Elektromagnetische Wellen in Materie

Wir haben bis jetzt elektromagnetische Wellen nur im Vakuum behandelt, dabei haben wir die Ladungs- und Stromdichten ρ und $\vec{j}$ gleich Null gesetzt. In einem Medium werden diese Terme nun nicht verschwinden. Ferner kommen neue Erscheinungen dazu, die Emission und die Absorption von Licht. Diese können wir mit unserem soweit erworbenen Wissen zwar noch nicht richtig verstehen, dazu brauchen wir die Atom- und Quantenphysik. Aber beschreiben kann man sie mit klassischen Ansätzen wie einem gedämpften Oszillator!

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}.$$

Der Brechungsindex

Wir wissen, dass sich Licht im Vakuum mit "Lichtgeschwindigkeit" c bewegt und in Materie nie schneller als c ist. Das legt es nahe, die Lichtgeschwindigkeit im Medium zu schreiben als

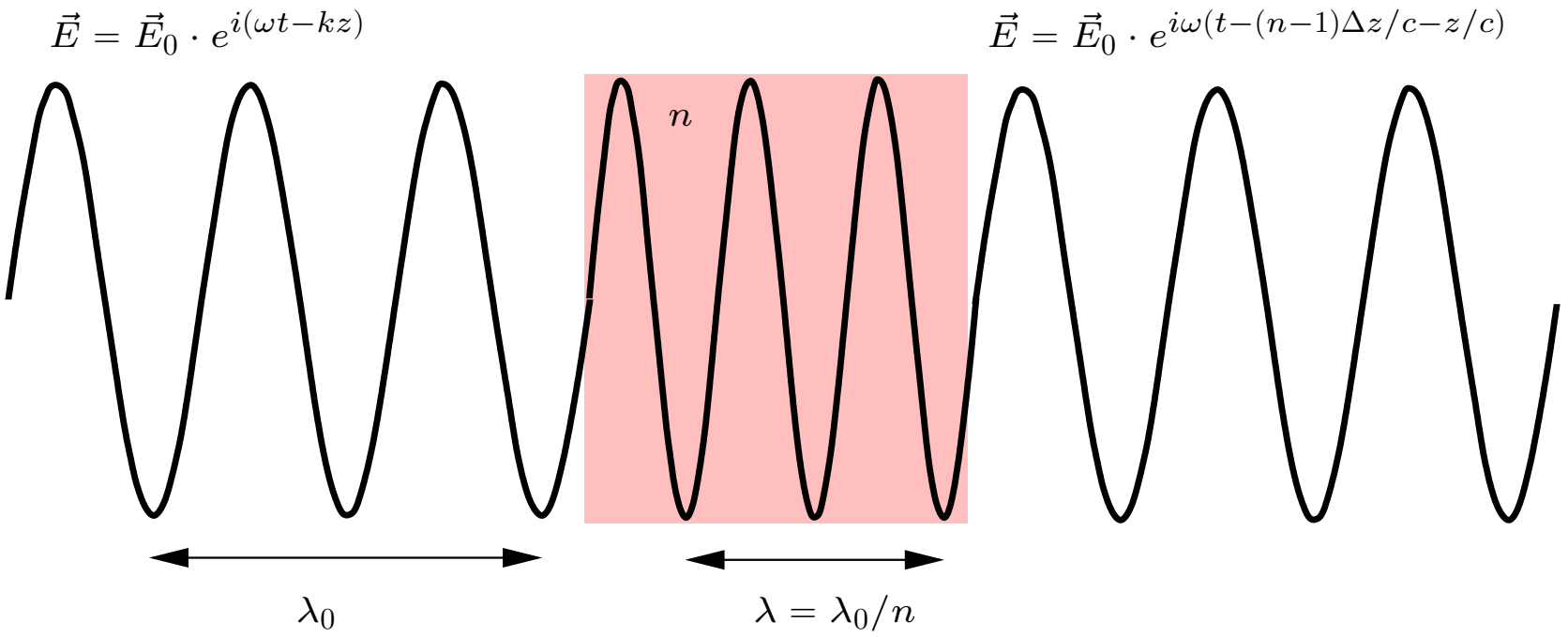
$$c' = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{n} = \frac{c}{n},$$

wo $n > 1$ der von der Wellenlänge abhängige **Brechungsindex** ist,

$$n = n(\lambda) \quad \text{und deshalb} \quad c' = c'(\lambda).$$

Diese Verminderung der Lichtgeschwindigkeit ist eine Folge der Wechselwirkung der auf das Medium einfallenden elektromagnetischen Welle mit den Ladungsträgern im Medium. Die Elektronen werden zu erzwungenen Schwingungen angeregt und strahlen ihrerseits wie ein Hertzscher Dipol auch in derselben Frequenz wieder ab, allerdings etwas phasenverschoben.

Durchgang einer ebenen Welle durch ein Medium mit Brechungsindex n



Erzwungene Schwingungen

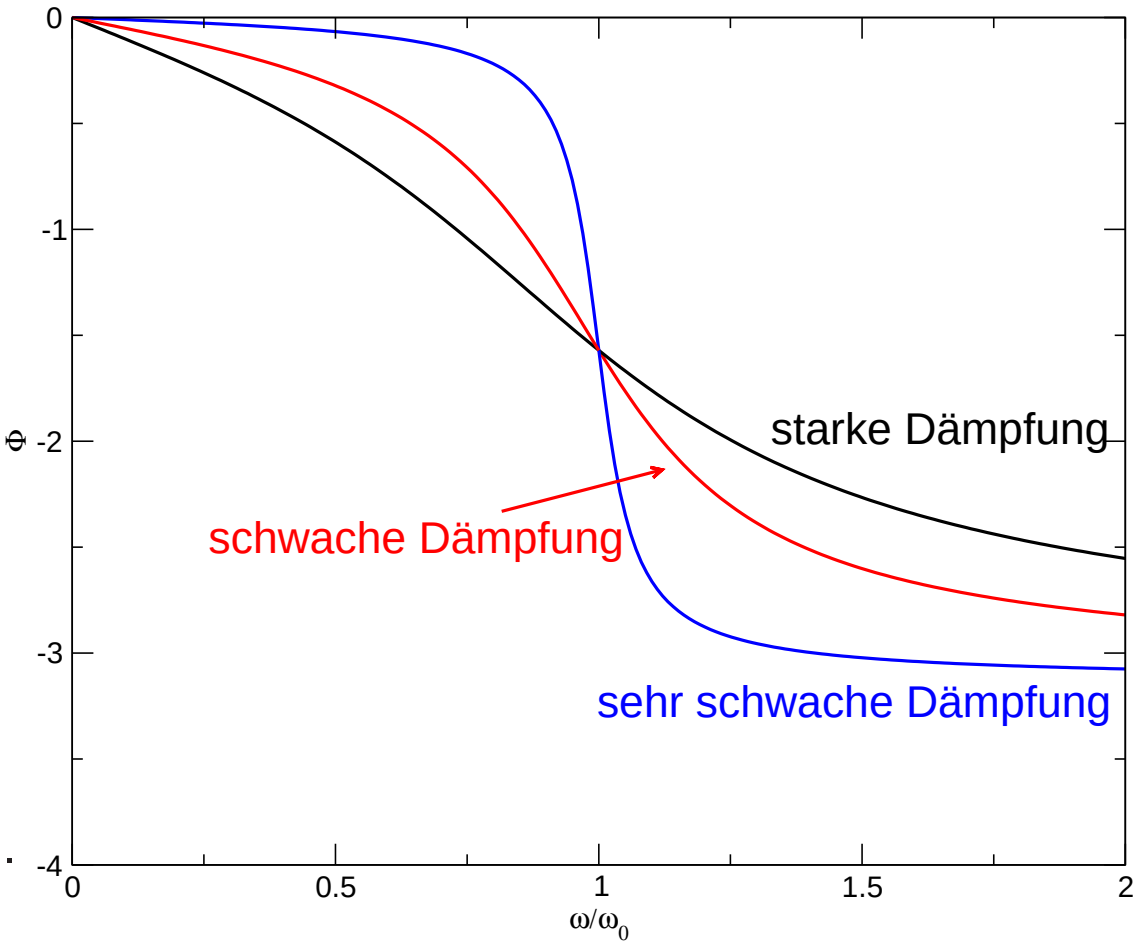
Oft wird eine Schwingung angeregt oder erzwungen durch eine ortsunabhängige, periodische Kraft $F = Fe^{i\omega t}$. Die nun inhomogene Schwingungsgleichung lautet dann

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = Ke^{i\omega t}, \quad \text{wo} \quad K = \frac{F}{m},$$

Ansatz $x(t) = Ae^{i\omega t}$ einsetzen, 2 Integrationskonstanten $\longrightarrow A = |A|e^{i\phi}$

$$-A\omega^2 e^{i\omega t} + i\gamma\omega A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = Ke^{i\omega t}$$

$$A = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - i\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\gamma\omega)^2} K.$$

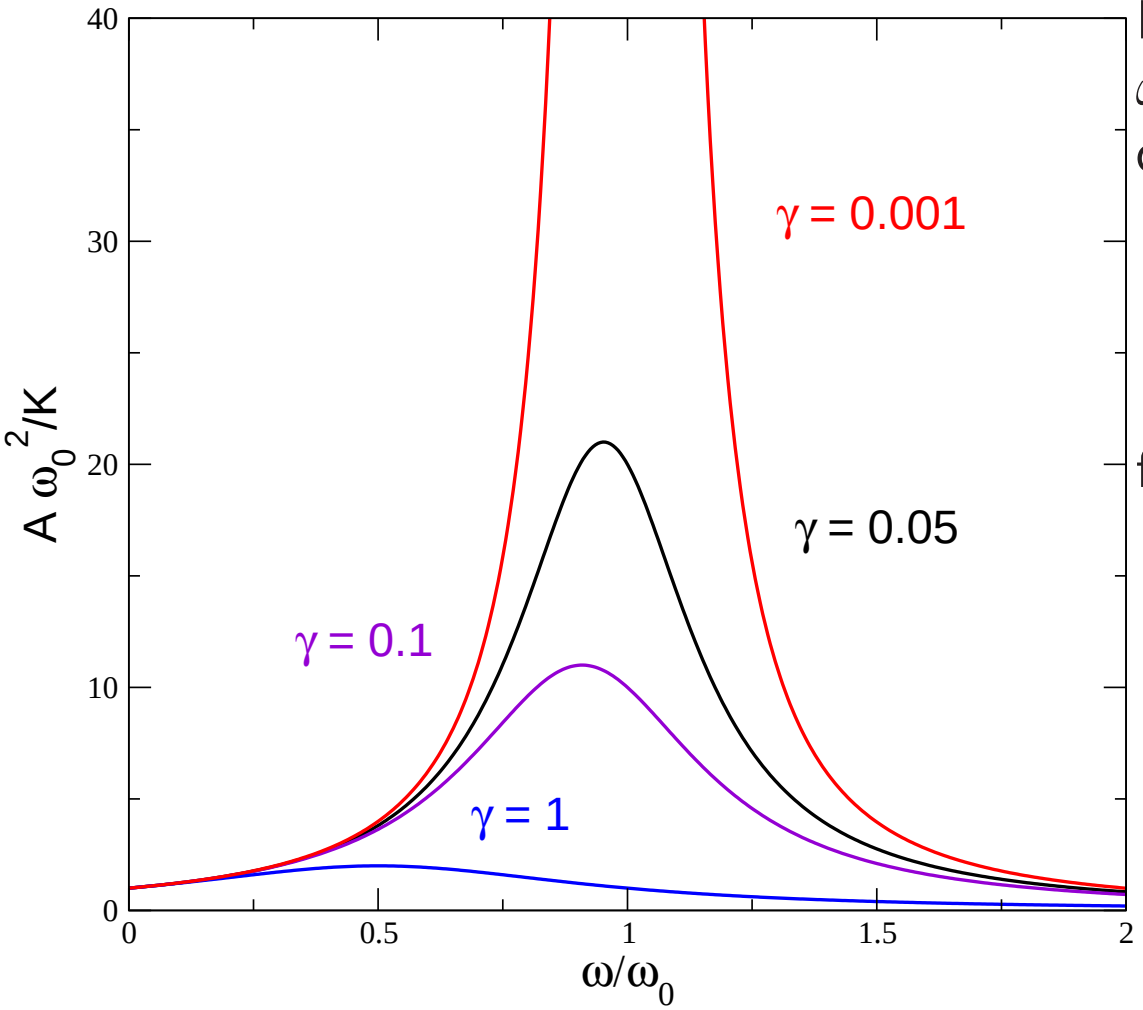


Damit ist die Phase
$\phi = \arctan(\mathbf{Im}A/\mathbf{Re}A)$
und die Amplitude $|A|$ bekannt:

$$\phi = \arctan\left(\frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

und

$$|A| = \frac{F/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\gamma\omega)^2}}.$$



Maximum der Resonanz bei $\omega = \omega_R$ durch Differentiation des Nenners von A: Aus

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + (\gamma\omega)^2\right) = 0$$

folgt

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2.$$

Brechungsindex II

Diese abgestrahlten elektromagnetischen Wellen überlagern sich in jedem Punkt innerhalb und außerhalb (hinter) des Körpers mit den eingehenden primären Wellen. Die Phasenverschiebung der sekundären Wellen resultiert in einer Verzögerung der gesamten Welle - die Welle kommt später an, als wenn kein Medium dazwischen wäre, und zwar gerade um

$$\Delta t = (n-1)\Delta z/c,$$

wo Δz die Dicke (oder Schichtdicke) des Mediums ist. An der Stelle z hinter dem Medium können wir die Welle also schreiben als

$$\vec{E}(z) \quad = \quad \vec{E}_0\, e^{i\omega[t-(n-1)\Delta z/c - z/c]},$$

$$= \quad \vec{E}_0\, e^{i\omega(t-z/c)} \cdot e^{i\omega(n-1)\Delta z/c}.$$

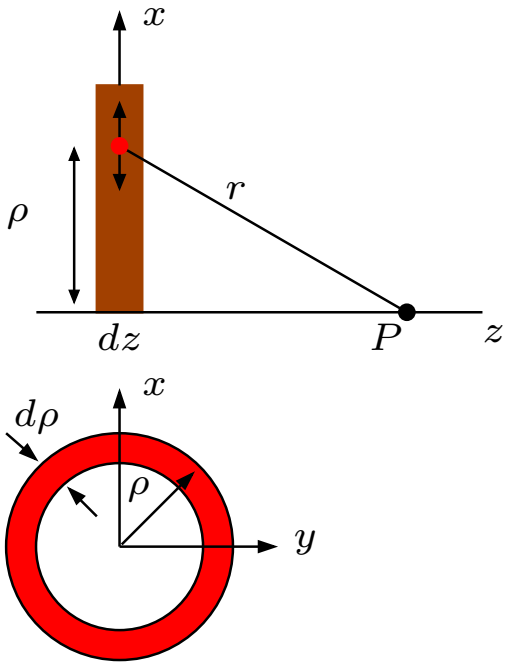
Der erste Faktor gibt die ungestörte Welle im Vakuum wieder, der zweite beschreibt den Einfluss des Mediums. Dieser äußert sich also durch eine Phasenverschiebung

$$e^{-i\phi}, \quad \text{wo} \quad \phi = \omega(n-1)\Delta z/c.$$

Für ein Gas ist die Phasenverschiebung ϕ klein (n ist ungefähr 1, bzw. $n-1$ ist sehr klein), und damit kann $e^{-i\phi} \approx 1 - i\phi$ geschrieben werden. Damit

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \vec{E}_0\, e^{i\omega(t-z/c)} - i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c}\vec{E}_0 e^{i\omega(t-z/c)} \\ &= \vec{E}_{\text{in}} + \vec{E}_{\text{Medium}}. \end{aligned}$$

Einfluss der schwingenden Dipole



Die schwingenden Dipole strahlen am stärksten senkrecht zu ihrer Achse aus und in großer Entfernung von ihnen ($r \gg d_0$, wo d_0 die Amplitude der Dipolschwingung ist), also im Fernfeld, lautet der Ausdruck für das abgestrahlte Feld eines einzelnen Dipols

$$E_D = -\frac{e\omega^2 d_0}{4\pi\varepsilon c^2 r} e^{i\omega(t-r/c)}.$$

Nun sind in einer dünnen Schicht Δz viele Dipole, nämlich $\Delta z \int N \mathrm{d}A$, wo N die räumliche Dichte der Dipole und A die Fläche bedeutet. Das gesamte abgestrahlte Feld ist

die Überlagerung aller Dipolbeiträge

$$E(z) = -\frac{e\omega^2 d_0 e^{i\omega t}}{4\pi\varepsilon c^2}\Delta z \int_0^\infty N\frac{e^{-i\omega r/c}}{r}2\pi\rho \mathrm{d}\rho.$$

Mit $r^2 = z^2 + \rho^2$ und folglich $r\mathrm{d}r = \rho\mathrm{d}\rho$ ergibt das Integral

$$\int_0^\infty N\frac{e^{i\omega r/c}}{r}2\pi\rho\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_z^\infty Ne^{-i\omega r/c}\mathrm{d}r = -2\pi\frac{c}{i\omega}\left[Ne^{-i\omega r|c}\right]_z^\infty.$$

Nun muss ja $\lim_{\rho\to\infty} N(\rho) = 0$ gelten und deshalb trägt die obere Grenze nichts zum Integral bei.[1] Damit erhalten wir

$$E(z) = \frac{i\omega e d_0 N}{2\varepsilon_0 c}e^{i\omega(t-z/c)}\Delta z.$$

[1] Es ist manchmal ganz erstaunlich, wenn "Unendlich" "Nichts" beiträgt!

Nun wollen wir's wirklich wissen und setzen für die Amplitude des Dipols, d_0, den Ausdruck für die Amplitude einer erzwungenen Schwingung ein:

$$E(z) = -i\omega \frac{\Delta z}{c} \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega\right]} E_0 e^{i\omega(t-z/c)},$$

was gerade E_{Medium} beschreibt!

$$E_{\mathrm{Medium}} = -i\omega(n-1)\frac{\Delta z}{c} E_0\, e^{i\omega(t-z/c)}.$$

Vergleichen wir die beiden Ausdrücke und lösen nach dem Brechungsindex n auf, so finden wir:

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega\right]}.$$

Der Brechungsindex ist eine komplexe Zahl! Der Brechungsindex hängt in der Tat von der Wellenlänge ab. Genau genommen hängt er von der Frequenzdifferenz

zwischen der Frequenz der eingestrahlten Welle ω und der Resonanzfrequenz des ungedämpften Dipols ab. Ausserdem hängt er von der Dichte N der Dipole d, also von der Atomdichte des Mediums ab.

Zu beachten ist ferner, dass diese Herleitung nur für optisch dünne Medien gilt, $n - 1 \ll 1$.

Absorption und Dispersion

Die beiden Teile des Brechungsindex haben verschiedene physikalische Bedeutungen. Wir schreiben erst Real- und Imaginärteil explizit auf, $n = n' - i\kappa$:

$$\begin{aligned} n &= 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega\right]} \\ &= \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} - i\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \\ &= n' - i\kappa. \end{aligned}$$

Die Buchstaben n' und κ wie auch das Vorzeichen des Imaginärteils sind "schon fast Konvention". Die Ausdrücke für n' und κ nennen sich **Dispersionsrelationen**.

Um die Bedeutung von Real- und Imaginärteil zu verstehen, untersuchen wir nochmals das Verhalten von Licht hinter einem Medium. Wir hatten vorhin

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \vec{E}_0\, e^{i\omega[t-(n-1)\Delta z/c - z/c]},\\ &= \vec{E}_0\, e^{i\omega(t-z/c)} \cdot e^{i\omega(n-1)\Delta z/c},\\ &= \vec{E}_0\, e^{i\omega(t-z/c)} \cdot e^{-i\omega(n'-1)\Delta z/c} \cdot e^{-\omega\kappa\Delta z/c}.\end{aligned}$$

Der Faktor $e^{-\omega\kappa\Delta z/c}$ sagt uns, dass das Licht beim Durchgang durch das Medium abgeschwächt, **absorbiert** wird. Die **Intensität** des Lichtes $I = c\,\varepsilon_0 E^2$ nimmt also ab:

$$I = I_0 \cdot e^{-2\omega\kappa\Delta z/c} = I_0 \cdot e^{-\alpha\Delta z}, \quad \text{wo} \quad \alpha = \frac{2\omega\kappa}{c} = \frac{4\pi\kappa}{\lambda}$$

der **Absorptionskoeffizient** ist. Er ist proportional zum Imaginärteil des Brechungsindexes.

Der Realteil von n schlägt sich im Faktor $e^{-i\omega(n'-1)\Delta z/c}$ nieder, der die Phasenverschiebung angibt, die das Licht beim Durchgang durch das Medium erfährt, $\Delta\phi = \omega(n'-1)\Delta z/c = 2\pi(n'-1)\Delta z/\lambda_0$, wo λ_0 die Wellenlänge im Vakuum bedeutet. Durchläuft Licht nun eine Stecke $\Delta z = \lambda_0$, so erfährt es im Vakuum eine Phasenverschiebung von 2π und im Medium $n'2\pi$.

Nun ist aber die Wellenlänge definiert als der räumliche Abstand zwischen zwei Phasenflächen, die sich um 2π unterscheiden. Deshalb muss also im Medium die Wellenlänge kleiner sein als im Vakuum,

$$\lambda = \lambda_0/n'.$$

Weil sich die Frequenz aber nicht ändert, muss sich folglich die Phasengeschwindigkeit ändern

$$v_{Ph} = c' = \frac{c}{n'}.$$

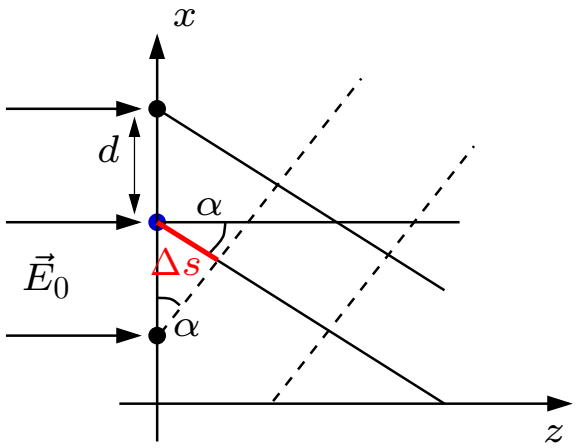
Lichtstreuung

In der Herleitung des Brechungsindexes wie auch bei der Behandlung der Absorption und der Dispersion haben wir die Richtungsabhängigkeit der Abstrahlung der angeregten Dipole vernachlässigt bzw. deren Maximalwert $\vartheta = \pi/2$ verwendet. Die durch die linear polarisierte einfallende Welle angeregten Dipole schwingen alle in der Richtung des wechselnden $\vec{E}$-Feldes. Wir nennen sie x-Richtung. Das abgestrahlte Licht ist natürlich nicht nur parallel zum einfallenden Licht, sondern kann auch einen Winkel dazu aufweisen. Die mittlere abgestrahlte Leistung eines Dipols ist

$$\bar{P} = \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2 \vartheta.$$

Der Prozess, in dem Licht in eine von $\vartheta = \pi/2$ verschiedene Richtung abgestrahlt wird, wird **Streuung** genannt.

Kohärente Streuung und Interferenz



Warum streuen dann die Dipole in einer Fensterscheibe das Licht nicht in alle Richtungen? Um dies zu verstehen, untersuchen wir vorerst ein geometrisch besonders einfaches Stück Materie, ein Kristallgitter. Alle Dipole in der links gezeichneten Ebene sind gleich ausgerichtet und emittieren Licht mit derselben Phase und Frequenz. Licht, welches von einem Dipol (links blau eingezeichnet) in Richtung α abgestrahlt wird, hat gegenüber dem von den benachbarten Dipolen abgestrahlten Licht einen Wegunterschied von $\Delta s = d \sin \alpha$, der wiederum einen Phasenunterschied verursacht,

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\alpha.$$

Die Gesamtamplitude E aller Dipole auf der Geraden x in Richtung α ist dann die Summe aller Teilamplituden E_j,

$$E = \sum_{j=1}^{N} E_j = E_0 \sum_{j}^{N} e^{i(\omega t + \phi_j)} = E_0\, e^{i\omega t} \sum_{j=1}^{N} e^{i\cdot(j-1)\Delta\phi},$$

weil wir die Phase der ersten Welle $\phi_1 = 0$ gesetzt haben. Dies ist eine geometrische Reihe[2]

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} e^{i\cdot(j-1)\Delta\phi} &= \frac{e^{iN\Delta\phi} - 1}{e^{i\Delta\phi} - 1}, \\ &= \frac{e^{iN\Delta\phi/2}}{e^{i\Delta\phi/2}} \cdot \frac{e^{iN\Delta\phi/2} - e^{-iN\Delta\phi/2}}{e^{i\Delta\phi/2} - e^{-iN\Delta\phi/2}} \end{aligned}$$

[2] $\sum_{k=0}^{N-1} q^k = (q^N - 1)/(q - 1)$

$$= \quad e^{i(\frac{N-1}{2})\Delta\phi} \cdot \frac{\sin(N\Delta\phi/2)}{\sin(\Delta\phi/2)}.$$

Die Intensität $I = \varepsilon_0 c|E|^2$ des gestreuten Lichts ist nun einfach zu finden

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2[N\pi(d/\lambda)\sin\alpha]}{\sin^2[\pi(d/\lambda)\sin\alpha]} \quad \rightarrow \quad N^2 I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad \text{für} \quad x/N = \pi(d/\lambda)\sin\alpha \| \| 1.$$

Für kleine Gitterkonstanten $d < \lambda$ und eine große Anzahl von Gitterpunkten (Dipolen) unterscheidet sich $I(\alpha)$ nur bei $\alpha = 0$, also bei einem Winkel senkrecht zur Dipolachse, merklich von Null. Beide Annahmen sind für sichtbares Licht gerechtfertigt. Insbesondere ist N immer sehr groß. Darum geht also Licht gerade durch eine Schicht von Luft mit konstanter Dichte.

Inkohärente Streuung

Sind die Dipole nicht regelmäßig angeordnet, sondern zufällig verteilt, wie z. B. in Pulver, Aerosolen oder Flüssigkeiten, so ändert sich das Verhalten dramatisch. Es gibt keine festen Phasenbeziehungen zwischen benachbarten Streuzentren (Dipolen). Wärend wir bei fest angeordneten streuenden Oszillatoren von kohärenter Streuung gesprochen haben, sprechen wir bei unregelmäßig oder zeitlich variabel angeordneten Streuzentren von inkohärenter Streuung. Um den Unterschied klar hervorzuheben, betrachten wir zwei Oszillatoren, die Wellen aussenden mit den Schwingungsamplituden

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega t;$$

und

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi),$$

wo wir eine Phase ϕ zwischen den beiden Oszillatoren zugelassen haben. Sie könnte auch verschwinden, ohne die Rechnung wesentlich zu verändern.

Die Gesamtintensität in Richtung α ist dann,

$$I = \varepsilon_0 c[A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t + \psi)]^2, \quad \text{wo} \quad \psi = \phi + \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha.$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned} I &= \varepsilon_0 c[A_1 \cos^2 \omega t + A_2 \cos^2(\omega t + \psi) + \\ &\quad 2A_1 A_2(\cos(2\omega t + \psi) + \cos \psi)], \end{aligned}$$

wo wir die Identität $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ ausgenutzt haben. Das Licht oszilliert sehr schnell, und wir sehen nur den zeitlichen Mittelwert

über viele Oszillationen. Bildung des zeitlichen Mittelwertes $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ und $\overline{\cos \omega t} = 0$ ergibt

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c[A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \overline{\cos \psi}].$$

Nun können wir zwei Fälle unterscheiden. Die Phase zwischen den beiden Oszillatoren ψ bleibt immer gleich, oder sie ist statistisch verteilt oder verändert sich mit der Zeit.[3] Betrachten wir vorerst den Fall, dass sich die Phase nicht ändert. Dann ist $\overline{\cos \psi} = \cos \psi$, was je nach Wert von ψ Werte zwischen

$$I_{max} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c(A_1 + A_2)^2 \quad \text{für} \quad \psi = m \cdot 2\pi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

und

$$I_{min} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c(A_1 - A_2)^2 \quad \text{für} \quad \psi = (2m + 1) \cdot \pi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

[3] Diese zeitliche Änderung soll langsam sein im Vergleich zur Wellenperiode des Lichtes.

annehmen kann. Dieser Fall führt also, wie weiter oben diskutiert, zu Interferenzerscheinungen. Er entspricht also der bereits diskutierten **kohärenten Streuung**.

Im Falle statistisch verteilter Streuer (räumlich oder zeitlich zufällig variable Phase ψ) ist der Zeitmittelwert $\overline{\cos\psi} = 0$ und damit[4]

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c(A_1^2 + A_2^2).$$

Damit sehen wir, dass

- kohärente Streuung: Intensität gleich Quadrat der Summe aller Streuamplituden

- inkohärente Streuung: Summe der Intensitäten der einzelnen gestreuten Wellen.

[4]Der zeitliche Mittelwert reicht. Räumlich zufällig verteilte Streuer werden durch die einfallende ebene Welle zu zufälligen Zeiten erreicht und schwingen deshalb auch mit einer zeitlich zufälligen Phase.

Streuquerschnitte

Für sehr viele Anwendungen in der Physik spielt der Begriff des **Streuquerschnitts** eine sehr wichtige Rolle. Wir definieren ihn als das Verhältnis aus zeitlich gemittelter gestreuter Leistung pro Streuzentrum $\overline{P}_S/N$ und zeitlich gemittelter einfallender Lichtintensität I_{in}

$$\sigma_s \doteq \frac{(\overline{P}/N)}{I_{in}}.$$

Ein Hertzscher Dipol sendet im Mittel in den Raumwinkel $\Omega = 1$ Sterad die Leistung ab

$$\bar{P}_S(\vartheta) = \frac{N e^2 x_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2 \vartheta.$$

Um die gesamte, über den gesamten Raumwinkel $\Omega = 4\pi$, abgestrahlte Leistung zu finden, müssen wir den Ausdruck für die Amplitude der Dipolstrahlung einsetzen

und anschließend über alle Winkel ϑ integrieren.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= -\frac{e/m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega)^2}} E_0 e^{i(\omega t+\Phi)}, \\
\bar{P}_S(\omega,\vartheta) &= \frac{N e^4 E_0^2 \sin^2\vartheta}{32\pi^2 m^2 \varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}, \\
\bar{P}_S(\omega) &= \frac{N e^4 E_0^2}{12\pi m^2 \varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2},
\end{aligned}
$$

wobei das Integral über den gesamten Raumwinkel so ausgeführt wird: In Polarkoordinaten lautet das Doppelintegral

$$
\int \sin^2\vartheta \mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta,
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \mathrm{d}\vartheta, \\
&= -2\pi \int_{-1}^{1} (1 - t^2), \quad \text{wo} \quad t = \cos \vartheta, \\
&= \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung der zeitlichen Mitteilung der einfallenden Strahlung [5] für den Streuquerschnitt die Beziehung

$$
\sigma_S = \frac{e^4 E_0^2}{6\pi m^2 \varepsilon_0^2 c^4} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}.
$$

[5] $\bar{I}_{in} = (1/2)\varepsilon_0 c E_0^2$, weil $\overline{\sin^2 \omega t} = 1/2$.

Elektromagnetische Wellen in Materie

Wie lauten nun die Maxwellschen Gleichungen in Materie? Und was lernen wir aus ihnen?

Den Einfluss von Materie können wir dadurch beschreiben, dass wir

$$\varepsilon_0 \longrightarrow \varepsilon\varepsilon_0, \quad \text{und} \quad \mu_0 \longrightarrow \mu\mu_0$$

setzen. Dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

was mit der dielektrischen Verschiebungsdichte $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, wo $\vec{P}$ die dielektrische Polarisation ist, die Maxwellgleichungen in Materie ergibt:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\mu_0\left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right).$$

Als Folge können wir nun die Wellengleichung schreiben

$$\Delta\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\upsilon_{ph}^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Die Phasengeschwindigkeit υ_{ph} ist wie erwartet $\upsilon_{ph} = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Für nicht ferromagnetische Materialien ist $\mu \approx 1$. Setzen wir den Ausdruck für

die dielektrische Verschiebung ein, so erhalten wir

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}.$$

Hier sehen wir wieder, wie die Welle hinter dem Medium aus der ungestörten einlaufenden Welle (mit Geschwindigkeit c) und einer sekundären phasenverschobenen Welle zusammengesetzt ist. Die Geschwindigkeit beträgt $v_{ph} = c' = c/\sqrt{\varepsilon} = c/n$, womit wir $n = \sqrt{\varepsilon}$ haben.