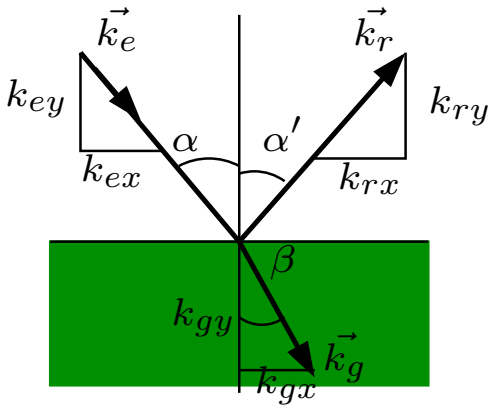
Wellen an Grenzflächen



Tritt ein Lichtstrahl in ein Medium ein, so wird in der Regel ein Teil reflektiert, und ein Teil wird in das Medium hinein gebrochen. Beim Übergang müssen die Komponenten tangential zur Oberfläche erhalten bleiben, deshalb muss an jedem Punkt der Oberfläche die Phase der drei Wellen (einfallend, reflektiert und gebrochen) gleich sein, d. h.

$$\vec{k}_e \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_g \cdot \vec{r}.$$

Die Grenzoberfläche soll die x-z-Ebene sein, folglich

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_x$$

$$\begin{aligned}
\vec{k}_e &= k_{ex}\vec{e}_x + k_{ey}\vec{e}_y \\
\vec{k}_r &= k_{rx}\vec{e}_x + k_{ry}\vec{e}_y + k_{rz}\vec{e}_z \\
\vec{k}_g &= k_{gx}\vec{e}_x + k_{gy}\vec{e}_y + k_{gz}\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

Wir setzen dies in $\vec{k}_e \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_g \cdot \vec{r}$ ein und erhalten

$$k_{ex}x = k_{rx}x + k_{rz}z + = k_{gx}x + k_{gz}z,$$

(die y-Terme fallen weg, warum?), was ja für alle Orte auf der Grenzfläche gelten muss. Also muss gelten, dass

$$k_{ex} = k_{rx} = k_{gx} \quad \text{und} \quad k_{rz} = k_{gz} = 0.$$

Also liegen einfallender, reflektierter und gebrochener Strahl in einer Ebene.

Das Brechungsgesetz von Snellius

Wir sehen ebenfalls, dass

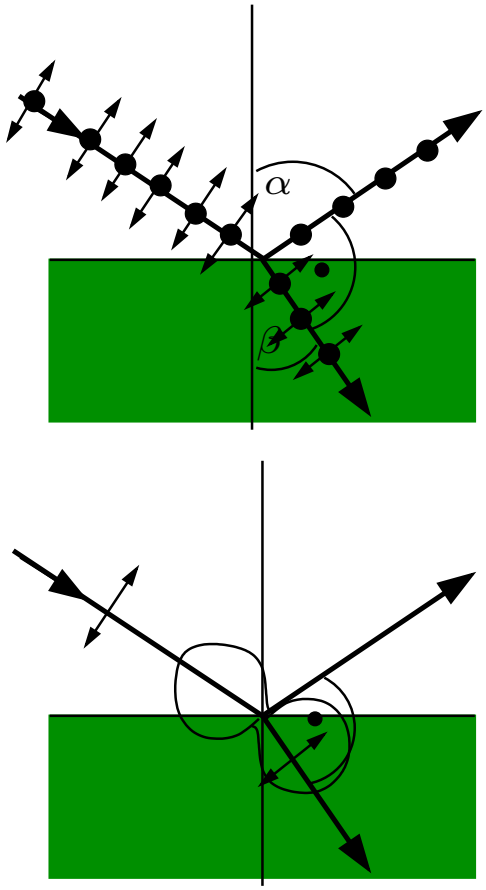
$$k_{ex} = k_e \sin\alpha = k_{rx} = k_r \sin\alpha' = k_{gx} = k_g \sin\beta.$$

Die Phasengeschwindigkeit ist im Medium eins (einfallender und reflektierter Strahl) $v_{ph} = c_1 = c/n_1$ und folglich $k_e = \omega_e/c_1$, $k_r = \omega_r/c_1$, $k_g = \omega_g/c_2$, und weil die Frequenz in allen Medien gleich bleibt, folgt

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\alpha'}{c_1} \Longrightarrow \alpha = \alpha'$$

und $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$ bzw. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n_2}{n_1}$, das **Brechungsgesetz von Snellius**.

Der Brewsterwinkel



Lässt man auf eine Grenzfläche zu einem optisch dichteren Medium ($n_2 > n_1$) Licht fallen, so findet man, dass das reflektierte Licht vollständig senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, wenn der Winkel zwischen reflektiertem und gebrochenem Strahl gerade $\alpha + \beta = 90$ Grad beträgt. Der Einfallswinkel α_B, für den diese Situation eintritt, heißt **Brewsterwinkel**. Mit $\alpha_B + \beta$ und $\sin\alpha / \sin\beta = n_2/n_1$ folgt mit $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$

$$\tan\alpha_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

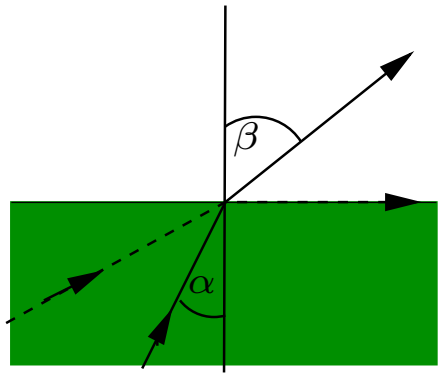
Erklären kann man sich dieses Phänomen durch die Abstrahlcharakteristik der durch das Licht zum Schwingen

angeregten Dipole. Diese strahlen in der Richtung ihrer Achse keine Energie ab. Deshalb kann das reflektierte Licht nur senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sein.

Für den Übergang Luft-Glas beträgt der Brewsterwinkel $\alpha_B \approx \arctan(1.5/1.) = 56,3°$, für den Übergang Luft-Wasser $\alpha_B = 53,1°$.

Durch Ausnutzung des Brewsterwinkels kann man polarisiertes Licht reflexionsfrei (und damit verlustfrei) in Leitungen einbringen.

Totalreflexion



An Grenzflächen treten unter bestimmten Bedingungen auch weitere Phänomene auf, z. B. das der Totalreflexion. Tritt Licht aus einem optisch dichteren Medium in ein optisch dünneres aus, so kann der Winkel zur Flächennormalen nicht beliebig groß sein. Für den Übertritt aus Wasser ($n_2 = 1.333$) an Luft ($n_1 = 1$) beträgt der Winkel $48,8°$, für Glas-Luft $41,8°$. Nach dem Brechungsgesetz von Snellius muss $\sin\alpha \leq n_2/n_1$ gelten, damit das Licht ins Medium 2 gelangen kann, denn $\sin\beta$ kann ja höchstens Eins werden.

Diese Eigenschaft wird z. B. bei "Katzenaugen" (Retroreflektoren) oder bei der Signalübertragung in Glasfasern ausgenutzt.

Übung: Eine Lampe leuchtet in einer Tiefe h unter Wasser. Wie groß ist der

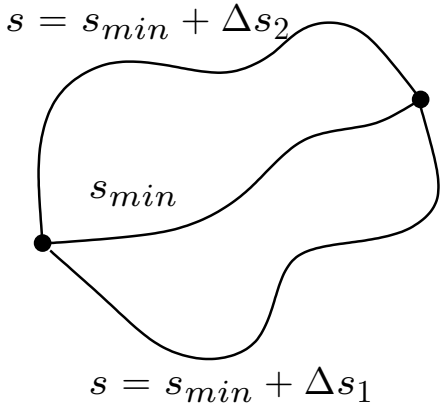
Bruchteil ihrer Lichtleistung, der in die Luft abgegeben wird? (Hinweis: Absorption und partielle Reflexion vernachlässigen.)

Phasenänderung bei der Reflexion

Ähnlich, wie dies auch bei mechanischen Schwingungen passiert, findet auch bei der Reflexion von Licht eine Phasenverschiebung statt. Bei der Reflexion am optisch dichteren Medium findet für die zur Einfallsebene senkrechte Komponente eine Phasenverschiebung um π statt. Dies wird z. B. bei der Vergütung von Linsen ausgenutzt, um sie zu "entspiegeln". Dabei wird auf die Linse (Glas, $n \approx 1,5$) eine dünne Schicht eines optisch weniger dichten Materials (z. B. $\mathrm{MgF_2}$, $n \approx 1,38$) aufgedampft.

Übung: Wie dick muss eine solche Schicht sein, um bei senkrechtem Einfall das reflektierte Licht zu minimieren?.

Das Fermatsche Prinzip

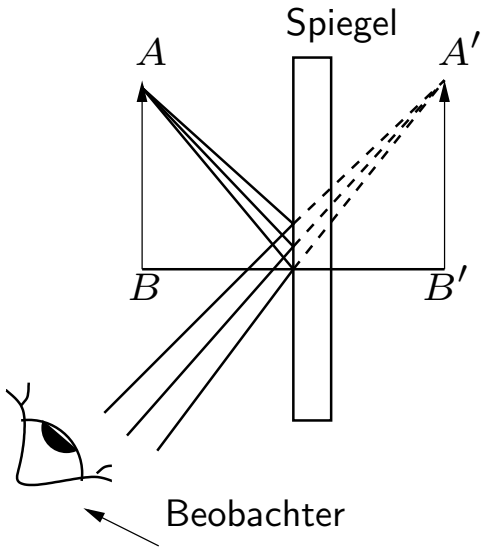


Unsere Beobachtungen haben soweit gezeigt, dass Licht in einem Medium immer auf Geraden verläuft und beim Übergang gemäß dem Brechungsgesetz von Snellius gebrochen wird. Das Prinzip von Fermat besagt nun, dass das Licht von einem Punkt P_1 zum Punkt P_2 immer den Weg wählt, der die kürzeste Zeit braucht. Dieser braucht nicht unbedingt der streckenmäßig kürzeste Weg zu sein.

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{\mathrm{d}s}{c(s)} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{n(s)\mathrm{d}s}{c} = \text{ minimal, d. h. } \delta \int_{P_1}^{P_2} n(s)\mathrm{d}s = 0,$$

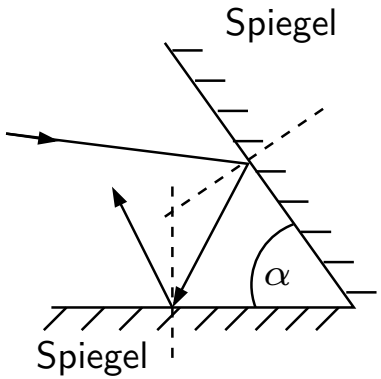
wo das Symbol δ hier eine infinitesimale Variation des optischen Weges gegenüber dem minimalen Weg bedeutet. Aus diesem Prinzip lässt sich das Brechungsgesetz einfach herleiten.

Optische Abbildungen: reelle und virtuelle Punkte



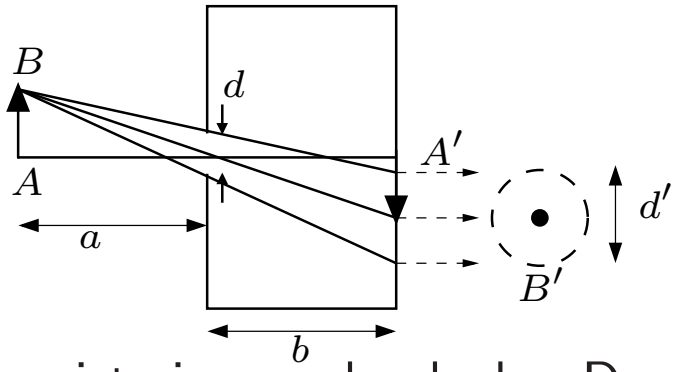
Als einfachste optische Abbildung können wir den ebenen Spiegel betrachten, der einen Gegenstand AB in ein gleich großes Bild $A'B'$ abbildet. Einige Lichtstrahlen, die vom Punkt A emittiert werden, werden am Spiegel reflektiert und erreichen ein Auge (Beobachter). Wir sehen den Gegenstand AB $scheinbar$ hinter dem Spiegel. Solche Bilder, die nicht mit einem Schirm bzw. einer Kamera aufgefangen werden können, heißen **virtuelle** (scheinbare) Bilder. Auffangbare Bilder heißen **reelle** Bilder. Die Begriffe "reell" und "virtuell" werden auch für Objekte verwendet, der Punkt A ist ein reeller Objektpunkt, der Punkt A' ist ein virtueller Bildpunkt.

Zwei Spiegel



Übung: Beschreiben Sie den Weg eines Lichtstrahls, der zwischen zwei schräg gestellte Spiegel fällt. Für welchen Winkel α zwischen den Spiegeln werden ein- und austretender Strahl parallel? [90 Grad]

Camera Obscura: Lochkamera

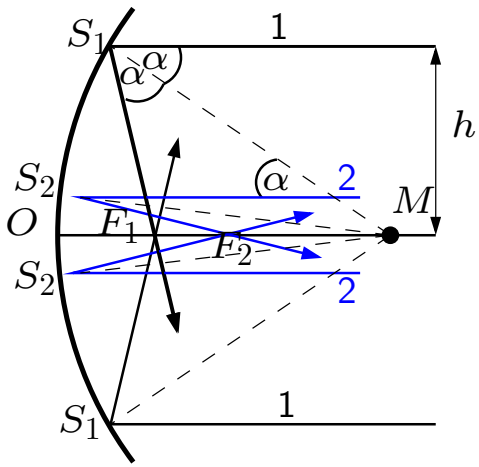


Die nächsteinfachste Abbildung erreicht man mit einer Lochkamera oder z. B. in einem abgedunkelten Zimmer, in das durch ein kleines Loch Licht von außen eindringt (camera obscura). Die Schärfe der Abbildung hängt von der Geometrie ab. Ist der Abstand a des Objektes von der Blende der Kamera groß gegenüber den inneren Dimensionen b, so ist sie nur durch den Durchmesser der Eintrittsblende (Loch) gegeben. Nach Strahlensatz haben wir $d' : d = a + b : a$ und damit

$$d' = (a + b)/a \cdot d.$$

Allerdings wird das Bild für sehr kleine Lochblenden wieder unscharf, hier beginnen Effekte der Beugung eine Rolle zu spielen (beugungslimitierte Abbildung).

Hohlspiegel



Als nächstes optisches Element betrachten wir den sphärischen Hohlspiegel mit Mittelpunkt M und Radius R. Zwei achsenparallele Strahlenpaare 1 und 2 werden am Spiegel nach dem Reflexionsgesetz gespiegelt und schneiden sich je in ihrem **Brennpunkt** F_1 und F_2.

Das Dreieck MF_iS_i ist gleichschenklig (gleiche Winkel α) und folglich gilt $R/2 = \overline{FM}\cos\alpha$ und deshalb

$$\overline{OF} = R\left(1 - \frac{1}{2\cos\alpha}\right).$$

Für kleine Abstände h des Strahls von der Achse wird α sehr klein und $\cos\alpha \approx 1$,

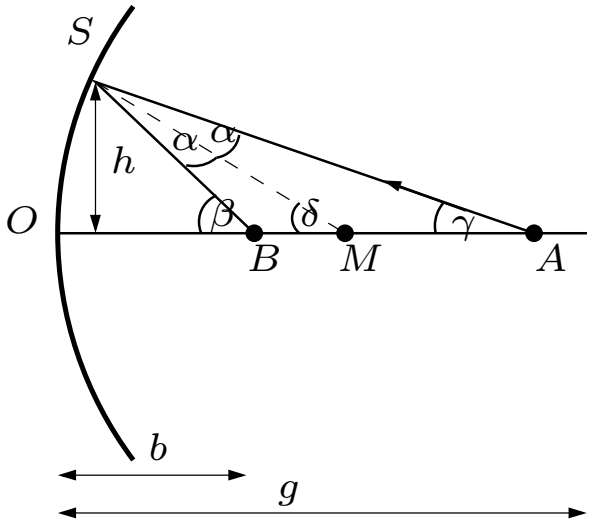
womit

$$\overline{OF} = f = R/2.$$

Allerdings ist zu beachten, dass die **Brennweite** f bei sphärischen Hohlspiegeln vom Abstand des Strahls von der Achse abhängt! Mit $h = R\sin\alpha$ und $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ folgt

$$\begin{aligned} f &= R\left(1 - \frac{1}{2\cos\alpha}\right), \\ &= R\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\right), \\ &= R\left(1 - \frac{R}{2\sqrt{R^2-h^2}}\right). \end{aligned}$$

Abbildung durch einen sphärischen Hohlspiegel



Wir betrachten die Abbildung eines Gegenstands A, der in einer Entfernung (**Gegenstandsweite**) $g = \overline{OA}$ auf der Achse liegt, in einen Bildpunkt B im Abstand (**Bildweite**) $b = \overline{OB}$. Im Dreieck ΔMSA ist der Winkel $\delta = \alpha + \gamma$, im Dreieck ΔBSM ist $\beta = \delta + \alpha$. Damit ist

$$\gamma + \beta = 2\delta.$$

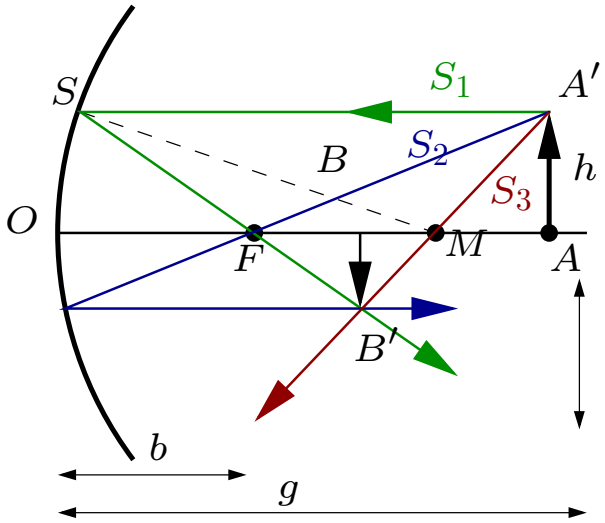
Für kleine Winkel β und γ, also für achsennahe Strahlen, gilt

$$\gamma \approx \tan\gamma = \frac{h}{g}, \quad \beta \approx \tan\beta = \frac{h}{b}, \quad \delta \approx \sin\delta = \frac{h}{R},$$

woraus wir die sog. **Spiegel-** oder **Linsenformel** finden:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} \approx \frac{2}{R} \approx \frac{1}{f}.$$

Konstruktion eines Bildes



Zur Konstruktion des Bildes eines Pfeils $A\vec{A}'$ gehen wir wie folgt vor:

1. Strahl S_1 parallel zur Achse auf Spiegel zeichnen, der Schnittpunkt des reflektierten Strahls mit der Achse $\overline{OM}$ definiert den Brennpunkt F.

2. Strahl S_2 durch den Brennpunkt zeichnen. Der reflektierte Strahl muss parallel zur Achse $\overline{OM}$ sein.

3. Der Schnittpunkt der reflektierten Strahlen ist der Bildpunkt B' der Pfeilspitze A'.

4. Als Kontrolle Strahl S_3 durch den Mittelpunkt M zeichnen. Er wird in den Mittelpunkt zurückreflektiert und muss auch durch den Bildpunkt B' gehen.

Punkte 2 und 4 können vertauscht werden.

Es entsteht also ein umgekehrtes Bild.

Achtung: Die Konstruktion gilt nur in der paraxialen Näherung (achsennahe Strahlen). Versuchen Sie's mit Zirkel und Lineal!

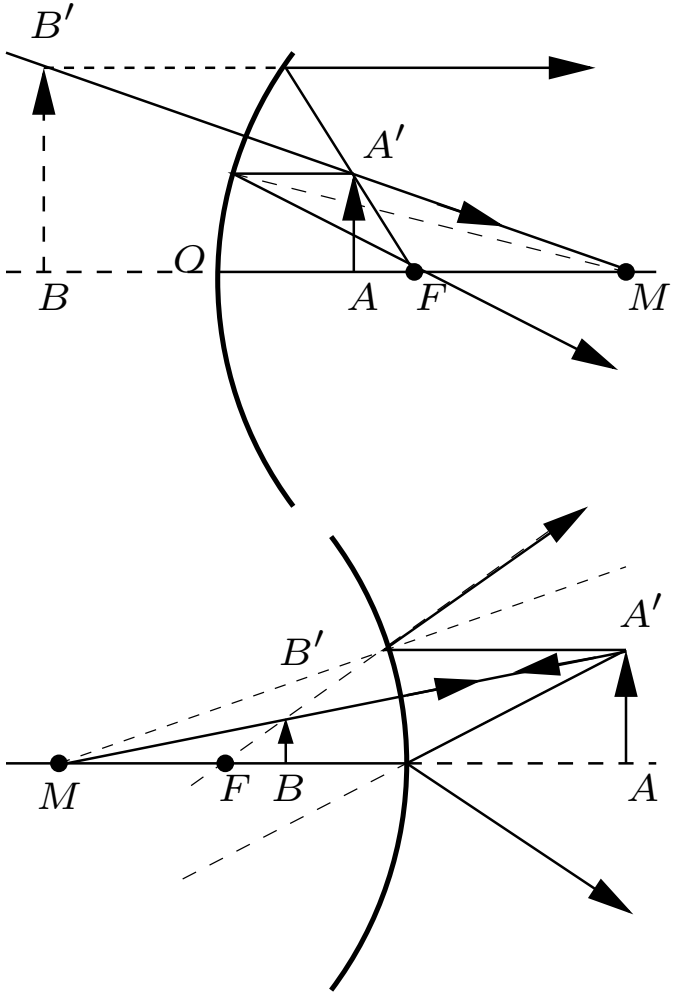
Den Abbildungsmaßstab bestimmt man mit Hilfe des Strahlensatzes. Für paraxiale Strahlen gilt

$$\overline{AA'} : g - R \approx \overline{BB'} : R - b,$$

woraus man mit Hilfe der Spiegelformel findet

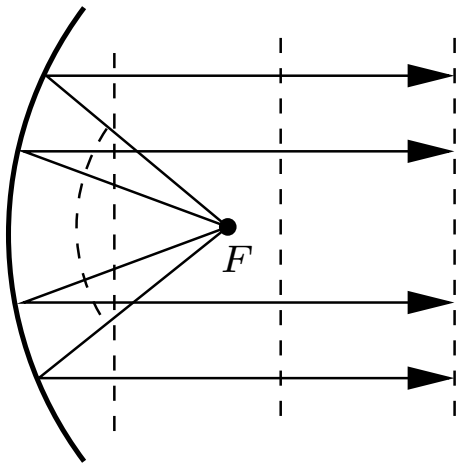
$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{g}{b}.$$

Virtuelle und reelle Bilder



Liegt der Gegenstand zwischen Brennpunkt F und Spiegel, so werden die Strahlen divergent, es entsteht ein **virtuelles** Bild, $scheinbar\ hinter$ dem Spiegel. Liegt der Krümmungsmittelpunkt M des Spiegels auf derselben Seite wie der Gegenstand, so heißt der Spiegel **konkav** gekrümmt. Liegt er auf der anderen Seite, so heißt er **konvex** gekrümmt. In diesem Fall entstehen nur virtuelle Bilder.

Parabolspiegel



Oft werden statt sphärischer Spiegel sog. Parabolspiegel verwendet. Deren Form ist, wie ihr Name sagt, nicht sphärisch, sondern parabolisch. Sie haben die sehr schöne Eigenschaft, dass achsenparallele Strahlen alle in denselben Brennpunkt fallen. Dies kann einfach gezeigt werden. Eine Phasenfläche (hier gestrichelt gezeichnet), die kugelförmig vom Brennpunkt ausgeht, geht in parallele Ebenen über.

Übung: Tun Sie dies!