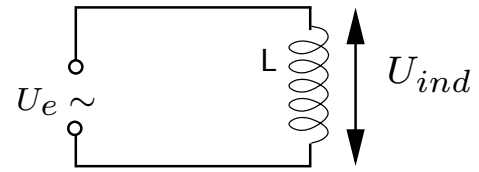
Für $\phi = 90^{\circ}$wird $\bar{P}_{el} = 0$.

Wechselstromkreise mit komplexen Widerständen

Die an Induktivitäten L und Kapazitäten C auftretenden Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung lassen sich am übersichtlichsten in einer komplexen Schreibweise darstellen. Um die reale Bedeutung komplexer Widerstände klarzumachen, wollen wir uns zunächst zwei einfache Beispiele ansehen.

Induktivität:

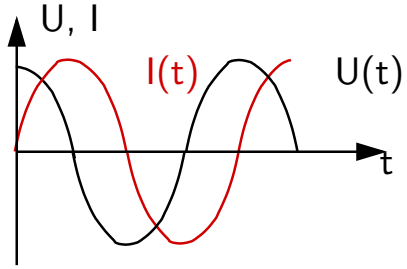
Die von außen angelegte Spannung $U_a = U_0 \cos \omega t$ muss im geschlossenen Stromkreis entgegengesetzt gleich der induzierten Spannung $U_{ind} = -L \cdot \mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ sein: $U_a + U_{ind} = 0$:



$$\Rightarrow \qquad U_0 \cos \omega t = L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{U_0}{L} \int \cos \omega t \mathrm{d}t = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t$$

$$= I_0 \sin \omega t \quad \text{mit} \quad I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$$



$$|R_L| = U_0/I_0 = \omega \cdot L.$$

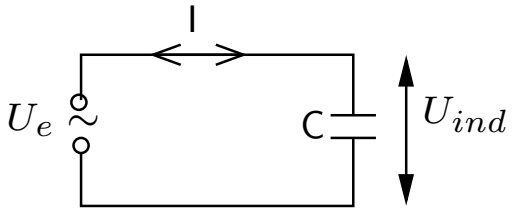
$|R_L|$ wird als induktiver Widerstand definiert. Aus den Gleichungen zeigt sich, dass Strom und Spannung nicht in Phase sind. Der Strom ist gegenüber der Spannung um 90° verzögert!

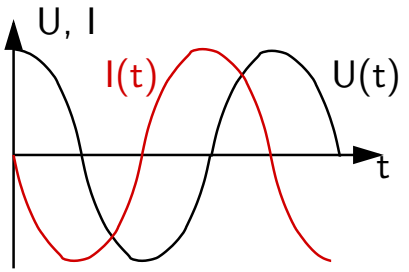
Kapazität:
Aus der Gleichung

$$U = Q/C$$

folgt durch zeitliche Differentiation

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C} \cdot I.$$





Mit $U = U_0 \cdot \cos \omega t$ wird

$$I = -\omega C \cdot U_0 \cdot \sin \omega t = \omega C \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t + 90^{\mathrm{o}}).$$

Der Strom eilt der Spannung um 90^{o} voraus.

Komplexe Widerstände I

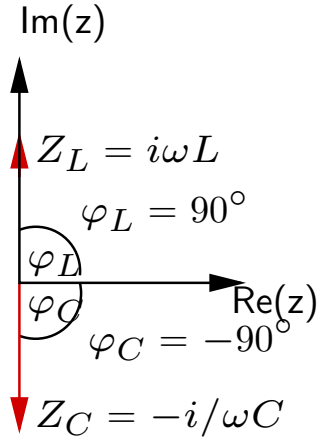
Berücksichtig man auch die Phasenverschiebung bei Induktivitäten und Kapazitäten, so lassen sich die phasenverschiebenden Widerstände R_L und R_C als komplexe Zahlen Z ausdrücken, deren Betrag gleich $|R_L|$ bzw. $|R_C|$ ist und deren Winkel ϕ gegen die reelle Achse die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung angibt.

Für Induktivitäten ergibt sich damit:

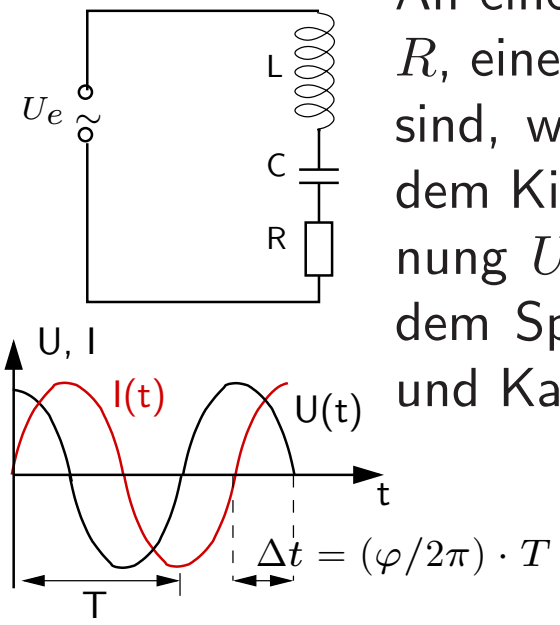
$$Z_L = \mathrm{i}\omega L.$$

Für Kapazitäten gilt:

$$Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}.$$



Komplexe Widerstände II



An einen Wechselstromkreis, in dem ein Ohmscher Widerstand R, eine Induktivität L und eine Kapazität C in Serie geschaltet sind, wird eine äußere Wechselspannung $U(t)$ angelegt. Nach dem Kirchhoffschen Gesetz muss die Summe aus äußerer Spannung $U(t)$ und Induktionsspannung $U_{ind} = -L \cdot \mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ gleich dem Spannungsabfall $U_1 + U_2 = I \cdot R + Q/C$ an Widerstand und Kapazität C sein. Es gilt daher:

$$U = I \cdot R + L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C}.$$

Differentiation nach der Zeit ergibt mit $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = L \cdot \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} I.$$

Wir wählen den komplexen Lösungsansatz

$$U = U_0 \cdot e^{\mathrm{i}\omega t}, I = I_0 \cdot e^{\mathrm{i}(\omega t - \phi)}.$$

Sind die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ Lösungen, so ist auch jede Linearkombination $af(t)+bg(t)$ eine Lösung, insbesondere auch die komplexe Funktion $f(t)+\mathrm{i}g(t) = U(t)$. Also sind Real- und Imaginärteil einer komplexen Lösung auch Lösungen. Der komplexe Ansatz liefert einen einfacheren Lösungsweg. Einsetzen der komplexen Widerstände gibt

$$\mathrm{i}\omega U = (-L\omega^2 + \mathrm{i}\omega R + 1/C) I.$$

Mit $Z = U/I$ erhält man

$$Z = \frac{U}{I} = R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Der Betrag des komplexen Widerstands

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

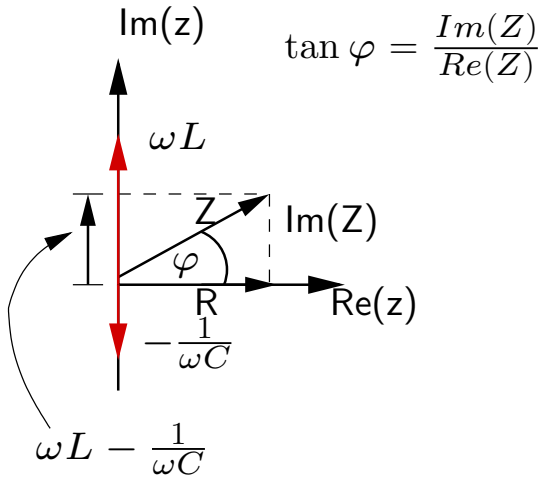
wird **Impedanz** genannt. Die vom komplexen Widerstand bewirkte Phasenverschiebung ϕ zwischen Strom und Spannung wird durch den Quotienten

$$\tan\phi = \frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

von Imaginär- und Realteil beschrieben. In der Polardarstellung $Z = |Z| \cdot e^{\mathrm{i}\phi}$ entspricht $|Z|$ der Länge des Vektors und ϕ dem Phasenwinkel.

Die Darstellung von komplexen Widerständen als Vektoren in der komplexen Ebene heißt in der Elektrotechnik Zeigerdiagramm. Die Nützlichkeit dieser Darstellung wird im nächsten Abschnitt erläutert. Man sieht aus dem Zeigerdiagramm oder der Gleichung für den komplexen Widerstand, dass für

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$



der Imaginärteil von Z Null ist, die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung kann also durch geeignete Wahl von L und C zu Null gebracht werden (**Blindleistung** gleich Null).

Für den Strom im Wechselstromkreis gilt also bei der angelegten Spannung

$$U = U_0 \cos \omega t$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \phi)$$

mit

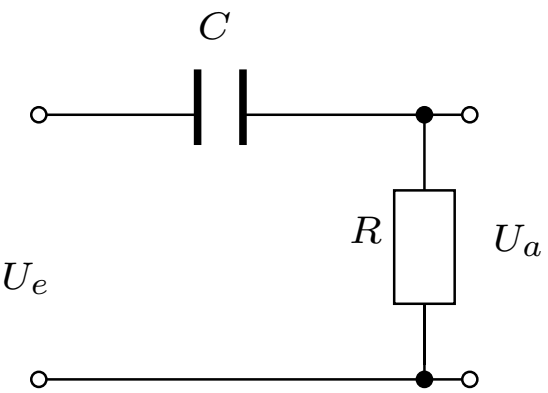
$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \\ \tan \phi &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \end{aligned}$$

Lineare Netzwerke: Frequenzfilter

Lineare Netzwerke sind dadurch gekennzeichnet, dass zwischen Strom I und Spannung U immer eine lineare Beziehung $U = Z \cdot I$ besteht, die die komplexe Schreibweise des Ohmschen Gesetzes darstellt. Fließen in einem Stromkreis gleichzeitig Wechselströme mit verschiedenen Frequenzen ω, so kann man die Ströme $I(\omega_i)$ bei einer beliebig ausgesuchten Frequenz ω_i aus den Spannungen $U(\omega_i)$ ausrechnen und dann die Anteile aller beteiligten Frequenzen addieren. Dieses **Superpositionsprinzip** ist für die Hochfrequenztechnik von großer Bedeutung, da es gestattet, die Veränderung komplizierter Spannungspulse $U(t)$ bzw. Strompulse $I(t)$ beim Durchgang durch lineare Netzwerke zu bestimmen, indem man die Eingangspulse in ihre Fourierkomponenten $U_e(\omega)$ bzw. $I_e(\omega)$ zerlegt, aus dem bekannten Wechselstromwiderstand $Z(\omega)$ die Anteile $U_a(\omega)$ bzw. $I_a(\omega)$ des Ausgangssignals bestimmt und anschließend diese Anteile addiert (**Fourier-Synthese**).

Hochpass

Ein elektrischer Hochpass ist eine Schaltung, die hohe Frequenzen ω praktisch ungedämpft durchlässt, tiefe Frequenzen aber unterdrückt.

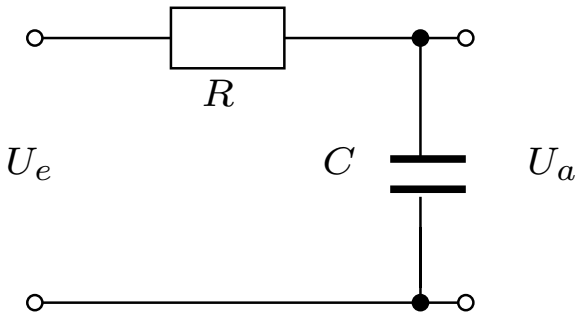


Für eine Wechselspannung $U_e(t) = U_0 \cos \omega t$ am Eingang wirkt die Schaltung wie ein frequenzabhängiger Spannungsteiler. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
U_a &= \frac{R}{R + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}} \cdot U_e \\
|U_a| &= \frac{\omega \cdot R \cdot C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot |U_e| \\
\tan \phi &= \frac{1}{\omega R C}.
\end{aligned}
$$

Tiefpass

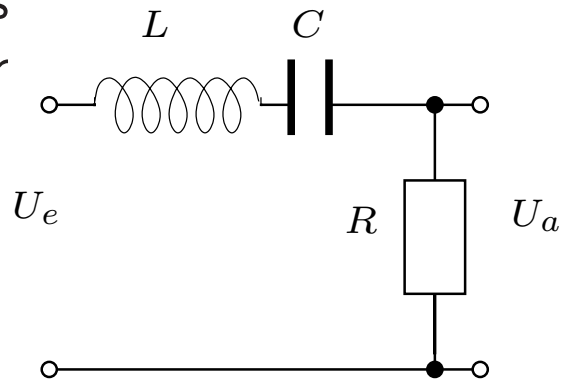
Wenn man R und C gegenüber dem Hochpass vertauscht, erhält man einen Tiefpass. Es gilt:



$$
\begin{aligned}
U_a &= \frac{1/\mathrm{i}\omega C}{R + 1/(\mathrm{i}\omega C)} \cdot U_e \\
&= \frac{1}{1 + \mathrm{i}\omega RC} \cdot U_e \\
|U_a| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot |U_e| \\
\tan\phi &= -\omega RC.
\end{aligned}
$$

Frequenzfilter: Durchlassfilter

Die Serienschaltung von L und C kann als schmalbandiges Frequenzfilter eingesetzt werden. Für die Spannung über dem Widerstand gilt:

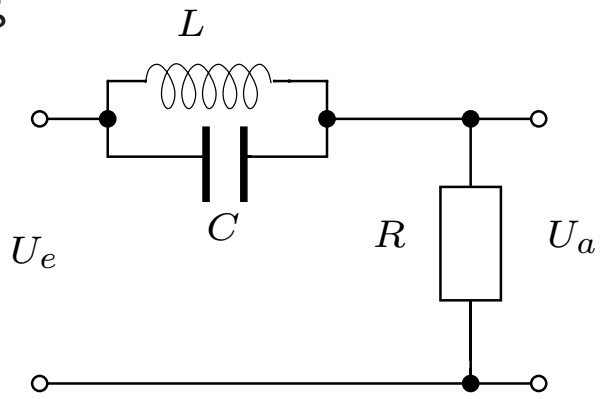


$$
\begin{aligned}
U_a &= \frac{R}{R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \cdot U_e \\
|U_a| &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot U_e \\
\Delta\omega &= \frac{R}{L}, \quad \tan\phi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.
\end{aligned}
$$

Frequenzfilter: Sperrfilter

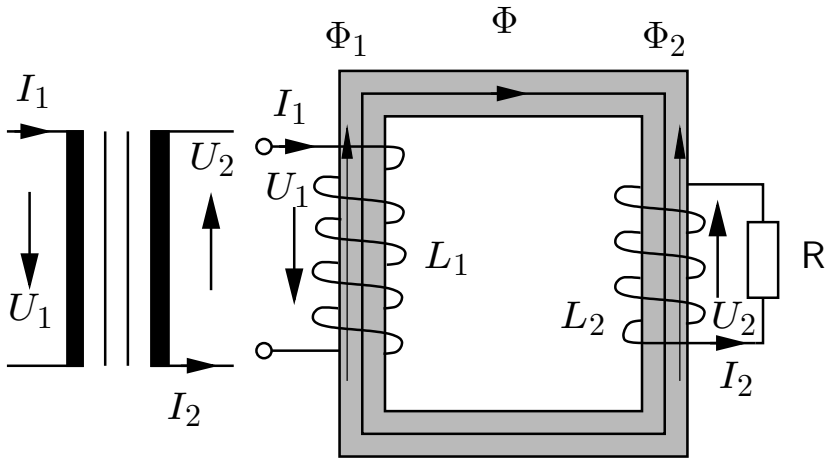
Bei Parallelschaltung von L und C wirkt die Schaltung als Sperrfilter. Die Ausgangsamplitude wird zu Null für

$$\omega = \omega_R = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$



Transformatoren

Für den Transport elektrischer Energie über weite Entfernungen ist es günstig, möglichst hohe Spannungen U zu wählen, da dann der Leitungsverlust durch Joulesche Wärme möglichst klein wird. Will man eine elektrische Leistung $P_{el} = U \cdot I$ übertragen, so verliert man in der Leitung die Leistung $\Delta P_{el} = I^2 R$, so dass der relative Leistungsverlust



$$\frac{\Delta P_{el}}{P_{el}} = \frac{I^2 \cdot R}{U \cdot I} = \frac{I \cdot R}{U} = \frac{R}{U^2} P_{el}$$

bei vorgegebener Leistung P_{el} mit steigender Spannung proportional zu $1/U^2$

absinkt. Mit $\Delta U = I \cdot R$ folgt:

$$\frac{\Delta P_{el}}{P_{el}} = \frac{\Delta U}{U}.$$

Die Umformung von Spannungen geschieht mit **Transformatoren**, die auf dem Faradayschen Induktionsgesetz basieren. Zwei Spulen L_1 und L_2 mit den Windungszahlen N_1 und N_2 werden durch ein Eisenjoch so miteinander gekoppelt, dass der magnetische Fluss der vom Primärstrom I_1 durchflossenen Primärspule L_1 vollständig die Sekundärspule L_2 durchsetzt. Im unbelasteten Transformator fließt im Sekundärkreis kein Strom $(I_2 = 0)$. Bei einer Eingangsspannung

$$U_1 = U_0 \cos \omega t$$

fließt in L_1 ein Strom I_1, der einen magnetischen Fluss Φ_m erzeugt. Dieser bewirkt eine Induktionsspannung

$$U_{ind} = -L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -N_1\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t},$$

die der angelegten Spannung entgegengesetzt gleich ist:

$$U_1 + U_{ind} = 0.$$

Wenn der gesamte in L_1 erzeugte Fluss Φ_m auch durch die Sekundärspule L_2 geht, wird dort eine Spannung $U_2 = -N_2\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$ erzeugt. Wegen $\mathrm{d}\Phi_m/\mathrm{d}t = U_1/N_1$ folgt:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}.$$

Die vom idealen **unbelasteten** Transformator aufgenommene mittlere Leistung ist:

$$\bar{P}_{el} = \frac{1}{2}U_{01}I_{01}\cos\phi = 0.$$

Belasteter Transformator

Belastet man die Sekundärseite durch einen Verbraucher mit Widerstand R, so fließt ein Strom $I_2 = U_2/R$, der selbst einen magnetischen Fluss $\Phi_2 \propto I_2$ erzeugt, welcher gegenüber dem von I_1 erzeugten Fluss Φ_1 um 90^o gegen Φ_1 phasenverschoben ist. Dieser vom Sekundärstrom I_2 erzeugte Fluss Φ_2 überlagert sich dem Fluss Φ_1 zu einem Gesamtfluss $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, der eine Phasenverschiebung von $0 < \Delta\Phi < 90^\mathrm{o}$gegenüber der Eingangsspannung U_1 hat, wobei gilt: $\tan = \Phi_2/\Phi_1$. Dadurch überlagert sich dem Primär-Blindstrom I_1 ein phasenverschobener Anteil, der durch Φ_2 induziert wird. Die aus dem Primäranschluss entnommene Leistung

$$\bar{P}_{el} = \frac{1}{2} U_0 \sqrt{I_{01}^2 + I_{02}^2 \cdot \cos\left(\phi - \Delta\phi\right)}$$

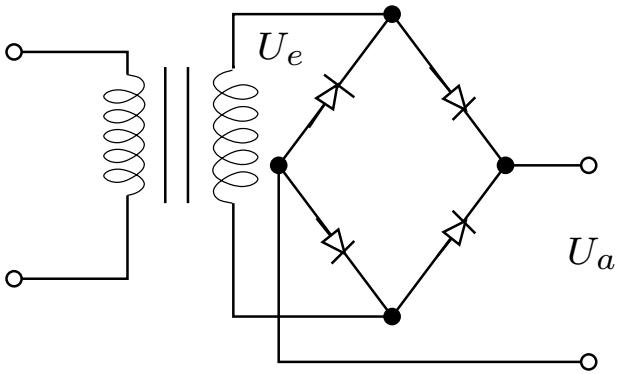
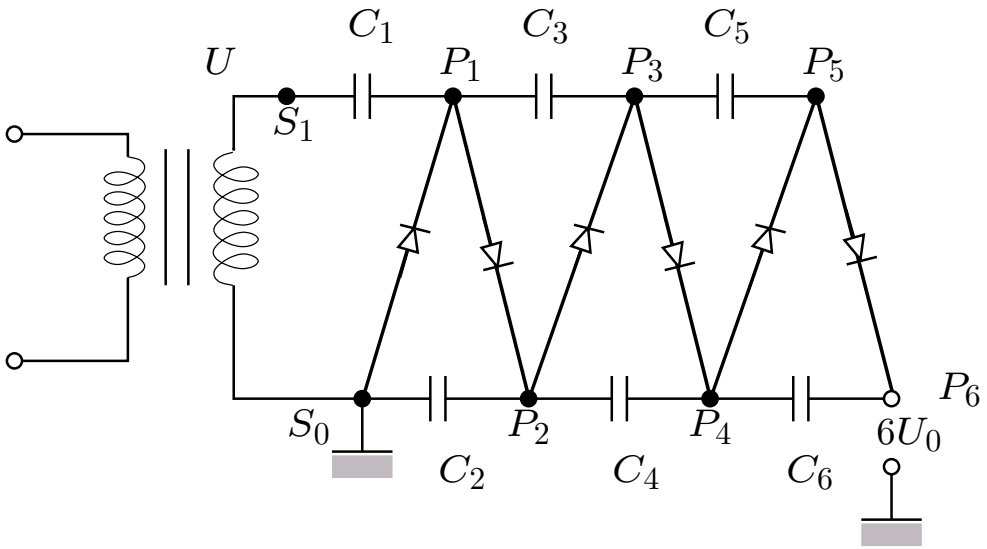
ist also nicht mehr Null, da $\phi - \Delta\phi \neq 90^\mathrm{o}$ ist.

Gleichrichtung

Für die meisten elektrischen Geräte werden Gleichspannungen und -ströme benötigt. Deshalb werden Schaltungen benötigt, die die Netzspannung (Wechselspannung!) in Gleichspannung umwandelt. Die dabei gewonnenen Spannungen bzw. Ströme sollen möglichst konstant, d. h. ohne Welligkeit, sein. Dazu werden **Gleichrichter** verwendet. Einfache Gleichrichter werden mit einer Röhrendiode oder Halbleiterdiode realisiert. Dabei wird jeweils nur die positive Halbwelle der Spannung (technische Stromrichtung: Strom fließt von Plus nach Minus) durchgelassen. Bei positiven Spannungen leitet die Diode, bei negativen sperrt sie. Bei realen Dioden fließt jedoch auch bei negativen Spannungen noch ein kleiner Strom.

Mit nur einer Diode wird immer nur die positive Halbwelle der Wechselspannung durchgelassen, die Welligkeit bei der **Einweggleichrichtung** ist daher sehr groß. Durch einen Glättungskondensator kann die Welligkeit etwas reduziert werden.

Bei der **Zweiweggleichrichtung** bildet die Mitte der Sekundärwicklung des Transformators das Bezugspotential (Erde). Die beiden Enden der Sekundärspule werden über zwei parallel geschaltete Dioden zusammengeführt und bilden damit den anderen Pol der Gleichspannung. Die Dioden leiten abwechselnd den Strom für die positive bzw. negative Halbwelle der Wechselspannung, es treten also keine Lücken wie bei der Einweggleichrichtung auf. Die maximale Gleichspannung ist $U_0/2$ bei einer Eingangsspannung mit einer Amplitude von U_0 zwischen den Enden des Transformators.

Brückenschaltung

Die heute vorwiegend verwendete Gleichrichterschaltung ist die **Graetz-Schaltung**, bei der vier Dioden in einer Brückenschaltung eingesetzt werden. Man erhält die gleiche Form wie bei der Zweiweggleichrichtung, die Spannungsamplitude beträgt aber U_0 statt $U_0/2$.