Repetition: Der Verschiebungsstrom

Die Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$

die wir für stationäre Stromverteilungen gefunden hatten, ist im zeitabhängigen Fall höchst problematisch. Nehmen wir davon die Divergenz, so haben wir

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) &= \left(\mu_0 \vec{j} \right) \\
\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \\
0 &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}, \quad \text{aber auch} \\
\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= -\dot{\rho},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile direkt aus der Kontinuitätsgleichung folgt und für zeitlich

veränderliche Ladungsverteilungen bedeutet, dass die obere Zeile unmöglich gelten kann! Maxwell hat erkannt, dass dieses Dilemma gelöst werden kann, indem man den Satz von Coulomb zu Hilfe nimmt

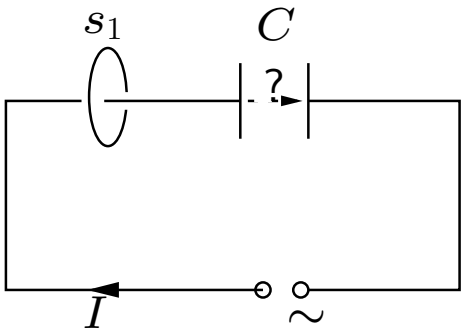
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

und ganz oben einsetzt. Das ermöglicht

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \right) = 0$$

und erfordert eine Anpassung der Gleichung für das induzierte Magnetfeld:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j}.$$



Die Größe

$$\vec{j}_V = \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}$$

heißt Verschiebungsstromdichte. Sie erklärt auch, weshalb beim Aufladen eines Kondensators entlang der Zuleitung ein Magnetfeld induziert werden kann. Natürlich fließt ein Strom, aber warum und wie? Der Stromkreis ist doch wegen des Kondensators offen! Selbst wenn wir akzeptieren, dass der Strom fließt, was passiert denn mit dem Magnetfeld im Inneren des Kondensators? Der Verschiebungsstrom regelt's. Im Innern des Kondensators herrscht ein Magnetfeld (Bartlett und Corle, Phys. Rev. Lett, **55**, 59 – 62, (1985)). Der durch den Kondensator fließende virtuelle Strom (die Ladungsänderung an den beiden Platten führt zu einer Veränderung des elektrischen Feldes) induziert ein Magnetfeld.

Magnetfelder entstehen durch Ströme und zeitlich variable elektrische Felder.

Das elektrische Feld

Das elektrische Feld können wir durch das elektrische Potential φ bestimmen. Dieses ist durch die Lorentz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

mit dem magnetischen Vektorpotential $\vec{A}$ verknüpft. Weil in unserer Geometrie für den Hertzschen Dipol das Vektorpotential $\vec{A}$ nur eine z-Komponente aufweist, ist die Divergenzbildung besonders einfach, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial A_z/\partial z$. Das elektrische Potential ergibt sich nun durch partielle Integration nach der Zeit und daraus folgt mit $\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi$ das elektrische Feld. Nun ist aber das Argument von $\vec{A}$ eine Funktion der Zeit und des Ortes, deshalb wird die eigentliche Ableitung doch etwas komplizierter. Sie enthält wegen der Produktregel mehrere Terme.

Nach etwas Rechnen findet man, dass sich $\vec{E}$ als Summe von zwei Termen schreiben lässt,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t).$$

Der erste Term entsteht direkt durch das Schwingen des Dipols und beinhaltet die Retardierung des Feldes,

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\vec{p}^{\star} + 3\left(\vec{p}^{\star}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right],$$

wo

$$\vec{p}^{\star} = \vec{p}(t - r/c) + \frac{r}{c}\dot{\vec{p}}(t - r/c).$$

Der zweite Teil stammt von dem sich ändernden Magnetfeld, steht senkrecht auf diesem und lautet

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\ddot{\vec{p}}(t - r/c)\times\vec{r}\right]\times\vec{r}.$$

Nahfeld, Fernfeld

Sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld eines Hertzschen Dipols weisen Komponenten auf, die sich wie $1/r^3$ und wie $1/r$ verhalten. Im **Nahfeld** überwiegen die Terme $\propto 1/r^3$, im **Fernfeld** die mit $1/r$. Überall führt ein sich änderndes elektrisches Feld zu einem magnetischen und umgekehrt.

Abstrahlung des Hertzschen Dipols, der Poyntingvektor

Der Energiefluss, der von einem schwingenden Dipol ausgeht, lässt sich nun berechnen. Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(E^2 + c^2 B^2\right) = \varepsilon_0 E^2.$$

Diese Energiedichte fließt mit Lichtgeschwindigkeit und damit lässt sich der Energiefluss (Energiestromdichte) S leicht angeben, $S = w \cdot c = \varepsilon_0 \cdot c \cdot E^2$. Da $\vec{E}$ senkrecht auf $\vec{B}$ und beide senkrecht auf $\vec{r}$ stehen, steht $\vec{E} \times \vec{B}$ parallel zu $\vec{r}$. Der **Poyntingvektor**

$$\vec{S} \doteq \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0 = \vec{E} \times \vec{H}$$

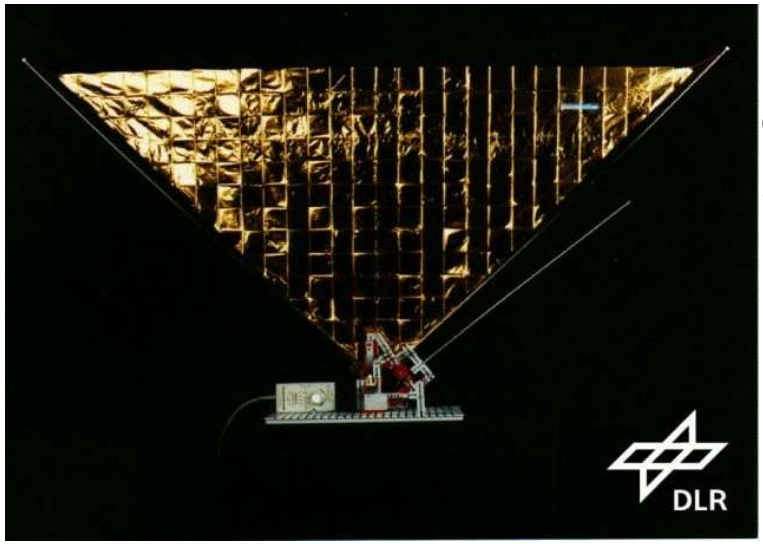
zeigt in Richtung des Energieflusses und gibt die Leistung pro Fläche in W/m^2 an.

Übungen:

- Wie groß ist die von der Sonne total abgestrahlte Leistung?
- Wie groß ist das elektrische und das magnetische Feld von Sonnenlicht bei der Erde und an der Sonnenoberfläche?
- Wie vergleichen sich diese mit denen einer 100 W Glühbirne?

Tipp: Solarkonstante $S = 1367$ W/m^2 verwenden, wo sinnvoll vereinfachen.

Poyntingvektor II



Der durch den Poyntingvektor beschriebene Energiefluss kann auch anders aufgefasst werden. Die Energiedichte $w = \varepsilon_0 E^2$ entspricht auch einem Druck,

$$[w] = \mathrm{J}\ /\mathrm{m}^{-3} = \mathrm{N\ m}\ /\ \mathrm{m}^{-3} = \mathrm{N/m}^{-2} = [P].$$

Der Druck entspricht aber auch einer Impulsübertragung. Absorbiert ein Körper ein Photon (Lichtquant), so wird ihm ein Impuls $p = E_\gamma/c$ übertragen, wo $E_\gamma = h\nu$ die Energie des Photons ist. Man spricht deshalb auch von Strahlungsdruck, der z. B. auf kleine Teilchen mit einer Ausdehnung von etwa der Wellenlänge von Licht eine ganz wesentliche Kraft ausübt oder für das sog. solar sailing ausgenutzt werden soll.

Strahlung gedämpfter Oszillatoren

Die Abstrahlung elektromagnetischer Strahlung entspricht einem Energieverlust und führt deshalb zu einer Dämpfung der Schwingung. Die abgestrahlte Leistung nimmt mit der Zeit exponentiell ab. Wir wollen uns überlegen wie das Spektrum der abgestrahlten Leistung aussieht. Sie kann, wie esprochen, geschrieben werden als

$$S = \varepsilon_0 \cdot c \cdot E^2.$$

Im Fernfeld wird E dominidert durch den ersten Term von E_2. Für einen Polwinkel ϑ lautet dieser Beitrag

$$|\vec{E}_2)r, \vartheta, \varphi)| = \frac{\ddot{p}(t - r/c) \sin \vartheta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}.$$

Im Fernfeld erscheint jede Quelle kugelsymmetrisch und damit fließt durch jedes Flächenelement $\mathrm{d}F = r^2 \sin\vartheta \ \mathrm{d}\vartheta \ \mathrm{d}\varphi$ eine Leistung $\mathrm{d}P = S \cdot \mathrm{d}F$, insgesamt also

das Integral dieser Größe über eine Kugeloberfläche. Man erhält

$$P = \oint \vec{S} \cdot \mathrm{d}\vec{F} = \frac{q^2\ d_0^2\ \omega^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \sin^2\left(\omega(t - r/c)\right).$$

Über eine längere Zeit gemittelt ergibt sich mit $\bar{\sin^2} x = 1/2$

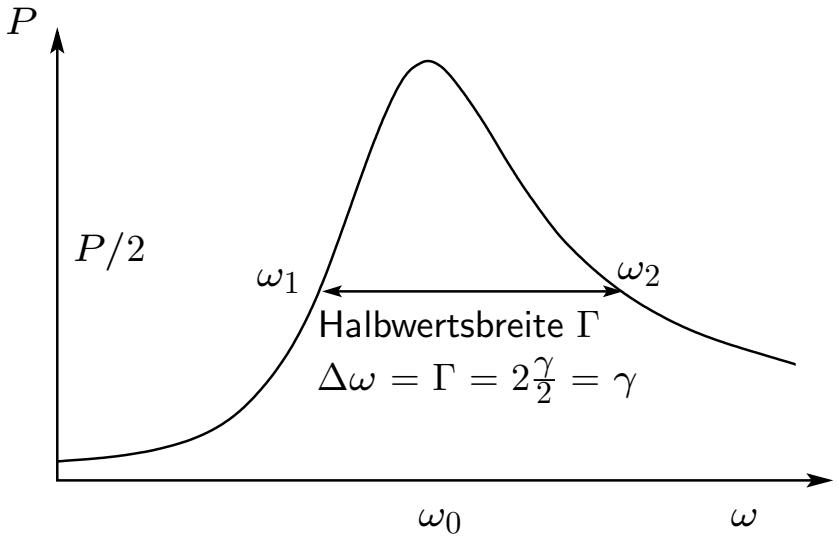
$$\bar{P} = \frac{q^2\ d_0^2\ \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}, \quad \text{wo} \quad d_0 \ \text{über die Schwingungsgleichung} \ \ \ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{q}{m} e^{i\omega t}$$

bestimmt werden kann. Wie wir jetzt gelernt haben, setzen wir $z = z_0 \exp\left(i\omega t\right)$ an und erhalten für die Amplitude z_0

$$z_0 = \frac{q}{m}\ \frac{E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma}, \quad \text{wo} \quad \gamma = 2\beta.$$

Mit $|z_0|^2 = d_0^2$ erhalten wir schließlich

$$\bar{P} = \frac{q^4\ \omega^4 E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} \cdot \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$



Das Frequenzspektrum der abgestrahlten Leistung zeigt eine Resonanz bei der Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators. Die Abstrahlung führt zu einer Abnahme der Schwingungsamplitude $z = d_0 \exp(-\beta t) \exp(i\omega t)$ der erzwungenen Schwingung. Die Hälfte des Maximums wird bei $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \gamma^2\omega^2$ erreicht, d. h. bei $\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2/4} \pm \gamma/2$.

Strahlungsfeld beschleunigter Ladungen

Der Hertzsche Dipol ist natürlich nur ein einfacher Spezialfall für die Abstrahlung eines elektromagnetischen Feldes durch beschleunigte Ladungen. Die zweite Ableitung nach der Zeit des zeitlich veränderlichen Dipolmoments $\ddot{\vec{p}}$ muss hier einfach durch die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit, die Beschleunigung $\vec{a} = \ddot{\vec{d}}$ ersetzt werden.

Animationen finden sich unter
`http://www.cco.caltech.edu/~phys1/java/phys1/MovingCharge/MovingCharge.`

Diese Abstrahlung ist die Ursache für Röntgenstrahlung (entsteht durch starke Abbremsung energiereicher Elektronen, daher **Bremsstrahlung** genannt) oder für die Synchrotronstrahlung.

Repetition: Die Maxwell-Gleichungen

Die Maxwellgleichungen lauten in differentieller Form

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Zusammen mit der Gleichung für die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)$$

beschreiben sie alle elektromagnetischen Phänomene.

Elektromagnetische Wellen: Die Wellengleichung

Im Vakuum verschwinden die Ladungs- und Stromdichten, $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$. Die Maxwellgleichungen vereinfachen sich nun zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Die obere Zeile beschreibt nun rein statische Phänomene (z. B. das Feld **zwischen** Ladungen und Strömen), jede Zeitabhängigkeit muss in den beiden unteren Gleichungen stecken. Wir wollen sie nun miteinenader verknüpfen, um eine Gleichung für das zeitliche Verhalten des elektrischen Feldes zu erhalten. Dazu bestimmen wir die Rotation der linken unteren Gleichung und setzen $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ aus

der rechten Seite ein:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Nun gilt $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{E}) =$ (grad div - Laplace) $\vec{E}$. Im Vakuum verschwindet die Divergenz des elektrischen Feldes $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ und damit erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{E}) = \Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

die **Wellengleichung** für das elektrische Feld. Sie beschreibt die Ausbreitung einer Welle im elektrischen Feld mit Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ im Vakuum. Dieselbe Gleichung für $\vec{B}$ erhält man, wenn man die Rotation der rechten unteren Gleichung von vorhin bestimmt.

Ebene Wellen

Für elektrische Felder, die nur von einer Koordinate (z. B. z) abhängen, $\partial\vec{E}/\partial x = \partial\vec{E}/\partial y = 0$, wird die Lösung besonders einfach,

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Wegen der Ladungsfreiheit des Vakuums folgt mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ auch $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$. Also kann E_z in einem geeigneten System zum Verschwinden gebracht werden und das elektrische Feld hat nur noch eine x und eine y Komponente, die beide nur von z abhängig sind. Die allgemeinste Lösung ist

$$\begin{aligned} E_x &= f_x(z-ct) + g_x(z+ct), \\ E_y &= f_y(z-ct) + g_(z+ct), \\ E_z &= 0. \end{aligned}$$

f und g sind beliebige stetig differenzierbare Funktionen mit den Argumenten $(z - ct)$ bzw. $(z + ct)$. Die Lösung beschreibt eine ebene Welle, die an allen Punkten der Ebene $z = z_0$ den gleichen Wert hat, also konstant ist, d. h. auf einer solchen Ebene sind $z \pm ct$ konstant. Damit ist klar, dass f eine nach rechts laufende und g eine nach links laufende Welle beschreibt, denn Differentiation des Arguments nach der Zeit liefert $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t - c = 0$ also $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = c$ und umgekehrt für g.

Die Lösung beschreibt **transversale** Wellen, weil der Feldvektor $\vec{E}$ senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung $\vec{z}/|\vec{z}|$ steht. Elektrische Felder sind im Vakuum transversal. In einem Medium gilt die Voraussetzung der Ladungsfreiheit nicht mehr, folglich $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$ und folglich keine Transversalität.

Periodische Wellen

Oft vereinfachen wir ebene Wellen durch ebene periodische Wellen, die sich durch Sinus- und Cosinuswellen beschreiben lassen. Dabei nennt sich die räumliche Periode Wellenlänge λ,

$$f(z + \lambda - ct) = f(z - ct).$$

Ist die Welle wirklich periodisch und lässt sich z. B. beschreiben durch $E = E_0 \sin k(z - ct)$, so muss für die Konstante k gelten

$$k \cdot \lambda = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

wo k als **Wellenzahl** bezeichnet wird. In drei Dimensionen gilt dies immer noch, nur muss k durch einen **Wellenvektor** $\vec{k}$ ersetzt werden. Die Ebenen mit

konstanter Phase stehen dann senkrecht auf $\vec{k}$, d. h. er fällt zusammen mit dem Normalenvektor der Ebenen konstanter Phase. Sein Betrag ist

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

und eine ebene Welle kann somit geschrieben werden als

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}.$$

Polarisation

Die Polarisation einer elektromagnetischen Welle ist durch die Richtung von $\vec{E}$ definiert. Dabei können vier Fälle unterschieden werden:

- linear polarisierte Wellen
- zirkular polarisierte Wellen
- elliptisch polarisierte Wellen
- unpolarisierte Wellen

Bei linear polarisierten Wellen, die sich in z-Richtung ausbreiten, schwingen die x und die y Komponenten in Phase und beschreiben deshalb eine Welle, die immer in einer Ebene liegt.

Übung: Zeichnen sie dies!

Polarisation II

Zirkular polarisierte Wellen ergeben sich, wenn die Phasen der x und der y Komponente um $\pi/2$ phasenverschoben sind,

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 e^{i(\omega t - kz)} + \text{c. c.} \\ E_y &= E_0 e^{i(\omega t - kz + \pi/2)} + \text{c. c.} \end{aligned}$$

Dann beschreibt die Spitze des Vektors $\vec{E}(z = 0, t)$ einen Kreis in der x-y-Ebene mit der Kreisfrequenz ω und die Spitze des Vektors beschreibt mit der Zeit eine Spirale um die z-Richtung. Rechtsschrauben heißen links zirkular polarisiert. . .

Elliptisch polarisierte Wellen treten auf, wenn die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen den beiden Komponenten E_x und E_y nicht 90 Grad beträgt.

Unpolarisierte Wellen liegen vor, wenn sich die Richtung des Wellenvektors zwischen zwei benachbarten Zeit- oder Raumpunkten zufällig ändert. Weil die emittierenden Dipole oft nicht ausgerichtet sind, ist dies der Normalfall.

Die Stokesschen Parameter

Das elektrische Feld einer sich in z-Richtung bewegenden monochromatischen Welle sei beschrieben durch

$$E_x = \xi_x \cos\phi, \quad E_y = \xi_y \cos(\phi + \epsilon),$$

wo $\phi = \omega t - kz$ und ϵ die Phasendifferenz zwischen E_x und E_y ist. ξ_x und ξ_y sind die Amplituden in der jeweiligen Richtung und brauchen nicht gleich zu sein, weil das Licht ja polarisiert sein kann. Äquivalent zu den die Polarisierung beschreibenden Größen ϵ, ξ_x und ξ_y kann man die Stokesschen Parameter einführen,

$$\begin{aligned} I &= \xi_x^2 + \xi_y^2, \\ Q &= \xi_x^2 - \xi_y^2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U &= 2\xi_x\xi_y \cos\epsilon, \\
V &= 2\xi_x\xi_y \sin\epsilon.
\end{aligned}
$$

Die Stokesschen Parameter sind messbare Größen und erfüllen $I^2 = Q^2+U^2+V^2$, was die Anzahl der Variablen wieder auf dieselbe Zahl einschränkt. Q und U beschreiben linear polarisiertes Licht, V zirkular polarisiertes Licht. I ist die Intensität des Lichtes. Für nicht monochromatisches Licht, wie es natürlicherweise vorkommt, muss über die Frequenzverteilung des Lichtes gemittelt werden und die resultierenden Erwartungswerte lauten

$$
\begin{aligned}
I &= \langle \xi_x^2 + \xi_y^2, \rangle \\
Q &= \langle \xi_x^2 - \xi_y^2 \rangle, \\
U &= \langle 2\xi_x\xi_y \cos\epsilon \rangle, \\
V &= \langle 2\xi_x\xi_y \sin\epsilon \rangle.
\end{aligned}
$$

Unpolarisiertes Licht hat zufällig verteilte Phasen ϵ zwischen 0 und 2π und damit verschwinden Q, U und V in diesem Fall. Ist das Licht vollständig polarisiert, so wird es durch ϵ und ξ_x/ξ_y vollständig beschrieben und es gilt $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$. Dazwischen liegt das teilweise polarisierte Licht, dessen Polarisationsgrad P durch

$$P \doteq \left(\frac{Q^2 + U^2 + V^2}{I^2} \right)^{1/2}$$

gegeben ist.

Das Magnetfeld elektromagnetischer Wellen

Wir haben nun das elektrische Feld betrachtet und das magnetische vernachlässigt, obwohl wir wissen, dass es für die Entstehung von elektromagnetischer Strahlung unumgänglich ist.

Wir betrachten nun der Einfachheit halber eine linear polarisierte Welle $\vec{E} = E_0 \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot e^{i(\omega t - kz)}$ und bestimmen die Rotation dieser nur in der x-Ebene schwingenden Welle,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = 0; \quad (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = 0; \quad (\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

Ferner wissen wir ja aus den Maxwellschen Gleichungen, dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

und damit müssen B_x und B_z zeitlich konstant sein,

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0.$$

Sie tragen deshalb zum Wellencharakter nichts bei und können durch Wahl eines geeigneten Koordinatensystems wegtransformiert werden. Also hat das Magnetfeld nur eine relevante Komponente, die y-Komponente:

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -ikE_x,$$

die sich durch zeitliche Integration dieser Gleichung bestimmen lässt:

$$B_y = ikE_0 \int e^{i(\omega t - kz)} \mathrm{d}t = \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kz)}.$$

Weil $\omega/k = c$ wird dies zu

$$|\vec{B}| = \frac{1}{c}|\vec{E}|,$$

was zur Folge hat, dass das Magnetfeld im Licht einen wesentlich kleineren Anteil am Einfluss von Licht hat. Somit steht $\vec{B}$ im Vakuum senkrecht auf $\vec{E}$ ($\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ und $\vec{B} = (0, B_y, 0)$) und beide stehen senkrecht auf der Ausbreitungrichtung $\vec{k}$,

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right).$$

Messung der Lichtgeschwindigkeit

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen im Vakuum hängt **nicht** von ihrer Frequenz ω ab. D. h. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im Vakuum sind immer gleich, es gibt keine Dispersion:

$$v_{Ph} = v_G = \frac{\omega}{k} = c.$$

Der Wert von c kann daher bei beliebigen Frequenzen bestimmt werden. Die meisten Messungen wurden bisher bei optischen Frequenzen durchgeführt. Deshalb wird c auch allgemein als **Lichtgeschwindigkeit** bezeichnet, obwohl ihr Wert für das gesamte elektromagnetische Spektrum gleich ist.

Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit mit astronomischen Methoden

Die älteste Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit basiert auf astronomischen Beobachtungen der Umlaufzeit der Jupitermonde. Diese Umlaufzeiten ließen sich mit großer Genauigkeit bestimmen. *Ole Christensen Rømer* (1644-1710) fand heraus, dass die beobachteten Umlaufzeiten gut mit Berechnungen übereinstimmten, wenn die Erde dem Juiter nahe war. Die beobachteten Verfinsterungen traten jedoch 22 Minuten zu spät ein, wenn der Jupiter in Konjunktion stand. Mit dem bereits gut bekannten Durchmesser der Erdbahn ($D = 3 \cdot 10^{11}$m) konnte Rømer die Lichtgeschwindigkeit bestimmen:

$$c = \frac{3 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}{22 \cdot 60\ \mathrm{s}} = 2,3 \cdot 10^{8}\mathrm{m/s}.$$

Zahnradmethode von Fizeau

Armand Fizeau (1819-1896) konnte die Lichtgeschwindigkeit mit einer Messstrecke auf der Erde bestimmen, indem er die zeitliche Messgenauigkeit steigerte. Dazu hat er eine Lichtquelle zu einem parallelen Strahl gebündelt, welcher von einem Spiegel in der Entfernung d reflektiert wurde.

Ein Teil des reflektierten Lichtstrahls gelangte durch einen Strahlteiler in das Okular des Fernrohres und konnte dort beobachtet werden.

Mit einem schnell rotierenden Zahnrad wird der Strahl periodisch unterbrochen, so dass Lichtblitze der Dauer T_1 und der Frequenz $f = 1/(2T_1)$ ausgesandt werden, wenn Steg und Lücke im Zahnrad die gleiche Breite haben.

Dreht sich das Zahnrad mit einer Winkelgeschwindigkeit ω gerade so schnell, dass der von der Lücke n durchgelassene Lichtblitz nach Reflexion am Spiegel die nächste Lücke $N + 1$ wieder passiert, sieht man Helligkeit. Bei schnellerer

Umdrehung trifft der reflektierte Lichtpuls auf einen Steg und man beobachtet Dunkelheit, bei 2ω passiert er die Lücke $n+2$ usw.

Die Zeit zwischen zwei Lücken ist bei N Zähnen und N Lücken

$$\Delta T = \frac{1}{f \cdot N} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{N},$$

so dass die Lichtgeschwindigkeit zu

$$c = \frac{2d}{\Delta T} = \frac{d \cdot N \cdot \omega}{\pi} = 2dN \cdot f$$

bestimmt werden kann, wobei f die Drehfrequenz des Zahnrads ist. Mit einer Messstrecke von $d = 8,6\,\text{km}$, einem Zahnrad mit 720 Zähnen, das sich mit einer Frequenz von 24 Hz drehte, ergibt sich: $c = 2,97216 \cdot 10^8\,\text{m/s}$.

Phasenmethode

Heute kann man Lichtstrahlen mit optischen Modulatoren mit wesentlich höherer Frequenz unterbrechen. Dazu wird ein Laserstrahl (paralleles, gebündeltes Licht) durch eine **Pockels-Zelle** geschickt (elektrooptischer Modulator, der die Polarisationsebene des Lichtes im Takt einer angelegten Hochfrequenz f dreht). Hinter einem Polarisator wird dadurch die transmittierte Lichtintensität moduliert:

$$I_t = I_0 \left(1 + \cos^2 (2\pi f t)\right) .$$

Der Strahl wird in einem Strahlteiler aufgeteilt. Ein Teil geht direkt an eine Photodiode, der andere Teil wird an einem Spiegel reflektiert und mit einer zweiten Photodiode nachgewiesen und die Phasenverschiebung zwischen den beiden Signalen gemessen. Die Laufzeit $\Delta T = 2d/c$ des Lichtes ist mit der Phasenverschiebung $\Delta\phi$ verknüpft: $\Delta T = \Delta\phi/(2\pi f)$.

Bestimmung von c aus der Messung von Frequenz und Wellenlänge

Mit der Relation

$$c = \lambda \cdot f$$

für elektromagnetische Wellen lässt sich die Lichtgeschwindigkeit c bestimmen, wenn man Frequenz f und Wellenlänge λ einer Lichtwelle eines frequenzstabilen Lasers gleichzeitig misst. Dieses ist heute sehr genau möglich, der genauest gemessene Wert ist:

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}.$$

Dieser Wert wird heute als *Definitionswert* benutzt, um die Längeneinheit 1 m zu definieren. Damit wird also die Wellenlänge λ aus dem *Definitionswert* c und der gemessenen Frequenz f bestimmt.

Stehende elektromagnetische Wellen

Genau wie mechanische Wellen können stehende elektromagnetische Wellen durch phasenrichtige Überlagerung von in verschiedene Richtung laufende Wellen gleicher Frequenz erzeugt werden. Eindimensionale stehende Wellen entstehen durch Reflexion einer ebenen Welle, die senkrecht auf eine leitende Ebene fällt. Betrachten wir eine linear polarisierte Welle in z-Richtung mit einem elektrischen Vektor in x- und dem magnetischen Vektor in y-Richtung. Am Ort der leitenden Ebene $z = 0$ gilt $E(z) = 0$, die Überlagerung der einfallenden und die der reflektierten Welle heben sich also gerade auf. Für den magnetischen Anteil herrscht dort gerade ein Maximum. Zwischen den Maxima von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ tritt also eine räumliche Verschiebung von $\lambda/4$ und eine zeitliche Verschiebung von $T/4$ auf, im Gegensatz zur laufenden Welle, bei der $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in Phase schwingen.

Wellen in Wellenleitern und Kabeln

Wellenleiter (Hohlleiter) sind Resonatoren mit offenen Endflächen, so dass außer stehenden Wellen auch fortschreitende Wellen in Richtung der Enden möglich sind, in dazu senkrechten Richtungen jedoch räumlich begrenzt sind. Diese Leiter haben wachsende Bedeutung in der Mikrowellentechnik, aber auch in der Optik als optische Lichtwellenleiter und in integrierten optoelektronischen Schaltungen. Die elektrische Feldstärke an den Wänden ist 0, die Wellen werden dort also reflektiert. Die Welle erleidet einen Phasensprung von π, so dass die Amplitude ihr Vorzeichen umkehrt. Zwischen den Wänden bilden sich also stehende Wellen aus, die die Randbedingung

$$k_x = n \cdot \pi / a$$

erfüllen.

In Längsrichtung z des Wellenleiters gibt es hingegen keine Randbedingungen, so dass die Welle in diese Richtung *laufen* kann. Die Phasengeschwindigkeit der in

z-Richtung laufenden Welle ist

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{k_z}.$$

Mit $c = \omega/k = \omega/\sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ wird v_{Ph} zu

$$v_{Ph} = \frac{c}{k_z}\sqrt{k_x^2 + k_z^2} = c \cdot \sqrt{1 + (k_x/k_z)^2} \geq c.$$

Die Gruppengeschwindigkeit

$$v_G = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \cdot \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}k_z} = \frac{c^2}{\omega} k_z = \frac{c^2}{v_{Ph}} < c$$

ist kleiner als für Wellen im freien Raum.

Das elektromagnetische Frequenzspektrum

Das gesamte uns zur Zeit bekannte Frequenzspektrum elektromagnetischer Wellen umfasst über 24 Dekaden. Die kleinste Energieeinheit eines elektromagnetischen Feldes der Frequenz ν wird **Photon** genannt. Die Energie eines Photons beträgt $E = h \cdot \nu$, wobei h das **Plancksche Wirkungsquantum** heißt. Für das elektromagnetische Feld im Vakuum gelten im gesamten Spektralbereich dieselben Gleichungen mit den gleichen Konstanten ε_0 und μ_0. Bei Wechselwirkung mit Materie ändert sich dieses jedoch grundlegend, frequenzabhängige Eigenschaften der Materie (Absorption, Streuung, Dispersion, Reflexion) spielen eine große Rolle. Die Untersuchung dieser Materialeigenschaften für die verschiedenen Frequenzbereiche hat unsere Kenntnisse über die submikroskopische Struktur der Materie entscheidend erweitert.

Der Spektralbereich des sichtbaren Lichts ($\lambda = 400 - 700\,\text{nm}$) wird in der *Optik* behandelt. Heute existieren auch Strahlungsquellen und Detektoren für den Infrarotbereich ($\lambda > 700\,\text{nm}$), für den Mikrowellenbereich ($\lambda > 400\,\text{nm}$), für den Ultraviolettbereich ($\lambda < 400\,\text{nm}$), für den Röntgenbereich ($\lambda < 10\,\text{nm}$) und für den Gammastrahlungsbereich ($\lambda < 0,01\,\text{nm}$).

In der Astrophysik ist die Beobachtung in verschiedenen Spektralbereichen besonders wichtig. Für Beobachtungen vom Erdboden aus ist man jedoch auf die Spektralbereiche beschränkt, die von der Erdatmosphäre durchgelassen werden. Dies sind das sichtbare Licht, Radiofrequenzen und einige Fenster im nahen Infrarot. Die Strahlung in anderen Bereichen wird durch Spurengase (CO_2, H_2O, OH, CH_4) oder die Hauptkomponenten der Atmosphäre (N_2, O_2) absorbiert. Beobachtungen in diesen Spektralbereichen müssen deshalb außerhalb der Atmosphäre gemacht werden.

Multiwavelength Milky Way

http://adc.gsfc.nasa.gov/mw/mmw_product.html

SOHO Bilder der Sonne im UV Licht

http://sohowww.estec.esa.nl/
http://lws.gsfc.nasa.gov/
http://stargazers.gsfc.nasa.gov/epo/jsp/products.jsp
http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap040606.html