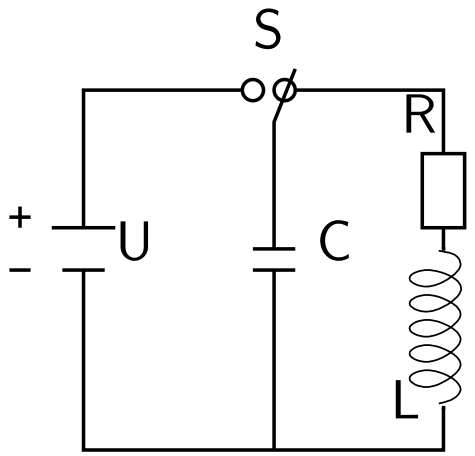
Der elektrische Schwingkreis



Nach Aufladen des Kondensators C wird der Schalter S in die hier angedeutete Lage gekippt. Dadurch fließt ein Strom durch den Widerstand R und die Spule L. Zur Zeit $t = 0$ sei die Ladung Q_0 auf dem Kondensator $Q_0 = CU_{C,0}$ und nach Kirchhoff gilt

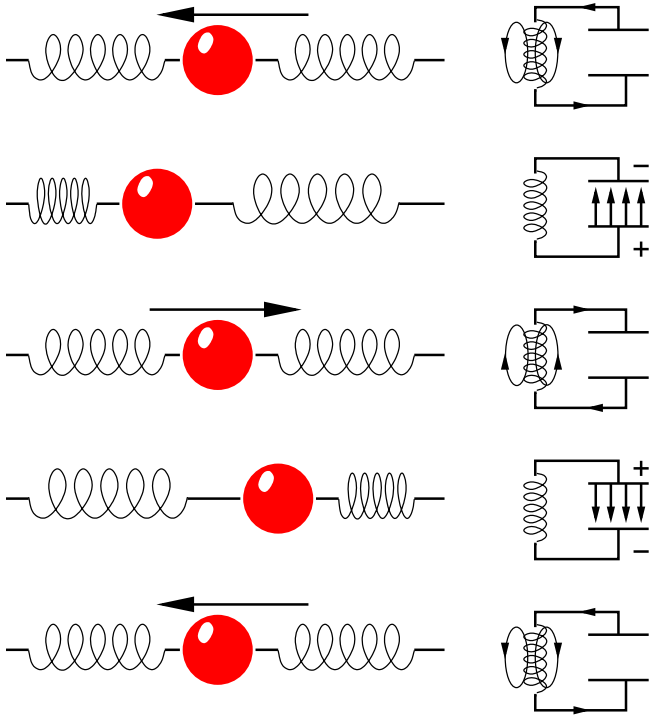
$$\begin{aligned} U_L + U_R + U_C &= 0, \quad \text{bzw.} \\ L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + \frac{Q}{C} &= 0. \end{aligned}$$

Weil aber $I = dQ/dt$, gilt

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0,$$

eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sog. Schwingungsgleichung für die im Kondensator gespeicherte Ladung. Mit $Q = CU$ erhalten wir genau dieselbe Gleichung für die Spannung über dem Kondensator. Differenzieren wir die Gleichung noch einmal nach der Zeit, so erhalten wir dieselbe Struktur, aber für den Strom, der durch die Spule fließt. Wir können auch $U_R = RI$ verwenden und erhalten so dieselbe Gleichung für die Spannung über dem Widerstand. Nochmaliges Ableiten nach der Zeit und Verwenden von $dI/dt = U_L/L$ ergibt dieselbe Gleichung für U_L. Wir erhalten also für alle auftretenden Größen eine Schwingungsgleichung!

Der elektrische Schwingkreis II



Mechanisches Analogon zur Schwingung im elektrischen Schwingkreis. Der kinetischen Energie (Bewegung) der Masse m entsprich die in der Spule gepeicherte magnetische Energie, $W_L = 1/2LI^2$ (vom Strom (bewegte Ladung)), der in der Feder gespeicherten potentiellen Energie entspricht die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie $W_C = \frac{1}{2}CU^2$. Im elektrischen Schwingungskreis findet also eine Umwandlung von magnetischer Energie in der Spule in elektrische Energie im Kondensator und umgekehrt statt. Der Strom entsteht durch die hin und her bewegte Ladung.

Lösung der Schwingungsgleichung

Zur Lösung erinnern wir uns an die entsprechenden Lektionen im Wintersemester, siehe Physik I: V3 und V8. Dort haben wir die Auslenkung einer Feder untersucht und gefunden, dass sie zu einer harmonischen Schwingung führt. Die folgenden Seiten sind deshalb direkt aus V3 und V8 übernommen.

Physik I: V3: Bewegungsgleichung für die Auslenkung einer Feder

Wir wollen die Gleichung

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x$$

lösen. Sie beschreibt einen äußerst wichtigen Modellfall der Physik, den sog. harmonischen Oszillator. Sie kann auf zwei äquivalente Arten, mit zwei äquivalenten Ansätzen, gelöst werden,

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$$

oder

$$x(t) = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t}.$$

Weil die Lösung reell sein muss, muss im zweiten Fall B gleich dem Konjugiertkomplexen von A sein, $B = \bar{A}$.

Physik I: V3: Bewegungsgleichung für die Auslenkung einer Feder II

Die Werte für A und B folgen aus den **Anfangsbedingungen** $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$,

$$\begin{aligned} x_0 &= Ae^{i\omega t_0} + Be^{-i\omega t_0} \\ \dot{x}_0 &= Ai\omega e^{i\omega t_0} - Bi\omega e^{-i\omega t_0}. \end{aligned}$$

Löse erste Gleichung nach A auf, setze in zweite Glg. ein und löse nach B auf

$$\begin{aligned} A &= \left(x_0 - Be^{-i\omega t_0}\right) e^{-i\omega t_0} \quad \text{in} \quad \dot{x} \\ \dot{x} &= i\omega \left(x_0 - Be^{-i\omega t}\right) e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t_0} - i\omega B e^{-i\omega t_0} \\ \dot{x} &= i\omega x_0 - 2i\omega B e^{-i\omega t_0} \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{i\dot{x_0}}{\omega} + x_0\right) e^{i\omega t_0}.$$

Dies setzen wir in die Gleichung für A ein

$$\begin{aligned}
A &= \left(x_0 - Be^{-i\omega t_0}\right) e^{-i\omega t_0} \\
A &= \left(x_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{i\dot{x_0}}{\omega} + x_0\right) e^{i\omega t_0} e^{-i\omega t_0}\right) e^{-i\omega t_0} \\
A &= \left(\frac{x_0}{2} - \frac{i}{2}\frac{\dot{x_0}}{\omega}\right) e^{-i\omega t_0} \quad \text{und} \\
B &= \left(\frac{x_0}{2} + \frac{i}{2}\frac{\dot{x_0}}{\omega}\right) e^{i\omega t_0}
\end{aligned}$$

Physik I: V8: Gedämpfte Schwingungen

Reibungsverluste z. B. in Luft oder in einer Flüssigkeit führen zu einer Dämpfung einer Schwingung. Zur rücktreibenden Kraft $\vec{F} = -D\vec{x}$ kommt z. B. die Reibungskraft nach Stokes dazu, $\vec{F}_R = -6\pi\eta r\vec{v} = -b\vec{v}$, die proportional zur momentanen Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Massenpunktes (oder des Pendels) ist. Die Bewegungsgleichung (Schwingungsgleichung) lautet nun

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - Dx,$$

welche oft vereinfacht geschrieben wird

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{wo} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m} \quad \text{und} \quad 2\gamma = \frac{b}{m}.$$

Ansatz $x(t) = c\ \exp(\lambda t)$ und Einsetzen in die Schwingungsgleichung:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Die allgemeinste Lösung lautet nun

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{i(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2}t} + C_2 e^{-i(\gamma^2-\omega_0^2)^{1/2}t}\right).$$

Eine reelle Lösung ist wieder nur möglich, wenn C_1 und C_2 konjugiert komplex sind. Offensichtlich spielt das Verhältnis der rücktreibenden Kraft zur Reibungskraft für die Natur der Schwingung eine entscheidende Rolle.

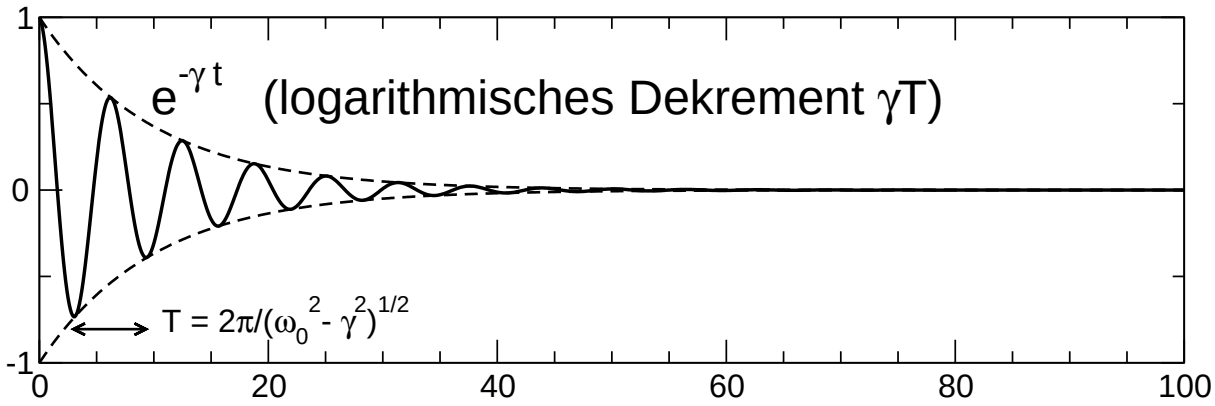
$\gamma < \omega_0$	schwache Dämpfung
$\gamma = \omega_0$	aperiodischer Grenzfall
$\gamma > \omega_0$	starke Dämpfung

Physik I: V8: Schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0$

Definiere $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, womit $\lambda = -\gamma \pm i\omega$. Damit

$$x(t) = e^{-\gamma t}(Ce^{i\omega t} + \bar{C}e^{-i\omega t}) = Ae^{-\gamma t}cos(\omega t + \phi), \text{weil}$$

C als $|C|e^{i\phi}$ und $\bar{C}$ als $|C|e^{-i\phi}$ geschrieben werden kann. Dies beschreibt eine gedämpfte Schwingung, deren Amplitude exponentiell abnimmt, A exp$(-\gamma t)$.



Der elektrische Schwingkreis II

Für die Ladung im Kondensator haben wir die Schwingungsgleichung

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0$$

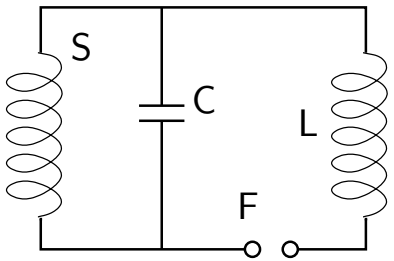
erhalten. Damit

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{R}{2L}, \quad \text{Dämpfungskonstante} \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,. \end{aligned}$$

Wie im mechanischen Analogon die kinetische Energie und die potentielle Energie gegeneinander phasenverschoben sind, sind es im elektrischen Fall der Strom in der Spule und die Ladung (Spannung, $Q = C \cdot U$) auf dem Kondensator. Dies sieht man der Gleichung für den Strom nicht an. Sie sieht genau gleich aus, wie die für die Ladung auf dem Kondensator. Die Phasenverschiebung steckt in den Anfangsbedingungen.

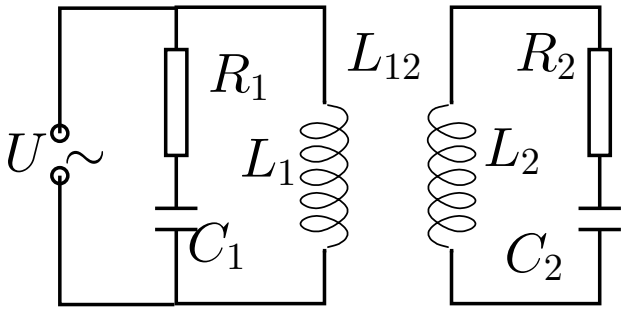
Bitte: Wiederholen Sie den Stoff aus Physik I zum Thema Schwingungen!

Schnell aufeinander folgende gedämpfte Schwingungen



Alle elektrischen Schwingungen sind wegen des Ohmschen Widerstands aller "normalen" Leiter gedämpft. Im Beispiel links lädt die Sekundärspule S den Kondensator C auf, bis die Durchschlagsspannung über der Funkenstrecke F erreicht ist. Dann schwingt der rechte Schwingkreis, wegen des hohen Widerstands der ionisierten Luft aber stark gedämpft. Dann wird C wieder durch S aufgeladen, das Spiel des **Funkeninduktors** beginnt von vorne. Diese Anordnung ist heute bedeutungslos - sie hatte aber Anfang des 20. Jahrhunderts eine enorme Bedeutung. Guglielmo Marconi gelang damit erstmals die drahtlose Übertragung von Morsezeichen - der erste Funkverkehr. Dies ist der Ursprung von "Funken". Beim Morsen wird der Strom durch die Primärspule (nicht gezeigt) unterbrochen, was eine Spannungsspitze in der Sekundärspule hervorruft.....

Gekoppelte Schwingungen



Auch elektrische Schwingkreise können aneinander gekoppelt werden, z. B. durch eine induktive Kopplung (Anordnung links), aber auch durch kapazitive (durch einen Kondensator) oder galvanische Kopplung (durch einen Widerstand). Für die induktiv gekoppelte Anordnung links muss das folgende gekoppelte Differentialgleichungssystem erzwungener Schwingungen gelten[1]:

$$\begin{aligned} L_1\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}t^2} + R_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + \frac{I_1}{C_1} &= -L_{12}\frac{\mathrm{d}^2 I_2}{\mathrm{d}t^2}, \\ L_2\frac{\mathrm{d}^2 I_2}{\mathrm{d}t^2} + R_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + \frac{I_2}{C_2} &= -L_{12}\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}t^2}. \end{aligned}$$

[1] Die zweite Ableitung des Stroms auf der rechten Seite kommt daher, dass wir die ursprüngliche Gleichung für die Spannung noch einmal nach der Zeit differenziert haben.

Wir lösen das System mit dem Ansatz $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$, was die Differentialgleichungen oben in ein System gewöhnlicher Gleichungen verwandelt:

$$\begin{aligned}\left(-L_1\omega^2 + iR_1\omega + \frac{1}{C_1}\right) I_1 - \omega^2 L_{12} I_2 &= 0,\\ \left(-L_2\omega^2 + iR_2\omega + \frac{1}{C_2}\right) I_2 - \omega^2 L_{12} I_1 &= 0.\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem für I_1 und I_2 hat nur eine von Null verschiedene Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante gleich Null ist.[2]

[2] Normalerweise hat das Gleichungssystem eine Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschieden von Null ist! Hier muss sie gleich Null sein, weil es sich um ein homogenes Gleichungssystem handelt. Achtung, zur Bestimmung der Determinante müssen die $I1$ und I_2 im Gleichungssystem übereinander stehen.

$$\left[i\omega R_1 + \left(-\omega^2 L_1 + \frac{1}{C_1}\right)\right] \cdot \left[i\omega R_2 + \left(-\omega^2 L_2 + \frac{1}{C_2}\right)\right] = \omega^4 L_{12}^2.$$

Diese quartische Gleichung bestimmt die Resonanzfrequenz ω der gekoppelten Schwingkreise. Quartische Gleichungen sind in der Regel eher mühsam zu lösen, weshalb wir hier einen vereinfachten Spezialfall $R_1 = R_2 = 0, L_1 = L_2 = L$ und $C_1 = C_2 = C$ betrachten,

$$\begin{aligned}\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right) \cdot \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right) &= \omega^4 L_{12}^2, \\ \omega^4 L^2 - 2\frac{L\omega^2}{C} + \frac{1}{C^2} &= \omega^4 L_{12}^2.\end{aligned}$$

Dieses System ist nun quadratisch in ω^2 und lässt sich elementar lösen,

$$\begin{aligned} w^4 L^2 - 2\frac{\omega^2 L}{C} + \frac{1}{C^2} &= \omega^4 L_{12} \\ \omega^4 \left(L^2 - L_{12}^2\right) - 2\omega^2 \frac{L}{C} + \frac{1}{C^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\frac{2L}{C} \pm \sqrt{\frac{4L^2}{C^2} - 4\frac{L^2 - L_{12}^2}{C^2}}}{2\left(L^2 - L_{12}^2\right)} = \frac{L}{C} \cdot \frac{1 \pm \frac{L_{12}}{L}}{L^2\left(1 - (L_{12}/L)^2\right)} \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 \pm k}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}, \quad \text{wo } k = \frac{L_{12}}{L}. \end{aligned}$$

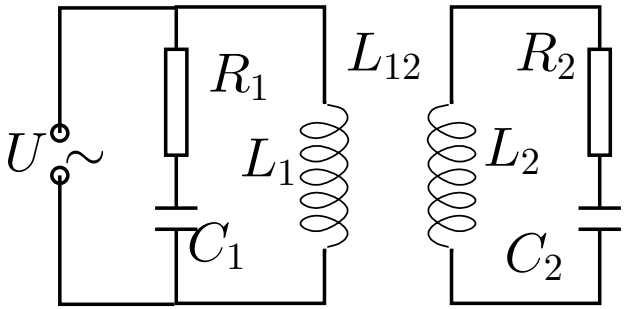
k ist der Kopplungsgrad der beiden Schwingungen, der die Frequenz des ungekoppelten Systems, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, in zwei Frequenzen ω_1 und ω_2 aufspaltet, völlig

analog zum mechanischen Analogon der gekoppelten Pendel. Die Aufspaltung ist für kleine Kopplungsgrade k proportional zu k,

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} - \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \approx \omega_0 + \frac{\omega_0}{2}k - \left(\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}k\right) = \omega_0 k.$$

Zwei überlagerte Schwingungen mit annähernd derselben Frequenz führen zum Phänomen der Schwebung (siehe Physik I).

Erzwungene gekoppelte Schwingung

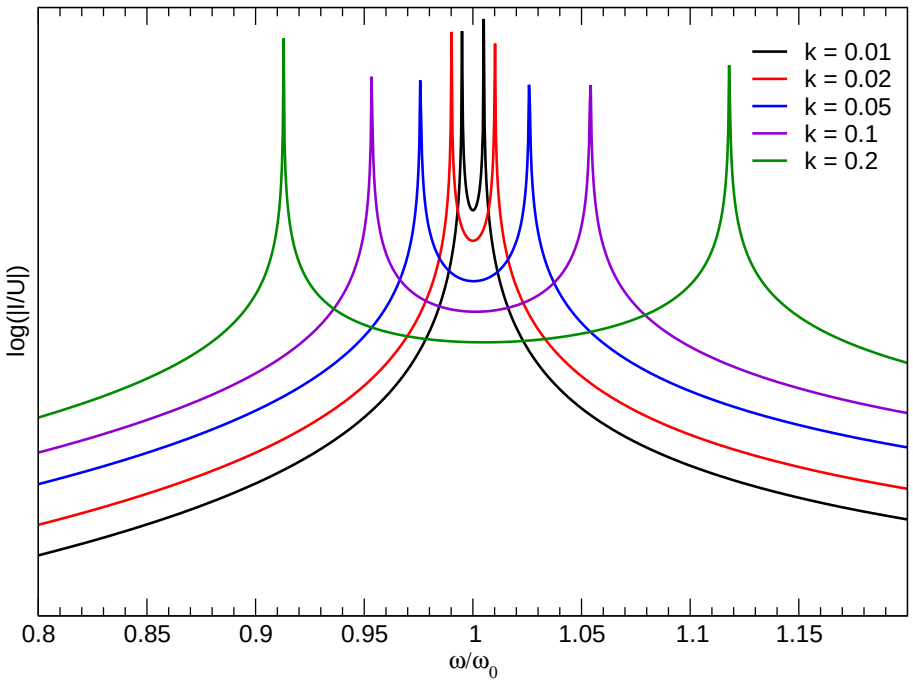


Legen wir nun an den linken (ersten) Schwingkreis in der Abbildung links eine Wechselspannung $U = U_0 e^{i\omega t}$, so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} Z_1 I_1 + i\omega L_{12} I_2 &= U, \\ Z_2 I_2 + i\omega L_{12} I_1 &= 0, \end{aligned}$$

wo $Z_i = R_i + i(\omega L_i - 1/\omega C_i)$ die komplexen Widerstände der beiden Kreise sind und wir durch $i\omega$ dividiert haben. Wir eliminieren I_1 und erhalten

$$\frac{I_2}{U} = \frac{-i\omega L_{12}}{Z_1 Z_2 + \omega^2 L_{12}}.$$



Für den vorhin diskutierten verlustfreien Fall ($R_1 = R_2 = 0, L_1 = L_2 = L$ und $C_1 = C_2 = C$) ergibt sich

$$\left|\frac{I_2}{U}\right| = \left|\frac{\omega^3 k/L}{\omega^4(1-k^2) - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4}\right|,$$

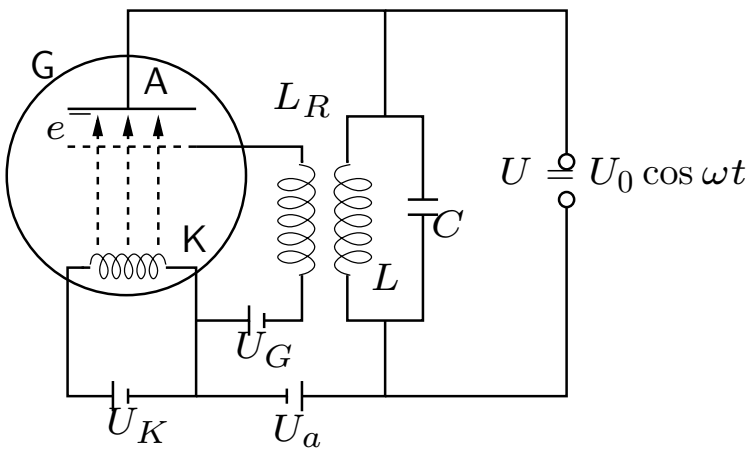
wo ω_0 die Eigenresonanzfrequenz des ungekoppelten Schwingkreises ist. Die Abbildung links zeigt das Verhalten. Die beiden Frequenzen ω_1 und ω_2 sind klar sichtbar, für kleine Kopplungsgrade k liegen sie gerade um einen Faktor k auseinander.

Ungedämpfte Schwingungen

Der bei allen Schwingkreisen vorhandene Ohmsche Verlust führt unweigerlich zu einer gedämpften Schwingung. Um also eine Schwingung ungedämpft schwingen zu lassen, muss von außen Energie zugeführt werden, gewöhnlich mit sog. Verstärkern. Die Energie muss aber auch im richtigen Moment zugefügt werden, der Schwingkreis muss also mit dem Verstärker rückgekoppelt werden. Nun ist es möglich, dieses rückgekoppelte Signal gerade als Eingangssignal für den Verstärker zu brauchen, so dass er sich "von selbst hochschaukelt". Die Zutaten lauten also: Verstärkung, Rückkopplung, Selbsterregung.

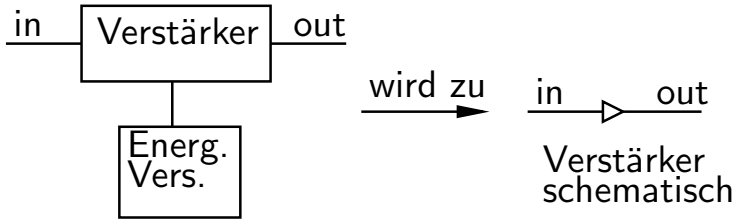
Der Verstärker kann formal als Vierpol aufgefasst werden, in der Regel wird er aber einfach als Dreieck in die Leitung gezeichnet. Die Spitze zeigt die Seite mit dem verstärkten Signal an.

Meißnersche Schaltung



Als Beispiel für eine Verstärkerschaltung mag die Meißnersche Schaltung stehen. Hier wird durch die induktive Kopplung zwischen der Schwingkreisspule L und der Rückkopplungsspule L_R die Stromzufuhr aus der externen Gleichspannungsquelle U_a gesteuert. Eine Schwingung im LC-Schwingkreis induziert in der Rückkopplungsspule L_R einen Wechselstrom, welcher die negative Vorspannung U_G des Gitters in der Triode in einer Weise moduliert, dass die von der Kathode K ausgehenden Elektronen die Anode A je nach Phase erreichen können oder eben nicht. Fließen die Elektronen, so fließt nun auch ein Strom durch den LC Schwingkreis, welcher, korrekte Phaseneinstellung vorausgesetzt, in Phase mit der ursprünglichen Schwingung ist. Damit wird die ursprüngliche Schwingung verstärkt. Sind alle Phasen richtig

eingestellt, so entsteht am Ausgang eine stabile Schwingung $U = U_0 \cos \omega t$.



Die komplizierten Innereien eines Verstärkers interessieren uns in der Regel nicht. Deshalb wird er schematisch auch wesentlich einfacher, durch ein Dreieck, dargestellt.

Verstärker

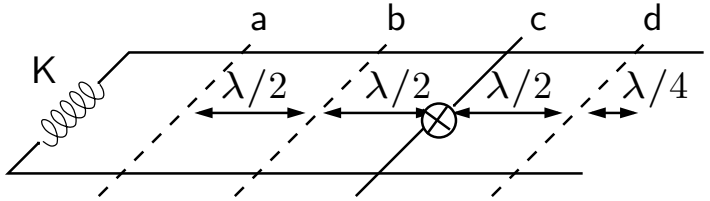
Formal sind alle Verstärker Vierpole. Eine Spannung U_{in} wird verstärkt zu einer Spannung U_{out}, das braucht vier Leitungen. Weil aber oft die einen Pole geerdet sind, können sie zusammengefasst und weggelassen werden. Der **Verstärkungsfaktor** $V_U \doteq U_{out}/U_{in}$ gibt an, um wieviel die Spannung verstärkt wird. Ähnlich gibt es auch Verstärkungsfaktoren für den Strom V_I und für die Leistung V_P,

$$V_P = V_U \cdot V_I$$

In der Regel wird ein Verstärker als Strom- oder Spannungsverstärker benannt, je nachdem, welche Verstärkung größer ist. Es versteht sich von selbst, dass dann die andere Größe immer noch groß genug sein soll, dass auch $V_P > 1$.

Elektromagnetische Drahtwellen

Soweit haben wir immer angenommen, dass sich die Signale in den Schwingkreisen etc. instantan fortpflanzen und haben die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit vernachlässigt. Bei sehr hohen Frequenzen treten nun neue Phänomene auf, die auf die Endlichkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit zurückzuführen sind. Ein solches Phänomen kann mit Hilfe der sog. **Lecher-Leitung** anschaulich gezeigt werden.



Zwei Drähte der Länge l sind im Abstand $d \ll l$ parallel zueinander aufgespannt. An der Kopplungsschleife K wird die Leitung induktiv an den Schwingkreis eines HF-Generators angekoppelt. Die Spannung $U(t, z)$ über den Drähten ist nun sowohl vom Ort (z-Achse entlang den Drähten) wie auch von

der Zeit abhängig. Analog zu anderen eindimensionalen Wellen gilt

$$U(t, z) = U_0 \sin(2\pi f(t - z/v)).$$

Ist die Leitung beliebig lang, so beschreibt dies eine von links nach rechts wandernde Welle mit Phasengeschwindigkeit v und Wellenlänge $\lambda = v/f$. Trifft die Welle auf den rechten Rand der Leitung, so wird sie dort reflektiert, auch wieder völlig analog zum mechanischen Fall der im Seil reflektierten Welle beim freien (offenen) bzw. beim festgehaltenen (geschlossenen) Ende. Bei offenem Leitungsende addieren sich einfallende und reflektierte Welle zu einem Spannungsbauch, bei geschlossenem Leiterende wird ein Spannungsknoten erzwungen.

Lecherleitung

Bei der Lecherleitung sind nun beide Enden geschlossen. Ist die Länge l ein geradzahliges Vielfaches von $\lambda/4$, so entsteht eine räumlich stehende Welle, die aber zeitlich oszilliert. Die Spannungsbäuche wechseln ja ständig ihr Vorzeichen. Das heißt aber, dass im Draht auch Ströme fließen müssen. Die Strombäuche liegen an den Orten der Spannungsknoten und umgekehrt, sie sind also um eine Viertelwellenlänge gegen die Spannung versetzt. Dasselbe gilt auch mit der Zeit, die Maximalwerte im Strom treten gegenüber der Spannung um eine Viertelperiode versetzt auf.

Das Auflegen der Glühbirne erzwingt an diesem Ort einen Spannungsknoten, also einen Strombauch. Durch Hin- und Herfahren können wir die Orte ermitteln, die zu besonders ausgeprägten Strombäuchen führen. Die Lampe leuchtet dort hell auf. Die Abstände dieser Orte betragen jeweils $\lambda/2$. Mit Kenntnis der Frequenz ergibt sich daraus die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Signalübertragung in Leitern

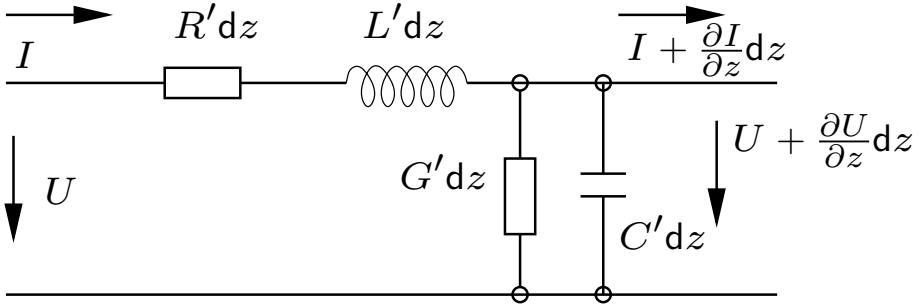
Hochfrequente Signale in Leitern unterliegen Effekten, die bei niedrigen ("gewöhnlichen") Frequenzen nicht auftreten. Ein solcher Effekt ist der Skin-Effekt; der Strom fließt nicht mehr homogen durch den Leiter, sondern konzentriert sich auf die Leiteroberfläche. Unterteilen wir in Gedanken einen Leiter in lauter dünne Leiterfäden, jeder mit seinem Eigenwiderstand und seiner Eigeninduktivität, so haben die Fäden im Innern eine wesentlich höhere Gegeninduktivität mit ihren Nachbarn als die Fäden außen am Leiter. Deshalb ist der induktive Widerstand außen kleiner als innen, und damit fließt außen mehr Strom als innen im Leiter.

Signale in realen Leitern

Die oft verwendeten Doppelleiter haben die längenspezifischen Eigenschaften:

- ohmscher Widerstand,
- Induktivität
- Kapazität,
- Querleitwert (Stromleitung durch Isolation in anderen Leiter).

Damit ergibt sich für einen Leiter ein Ersatzschema:



und die zu erfüllenden Beziehungen:

$$\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z = -\left(R'I + L'\frac{\partial I}{\partial t}\right)\mathrm{d}z$$

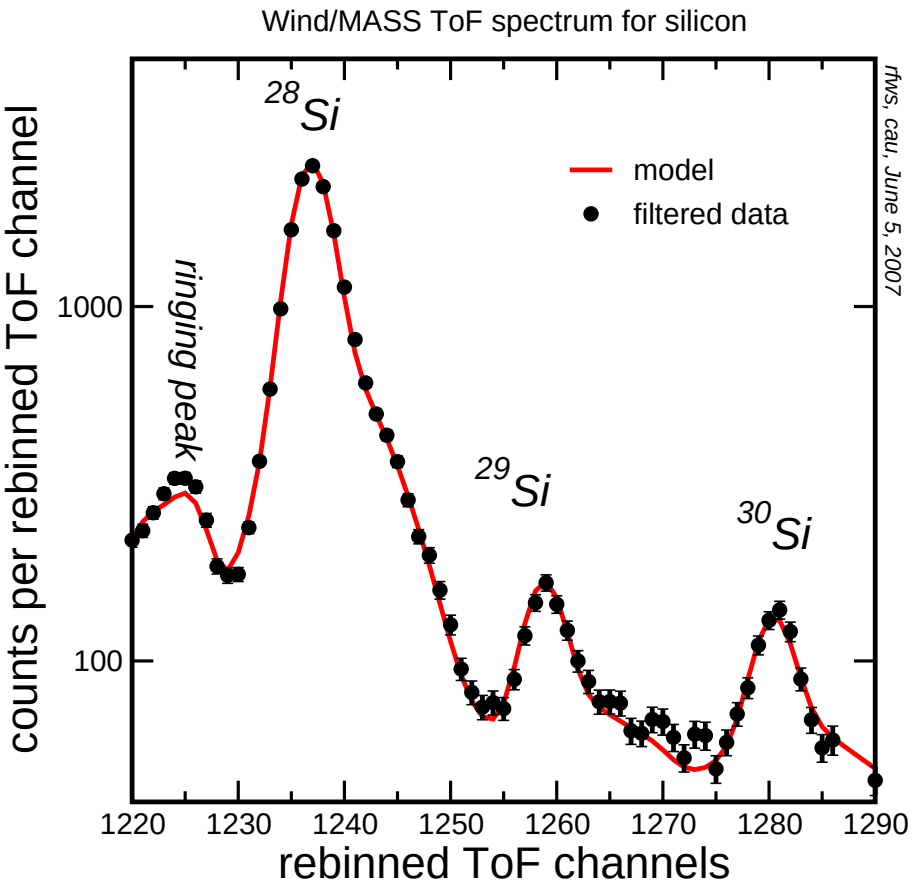
$$\frac{\partial I}{\partial z}\mathrm{d}z = -\left(G'I + C'\frac{\partial I}{\partial t}\right)\mathrm{d}z.$$

Die beiden Gleichungen koppeln die Spannung und den Strom aneinander. Eine zeitliche Stromänderung ruft eine räumliche Spannungsänderung hervor und umgekehrt. Die Kopplung kann umgangen werden, indem man beide Gleichungen nach dem Ort (z) bzw. der Zeit ableitet und die entstehenden Gleichungen geeignet verbindet. Man erhält dann zwei separierte Differentialgleichungen, eine für die Spannung und eine für den Strom.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = R'G'U + (R'C' + L'G')\frac{\partial U}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

beschreibt in entkoppelter Weise die Spannung und heißt aus historischen Gründen **Telegraphengleichung**. Ihre Lösung ist nicht einfach und übersteigt den Rahmen dieser Einführungsvorlesung.

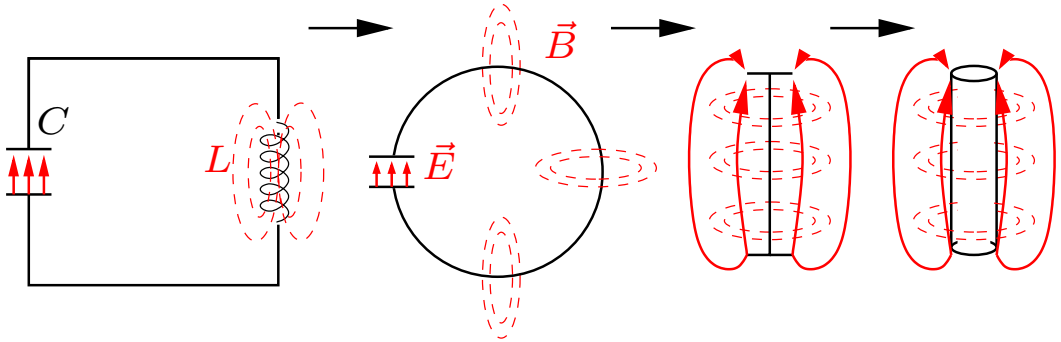
Dimensionierung von Leitungsimpedanzen



Die soeben besprochenen Eigenschaften erfordern bei der Messung mit schnellen Signalen eine sorgfältige Abstimmung der Last- und Leitungsimpedanzen. Stimmen am Ende einer Signalleitung Last- und Leiterimpedanz nicht überein, so führt dies dazu, dass ein Teil des Signals am Übergang reflektiert wird, was zu unerwünschten "Ringing"-Effekten führen kann .

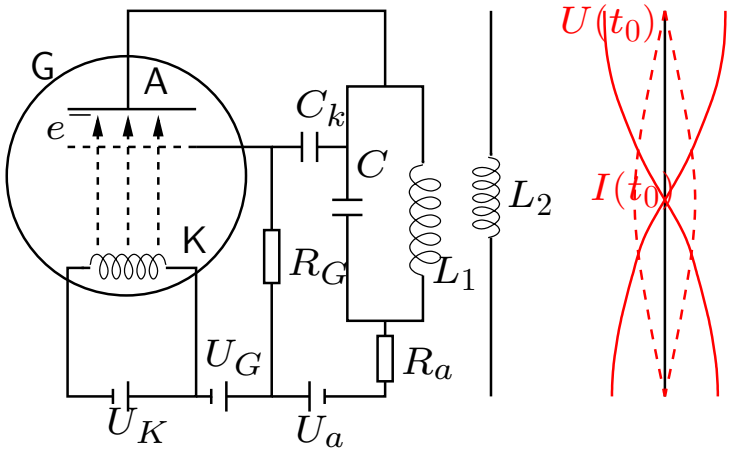
Der Hertzsche Dipol

Wir werden heute den Übergang zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern in Schwingkreisen und den elektromagnetischen Feldern von Antennen bewältigen. Dazu schauen wir uns nochmals einen Schwingkreis an und deformieren ihn ein wenig.



Nun müssen wir nur noch herausfinden, wie wir Ladungen in einem Draht zum ungedämpften Schwingen anregen.

Experimentelle Realisierung



Zur Anregung einer Schwingung in einer Antenne wird diese induktiv oder kapazitiv an einen rückgekoppelten geschlossenen Schwingkreis gekoppelt. Links ist eine Anordnung mit einer Meissnerschen Schaltung zu sehen, wobei diese kapazitiv rückgekoppelt ist. Der erste Schwingkreis überträgt die Schwingung induktiv (über die Spule L_2) auf die Antenne. Darin werden nun die Ladungen zu Schwingungen angeregt. Auch hier spielt die gute Abstimmung der Impedanzen eine große Rolle. $I(t_0)$ und $U(t_0)$ sind eingezeichnet.

Das elektromagnetische Potential

Wie sieht nun das elektromagnetische Feld einer Antenne aus? Dazu stellen wir uns vor, dass die Ladungen in der Antenne hin und her schwingen, so dass sie sich immer wieder umlädt, an einem Ende ein positiver Überschuss, am anderen ein negativer, eine halbe Schwingung später umgekehrt. Die Stromdichte $\vec{j} = p\vec{v}$ der Elektronen hängt also von der Ladungsdichte p und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ dieser ab. Nun können wir nach den Überlegungen zum Vektorpotential $\vec{A}$ schreiben

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\vec{j}(\vec{r}_2)\mathrm{d}V_2}{r_{12}},$$

wo $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ der Abstand zwischen dem Punkt 1 im Raum und der Ladung $\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V_2$ Punkt 2 in der Antenne bedeutet.

Nun ist noch eine Schwierigkeit zu bewältigen. Bisher hatten wir immer vorausgesetzt, dass die Felder sich instantan aufbauen. Wir hatten die Zeit

$\Delta t = r_{12}/c$, die ein Feld braucht, um vom Leiter zum Punkt P_1 zu kommen, noch nicht berücksichtigt. Diese Zeit äußert sich nun darin, dass bei einer Änderung der Ladungsverteilung dq im Punkt P_2 zum Zeitpunkt t das Feld etwas "verspätet" zu einer Zeit $t - r_{12}/c$ im Punkt P_2 ankommt. Wir verwenden deshalb das sog. **retardierte** Potential

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\vec{j}(\vec{r}_2, t - r_{12}/c)\mathrm{d}V_2}{r_{12}}.$$

Sind wir hinreichend weit weg von der Antenne, so dass r_{12} für alle Punkte der Antenne fast gleich groß ist und ist ferner die Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Ladungen klein gegenüber c, so können wir dieses retardierte Potential vereinfachen:

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi\, r} \int_{V_2} \vec{v}\rho(\vec{r}_2, t - r_{12}/c)\mathrm{d}V_2.$$

Der Hertzsche Dipol

Wir haben ja schon gesehen, dass in einem Leiter die beweglichen Ladungen die Elektronen sind. Damit schwingen in einer Antenne die Elektronen der Ladungsdichte ρ mit einer zeitlich variablen Geschwindigkeit hin und her. Damit verändert sich auch der Abstand d der positiven und der negativen Ladungsschwerpunkte, $d = d_0 \sin \omega t$ wenn durch den Stab ein Strom $I = I_0 \cos \omega t$ fließt. Deshalb kann die Antenne als schwingender Dipol aufgefasst werden, der sog. **Hertzsche Dipol**. Dieser hat ein zeitabhängiges Dipolmoment $\vec{\rho}$,

$$\vec{p}(t) = q\, d_0\, \sin \omega t \frac{\vec{z}}{|\vec{z}|} = q \cdot \vec{d}.$$

Die Amplitude der Dipolschwingung ist übrigens wesentlich kleiner als die Länge l der Antenne. Die Elektronen bewegen sich mit einer Geschwindigkeit $v \ll c$ in einem Viertel der Schwingperiode τ nur um $d_0 = v\tau/8 = 0,5 \cdot v/c\; l$.

Das magnetische Feld

Wir wollen nun das Magnetfeld des Hertzschen Dipols bestimmen. Dazu verwenden wir das retardierte Potential und setzen dort $q \cdot \vec{v} = q \cdot \dot{\vec{d}} = \dot{\vec{p}}$ ein,

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi\, r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{p}(t - r_{12}/c).$$

Bei der Behandlung von Wellen haben wir bereits gesehen, dass zwischen Wellenlänge, Frequenz und Phasengeschwindigkeit eine Beziehung besteht, $c = f \cdot \lambda = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$. Wir setzen dies für c ein

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \cdot d_0 \omega \frac{\cos(\omega t - kr)}{r} \frac{\vec{z}}{|\vec{z}|}.$$

Damit ist das magnetische Feld bestimmt, denn $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Die schwingende Ladung erzeugt also ein zeitlich variables Vektorpotential $\vec{A}$, welches sich mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum ausbreitet. Damit breiten sich auch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mit Lichtgeschwindigkeit in den Raum aus. Wie erwartet liegt $\vec{B}$ in der Ebene senkrecht zur Antenne. Die Berechnung von $\vec{B}$ ist etwas länglich, was wir uns ersparen wollen. Das Resultat

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\left[\left(\dot{\vec{p}}\times\vec{r}\right) + \frac{r}{c}\left(\ddot{\vec{p}}\times\vec{r}\right)\right],$$

wobei das Magnetfeld zur Zeit t natürlich durch den Dipol $\vec{p}$ zur Zeit $t - r/c$ erzeugt wird. Weil $\vec{p}$ parallel zu seinen zeitlichen Ableitungen steht, muss $\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{p}$ und $\vec{r}$ stehen.

Schauen wir uns den Ausdruck für das Magnetfeld genau an, so finden wir, dass es einen Teil aufweist, der, wie uns Biot-Savart ($\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = (\mu_0/4\pi)(\vec{j}\times\vec{r})/r^3\mathrm{d}V$) sagt, wie $1/r^2$ abfällt, der zweite Term fällt aber nur mit $1/r$ ab! Dies zeigt

uns, dass eine zusätzliche Quelle für $\vec{B}$ wirken muss. Diese kommt durch die rasche zeitliche Veränderung von $\vec{B}$ zustande, die ein Beobachter im Punkt P_1 sieht, wenn die Welle über ihn hinwegrauscht. Dieses große dB/dt erzeugt nach Faraday ein elektrisches Feld, welches wiederum einen Verschiebungsstrom erzeugt (weil ja auch das induzierte E sich sehr rasch ändert), welcher wiederum ein magnetisches Feld erzeugt. Die Zweiteilung des Magnetfeldes hätten wir auch aus den Maxwellgleichungen vorhersagen können, denn

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$