Warum haben Teilchen eine Masse $\neq 0$?

In der heutigen Doppelstunde werde ich versuchen, den Higgs-Mechanismus zu erklären, der nach heutiger Meinung dafür verantwortlich ist, dass Teilchen überhaupt eine Masse aufweisen. Dazu werden wir uns mit sog. **Eichtheorien** auseinandersetzen, welche die Wechselwirkungen aller Elementarteilchen beschreiben. Dazu werden wir den aus der theoretischen Mechanik-Vorlesung bekannten Lagrange-Formalismum verwenden. Als neue Begriffe werden die **lokale Eichinvarianz**, die **spontane Symmetriebrechnung** und der **Feynman-Formalismus** auftreten.

Das Photon und die QED

Wie behandelt man das Photon relativistisch korrekt? Es wird durch die Maxwellgleichungen beschrieben, die ihrerseits schon relativistisch korrekt sind[1]. Sie lauten in differentieller Form (in cgs-Einheiten)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

In der relativistischen Notation werden aber $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zu einem antisymmetrischen Feldstärkentensor $F^{\mu\nu}$ und die Ladungs- und Stromdichten zu einem Vierervektor

[1] Das war ja die eigentliche Motivation für die spezielle Relativitätstheorie.

zusammengefasst:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J^\mu = (c\rho, \vec{j}).$$

Damit lauten die inhomogenen Maxwellgleichungen ganz einfach

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu.$$

Wir wissen ja bereits, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ bedeutet, dass das Magnetfeld als Rotation eines Vektorpotentials $\vec{A}$ geschrieben werden kann, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Das elektrische Feld wiederum lässt sich als Gradient eines skalaren Potentials V schreiben,

$\vec{E} = \vec{\nabla} V$. Mit der Definition des Viererpotentials $A \doteq (V, \vec{A})$ kann man den Feldstärkentensor schreiben als

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu,$$

die inhomogenen Maxwellgleichungen lauten dann

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu.$$

In der klassischen Elektrodynamik spielen die Felder die wesentliche Rolle, in der relativistischen ist es oft sinnvoller die Potentiale zu verwenden. Die beiden homogenen Maxwellgleichungen sind in der Potentialformulierung verschwunden - sie sind nur noch implizit vorhanden. Der Nachteil dieser Formulierung liegt darin, dass das Potential A^μ nicht vollständig definiert ist.

In der Quantenelektrodynamik (QED) wird das Potential A^μ zur Wellenfunktion des Photons. In der sog. Lorentz-Eichung ($\partial_\mu A^\mu = 0$) wird die Maxwellgleichung zu

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu, \quad \text{wo} \quad \Box \doteq \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2.$$

Ein freies Photon (im Vakuum, also $J^\mu = 0$) erfüllt die Gleichung

$$\Box A^\mu = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad A^\mu(x) = a e^{-(i/\hbar) p \cdot x} \, \epsilon^\mu(p),$$

wo $\epsilon^\mu(p)$ der **Polarisationsvektor** ist und den Spin des Photons charakterisiert. Man erkennt übrigens hier die Klein-Gordon Gleichung für ein masseloses Teilchen. Einsetzen der Lösung in die Gleichung gibt die richtige Bedingung an p^μ,

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad \text{bzw.} \quad E = |\vec{p}| c.$$

Repetition: Der Lagrange-Formalismus

Die Lagrange-Funktion der klassischen Mechanik ist die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie,

$$L = T - U,$$

wo T die kinetische und U die potentielle Energie ist.

Der Euler-Lagrange Formalismus sagt uns, dass wir zu Herleitung der Bewegungsgleichungen lediglich das Rezept

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

anwenden müssen. Tun wir dies, so erhalten wir für den eindimensionalen Fall und für ein Teilchen im Potential U,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial v} = mv \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Wenden wir nun den Lagrange-Formalismus an, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

also (mit $\dot{m} = 0$)

$$m\dot{v} = ma = -\frac{\partial U}{\partial x} = F.$$

Lagrange-Funktionen in der relativistischen Feldtheorie

Als nächsten Schritt müssen wir ein lokalisiertes Teilchen durch eine Feldgröße ersetzen, welche nicht lokalisiert sein soll. Ein Feld (wie z.B. die Temperatur in Kiel, oder auch die Windgeschwindigkeit) kann an vielen Orten (skalar oder vektoriell) definiert sein. Die Lagrangefunktion L wird in der relativistischen Formulierung zur **Lagrangedichte** $\mathcal{L}$, welche wiederum eine Funktion der Felder ϕ_i und deren Ableitungen nach x, y, z und t ist:

$$\partial_\mu \phi_i \doteq \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu}.$$

Im klassischen Fall würde links nur die Zeitableitung stehen, im relativistischen Fall müssen wir alle Koordinaten gleichberechtigt behandeln. Die Euler-Lagrange-

Gleichung wird dann auf einfachst mögliche Weise verallgemeinert zu

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}, \quad \text{wo} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Bsp.I: Die Klein-Gordon Gleichung für ein Spin 0 Skalarfeld

Die Lagrangedichtefunktion für diesen Fall beinhaltet nur ein Skalarfeld ϕ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung wird zu

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi,$$

also

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0,$$

die **Klein-Gordon-Gleichung** für ein Spin 0 Teilchen der Masse m (siehe P4_V9).

Bsp.II: Die Dirac-Gleichung für ein Spin 1/2 Spinorfeld

Die Lagrangefunktion lautet nun

$$\mathcal{L} = i\,(\hbar c)\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \left(mc^{2}\right)\bar{\psi}\psi.$$

Wir wenden die Euler-Lagrange-Gleichung vorerst auf $\bar{\psi}$ an,

$$\frac{\partial}{\partial\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}\right)} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\hbar c\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^{2}\psi,$$

und damit

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0,$$

die **Dirac-Gleichung** für für ein Spin-1/2-Teilchen der Masse m.

Für das Spinorfeld ψ geht die Sache ähnlich einfach,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\hbar c \bar{\psi}\gamma^\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -mc^2 \bar{\psi}.$$

Damit erhalten wir die adjungierte der Dirac-Gleichung

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\bar{\psi} = 0.$$

Bsp.III: Die Proca-Gleichung für ein Spin-1 Vektorfeld A^μ

Weil wir diese heute noch brauchen werden, betrachten wir nun auch noch eine neue Lagrangedichte für das Vektorfeld A^μ,

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi}\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu.$$

Wieder wenden wir die Euler-Lagrange-Gleichung an

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = \frac{-1}{4\pi}\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu.$$

Zusammen haben wir die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0,$$

die sog. **Proca-Gleichung**, welche ein Spin 1 Teilchen der Masse m beschreibt. Die Kombination

$$F^{\mu\nu} \doteq \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

kommt immer wieder vor, weshalb man sie so abkürzt. Schreiben wir die Lagrangedichte mit dieser neuen Größe, so erhalten wir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

und die Feldgleichung wird zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0.$$

Für $m = 0$ haben wir genau die Gleichungen der Elektrodynamik wiedergefunden! Diese beschreiben ein masseloses Vektorfeld.

Letztes Bsp.: Die Maxwell-Gleichungen mit Quellterm J^μ

Wir betrachten deshalb noch ein masseloses Vektorfeld, aber nun mit einem Quellterm J^μ, wie er in der Elektrodynamik vorkommt.

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu,$$

wo $F^{\mu\nu}$ wie vorher auf Seite 13 definiert ist und J^μ eine bestimmte Funktion sei, die die Strom- und Ladungsdichten beschreibt. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten nun

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu,$$

was genau die Tensorform der Maxwellgleichungen ist, vgl. Seite 3. Sie beschreibt die elektromagnetischen Felder, die durch eine Anordnung von Ladungs- und Stromdichten erzeugt werden. Die Größe J^μ darf nicht frei erfunden werden, sondern muss $\partial_\nu J^\nu = 0$ erfüllen, weil ja $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ gilt. Die Stromdichte muss die Kontinuitätsgleichung erfüllen.

Die Lagrange-Dichte

Ich habe Ihnen hier die Lagrangedichten “an den Kopf geschmissen”. Sollten wir sie nicht herleiten können, wie dies in der Mechanik geschehen ist? Dort war doch $L = T - U$.

In der relativistischen Feldtheorie werden die Lagrangedichtefunktionen als gegeben betrachtet, man muss ja mit irgendetwas beginnen. Es zeigt sich aber, dass diese nicht eindeutig festgelegt sind. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lassen einigen Spielraum. So können wir $\mathcal{L}$ mit einem beliebigen Faktor multiplizieren, wir können auch eine Konstante addieren, das spielt keine Rolle. Ja, wir können sogar die Divergenz einer beliebigen Vektorfunktion addieren, z.B., $\partial_\mu M^\mu$, wo M^μ irgendeine Funktion von ϕ_i und $\partial^\mu \phi_i$ ist. Diese Terme kürzen sich im Euler-Lagrange-Formalismus immer raus. Die Freiheit der Lorentz-Eichung in der klassischen Elektrodynamik beruht genau auf dieser Invarianz.

Die Eich-Invarianz

Den Sachverhalt, dass eine Lagrangedichte auf die oben genannte Art und Weise nicht vollständig definiert ist, und dass daraus aber keine physikalischen Konsequenzen resultieren, wird Eichinvarianz genannt. Die Maxwellgleichungen sind bekanntlich invariant gegenüber den Transformationen

$$\begin{aligned}\Phi(x^\mu) \longrightarrow \Phi'(x^\mu) &= \Phi(x^\mu) - \partial_t \lambda(x^\mu), \\ \vec{A}(x^\mu) \longrightarrow \vec{A}'(x^\mu) &= \vec{A}(x^\mu) + \vec{\nabla}_x \lambda(x^\mu),\end{aligned}$$

welche sog. Eichtransformationen sind. Diese Invarianz ist eine “Symmetrie” und nach dem Satz von Noether entspricht dieser Symmetrie auch eine erhaltene Größe.

Übung: Zeigen Sie, dass aus der Eichinvarianz die Erhaltung der Ladung folgt!

Lokale Eich-Invarianz

Wir betrachten im Folgenden die Lagrange-Dichte für die Dirac-Gleichung (S. 11)

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi,$$

welche invariant ist unter der Eich-Transformation $\psi \longrightarrow \exp(i\theta)\psi$, wo θ eine reelle Zahl sein mag. Man nennt diese eine sog. **globale Eichtransformation**. Die Invarianz ist einfach ersichtlich, denn die Faktoren $\exp(i\theta)$ bzw. $\exp(-i\theta)$ heben sich natürlich einfach auf. Bereits in der klassischen Quantenmechanik ist die Phase der Wellenfunktion unbestimmt. Nur die relative Phase spielt in Interferenzerscheinungen eine Rolle.

Was würde aber passieren, wenn die Phase an jedem Raum-Zeit-Ort verschieden wäre, also $\theta = \theta(x^\mu)$ und damit $\psi \longrightarrow \exp(i\theta(x^\mu))\psi$? Man nennt eine solche Transformation eine **lokale Eichtransformation**. Eine Invarianz unter lokalen Eichtransformationen ist eine viel stärkere Forderung, als für globale. Ist die Diracsche Lagrangedichte invariant unter solchen Transformationen? Nein, natürlich nicht, neu tritt ein zusätzlicher Term auf, der von der Ableitung von θ nach x^μ stammt:

$$\partial_\mu \left(e^{i\theta}\psi\right) = i\left(\partial_\mu \theta\right) e^{i\theta}\psi + e^{i\theta}\partial_\mu \psi.$$

Damit muss sich auch die Lagrangedichte verändern,

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} - \hbar c\left(\partial_\mu \theta\right) \bar{\psi}\gamma^\mu \psi.$$

Im Folgenden ist es nützlich, den gemeinsamen Faktor $-(q/\hbar c)$ aus der Phase θ herauszuziehen,

$$\lambda(x) \doteq -\frac{\hbar c}{q}\theta(x),$$

wo q die Ladung des Teilchens sei. Damit lautet die Transformation der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi\right) \partial_\mu \lambda, \quad \text{und} \quad \psi \longrightarrow e^{-iq\lambda(x)/\hbar c}\psi. \tag{1}$$

Lokale Eich-Invarianz der vollständigen Lagrangedichte

Na und? Das war ja wirklich nichts besonderes. Ja, interessant wird es erst, wenn wir fordern, dass die vollständige Lagrangedichte $\mathcal{L}$ invariant wird unter lokalen Phasentransformationen[2]. Die **freie** Diracsche Lagrangedichte war ja nicht erhalten. Sie kann aber in eine Erhaltungsform gebracht werden, indem wir einen Term addieren

$$\left\{\mathcal{L} - \hbar c \left(\partial_\mu \theta\right) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi\right\} - \left(q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi\right) A_\mu, \tag{2}$$

wo A_μ ein neues Feld ist, welches sich unter

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda \tag{3}$$

[2] Dafür gibt es keinen richtigen Grund, dies ist eher 'axiomatisch' zu verstehen. Es funktioniert! Eine Art neuer Erhaltungssatz.

transformiert. Auch dies ist keine Überraschung, sehen Sie sich die Gleichung auf der vorherigen Seite an. Da tritt derselbe Term auf. Diese neue 'verbesserte' Lagrangedichte **ist aber nun lokal invariant**. Der neue Term $\partial_\mu \lambda$ kompensiert den zusätzlichen Term in Glg. 1. **Dafür haben wir nun ein neues Feld A^μ, welches aufgetaucht ist!** Das ist ein Vektorfeld und deshalb schauen wir uns am besten die Proca-Gleichung an (Seite 13) an

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{m_A c}{\hbar} \right)^2 A^\nu A_\nu.$$

Die Geschichte ist aber noch nicht fertig, denn während $F^{\mu\nu}$ invariant ist unter der Transformation von Glg. 3, gilt dies nicht für $A^\nu A_\nu$. Damit dies gilt, muss das neue Feld masselos sein, $(m_A = 0)$.

Na und? II: Lagrangedichte der QED

Stellen wir nun zusammen, was wir da zusammenstellen müssen, um die Lagrangedichte invariant unter lokalen Eichtransformationen zu gestalten:

$$\mathcal{L} = \left(i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi\right) - \left[\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] - \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu.$$

die Ähnlichkeit von A^μ mit dem elektromagnetischen Potential ist kein Zufall - die Transformationsregel 3 ist genau die Eichinvarianz, die wir für das elektromagnetische Potential gefunden hatten. Die beiden letzten Terme in der Gleichung oben geben genau die Maxwellsche Lagrangedichte an für die Stromdichte

$$J^\mu = cq\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right). \quad \text{Na und?}$$

Das heißt, dass die Forderung nach der lokalen Eichinvarianz der Dirac-Gleichung die vollständige Elektrodynamik erzeugt und auch gleich die durch die Diracschen Teilchen erzeugten Ströme.

Und wo finden wir die Masse?

Ja, gute Frage. Die müssen wir in der Lagrangedichte noch aufspüren. Das Eichfeld A^μ ist ja masselos (schließlich beschreibt es ja auch das Photon)! Wie erhalte ich denn massive $W^\pm$ und Z-Bosonen? Dazu müssen wir die Lagrangedichte nochmals etwas genauer anschauen. Um uns das Leben zu vereinfachen, erfinden wir eine besonders einfache:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) + e^{-(\alpha\phi)^2},$$

wo α eine reelle Konstante sei. Hier finden wir keinen Massenterm[3]. Halt! Entwickeln wir $\mathcal{L}$ in eine Reihe,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) + 1 - \alpha^2\phi^2 + \frac{1}{2}\alpha^4\phi^4 - \frac{1}{6}\alpha^6\phi^6 + \ldots,$$

[3] Der ja als Koeffizient des quadratischen Terms auftritt.

so tritt durchaus ein Massenterm auf (die Konstnte 1 ist irrelevant, sie beeinflusst die Dynamik nicht), wie man im Vergleich mit der Klein-Gordon-Gleichung sieht. Diese "Spielzeug"-Lagrangedichte beschreibt ein Teilchen der Masse $\sqrt{2}\alpha\hbar/c$. Die Terme höherer Ordnung beschreiben die Wechselwirkung des Feldes mit sich selber. **Wir lernen: Der Masseterm kann gefunden werden, indem ich die Lagrangedichte in eine Reihe entwickle und den quadratischen Term anschaue.**

Aber so einfach ist es doch nicht! Betrachten wir die Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4, \tag{4}$$

wo μ und λ reelle Koeffizienten seien. Der zweite Term sieht aus wie ein Massenterm, kann es aber nicht sein, weil er eine **imaginäre Masse** beschreiben würde!

Vorschrift für den Massenterm

Um den Massenterm zu finden, müssen wir immer zuerst den Grundzustand der potentiellen Energie des Systems finden. Aus der Definition der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$

müssen wir also das Minimum (den Grundzustand) der potentiellen Energie finden, um dann von dort aus den Massenterm zu suchen. Bisher war der Grundzustand immer der bei $\phi = 0$. Das muss aber nicht sein, wie die Lagrangedichte 4 zeigt. Wir brauchen also das Minimum deren potentiellen Energie

$$\mathcal{U}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4$$

zu finden, welche offensichtlich bei

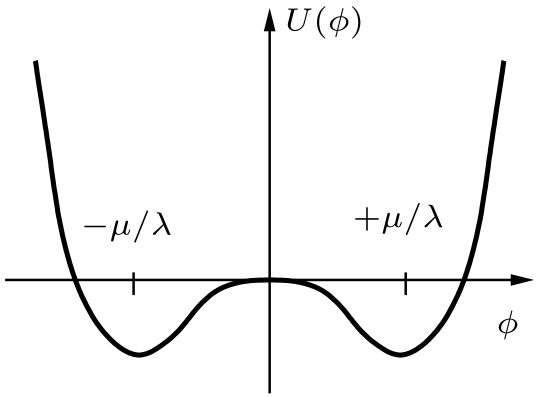
$$\phi = \pm\frac{\mu}{\lambda}$$

liegt. Nun entwickeln wir die Lagrangedichte um dieses Minimum herum in eine Reihe (bzw. drücken $\mathcal{L}$ in Funktion von $\eta = \phi \pm \frac{\mu}{\lambda}$ aus:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)\left(\partial^\mu \eta\right) - \mu^2\eta^2 \pm \mu\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2 . \tag{5}$$

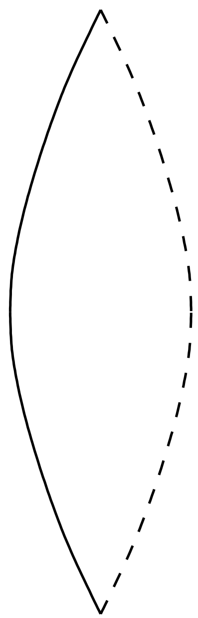
Der zweite Term ist nun ein richtiger Masseterm und die Lagrangedichte beschreibt ein Teilchen der Masse $m = \sqrt{2}\mu\hbar/c$. Der dritte und vierte Term beschreiben die Wechselwirkung des Feldes mit sich selber, der letzte ist als konstanter Term für die Dynamik irrelevant.

Was lernen wir daraus?



Eigentlich seltsam! Alles, was wir getan haben, war, die Lagrangedichte ein wenig umzuformen! Beide Formen (Glg. 4 und 5) beschreiben dieselbe Physik! Um die Masse in der Lagrangedichte zu erkennen, müssen wir diese um das Minimum der potentiellen Energie $\mathcal{U}$ entwickeln und die Lagrangedichte als Funktion der Abweichung von diesem Minimum beschreiben. Dann erscheint der Massenterm als Koeffizient des quadratischen Terms.

Spontane Symmetriebrechung



Das soeben besprochene Beispiel illustriert ein wichtiges Prinzip der modernen Physik, das der **spontanen Symmetriebrechung**. Die ursprüngliche Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ist gerade in ϕ, sie ist invariant gegenüber der Transformation $\phi \longrightarrow -\phi$. Die in η ausgedrückte Lagrangedichte ist es aber nicht mehr. Die Symmetrie “wurde gebrochen”. Dies geschieht, weil das “Vakuum” (der Grundzustand) nicht dieselbe Symmetrie aufweist, wie die Lagrangedichte selber. Die Gesamtheit aller möglichen Grundzustände ist immer noch symmetrisch (das $\pm$!), aber sobald wir einen wählen müssen, ist die Symmetrie gebrochen, ähnlich wie ein Lineal beim Zusammendrücken in die eine oder andere Seite ausweicht.

Spontane Symmetriebrechung II

Interessanter wird es, wenn man die spontane Symmetriebrechung mit kontinuierlichen Grundzuständen betrachtet, z. B. indem man das Lineal durch eine Stricknadel ersetzt, die in irgendeine Richtung ausweichen kann. Die Grundzustände beschreiben dann einen Kreis

$$\phi_{1\mathrm{min}}^2 + \phi_{2\mathrm{min}}^2 = \mu^2/\lambda^2,$$

wenn wir die Lagrangedichte mit zwei Feldern ϕ_1 und ϕ_2 schreiben,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_1\right)\left(\partial^\mu \phi_1\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_2\right)\left(\partial^\mu \phi_2\right) + \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2. \quad (6)$$

Wieder führen wir ein Feld η ein, aber auch ein zweites, ξ, welche die Fluktuationen um den Grundzustand (das Vakuum) beschreiben:

$$\eta = \phi_1 - \mu/\lambda, \quad \text{und} \quad \xi = \phi_2.$$

Nun müssen wir die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ in diesen neuen Feldern ausdrücken, nach etwas Rechnen erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)\left(\partial^\mu \eta\right) - \mu^2\eta^2\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \xi\right)\left(\partial^\mu \xi\right)\right] \\ &\quad - \left[\mu\lambda\left(\eta^3 + \eta\xi^2\right) + \frac{\lambda^2}{4}\left(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2\right)\right] + \frac{\mu^4}{4\lambda^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Der letzte Term ist konstant und damit wieder irrelevant. Der erste stellt die freie Klein-Gordon Lagrangedichte für das Feld η dar, welches die Masse $m = \sqrt{2}\mu\hbar/c$ trägt. Der zweite Term ist die Lagrangedichte für eine masseloses Feld ξ und die weiteren Terme stellen die Wechselwirkungen der Felder mit sich und untereinander dar.

Der wesentliche Punkt hier ist, dass das eine Feld automatisch masselos wurde! Dies kann auch streng mathematisch gezeigt werden (Satz von Goldstone),

in einer spontan gebrochenen kontinuierlichen Symmetrie tauchen automatisch ein oder mehrere masselose Felder auf (sog. **Goldstone-Bosonen**).
Das ist nicht gut, denn wir wollten doch die Masse des Eichfeldes erzwingen! Statt dessen taucht da ein masseloses Feld auf, welches man nicht beobachtet. Es zeigt sich, dass man dieses loswerden kann, indem man die Idee der spontanen Symmetriebrechung auf die lokale Eichinvrianz anwendet.

Und damit sind wir angelangt beim ...

Der Higgs-Mechanismus

Dazu kombinieren wir die beiden Felder ϕ_1 und ϕ_2 vom vorigen Abschnitt in ein komplexes Feld

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2 \quad \text{sodass} \quad \phi^\star \phi = \phi_1^2 + \phi_2^2.$$

Damit lässt sicht die Lagrangedichte (Glg. 6) schreiben als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi_1\right)^\star \left(\partial^\mu \phi_1\right) + \frac{1}{2}\mu^2 \left(\phi^\star \phi\right) - \frac{1}{4}\lambda^2 \left(\phi^\star \phi\right)^2 .$$

$\mathcal{L}$ ist nun offensichtlich invariant unter der globalen Eichtransformation $\phi \longrightarrow \exp(i\theta)\phi$. Wir wollen aber die lokale Eichinvarianz fordern, also dass

$$\phi \longrightarrow e^{i\theta(x)}\phi.$$

Dies kann erreicht werden, indem wir schreiben

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu - \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\phi^\star\right]\left[\left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}A^\mu\right)\phi\right] \\ &\quad +\frac{1}{2}\mu^2\left(\phi\phi^\star\right) - \frac{1}{4}\lambda^2\left(\phi^\star\phi\right)^2 - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{8}$$

Von jetzt an ist es einfach, wir brauchen nur noch die gleichen Schritte anzuwenden, wie im vorigen Abschnitt. Wir definieren wieder die Felder

$$\eta = \phi_1 - \mu/\lambda, \quad \text{und} \quad \xi = \phi_2$$

und die Lagrangedichte wird zu

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)\left(\partial^\mu \eta\right) - \mu^2\eta^2\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \xi\right)\left(\partial^\mu \xi\right)\right] \\
& + \left[-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] \\
& + \left\{\frac{q}{\hbar c}\left[\eta\left(\partial_\mu \xi\right) - \xi\left(\partial_\mu \eta\right)\right] A^\mu + \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 \eta\left(A_\mu A^\mu\right)\right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2\left(\xi^2 + \eta^2\right)\left(A_\mu A^\mu\right) - \lambda\mu\left(\eta^3 + \eta\xi^2\right) - \frac{\lambda^2}{4}\left(\eta^4 + 2\eta^2\xi^2 + \xi^4\right)\right\} \\
& + \left(\frac{\mu}{\lambda}\frac{q}{\hbar c}\right)\left(\partial_\mu \xi\right) A^\mu + \left(\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2 . \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Wie bereits vorhin beschreibt die erste Zeile das massive Feld η mit Masse

$m_\eta = \sqrt{2}\mu\hbar/c$ und das masselose Feld (Goldstoneboson) ξ. die zweite Zeile beschreibt das freie Eichfeld A^μ, **aber neu hat es eine Masse**,

$$m_A = 2\sqrt{\pi}\left(\frac{q\mu}{\lambda c^2}\right),$$

wie man durch Vergleich mit der Proca-Gleichung feststellt. Der Term in geschweiften Klammern beschreibt die verschiedenen Wechselwirkungen zwischen η, ξ und A^μ.

Aber wohin nun mit dem unbeobachteten Goldstoneboson? Genaue Betrachtung von Glg. 9 liefert einen weiteren verdächtigen Term,

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\frac{q}{\hbar c}\right)(\partial_\mu \xi)\, A^\mu,$$

der mit dem Goldstoneboson ξ verknüpft ist. Eine solche Wechselwirkung gibt es nicht! ξ kann sich nicht in A^μ verwandeln! Das zeigt, dass wir da irgendwo einen Fehler gemacht haben und eine Teilchensorte (Feld) fälschlich als zur Theorie gehörend identifiziert haben. Wir müssen es irgendwie loswerden. Dazu können wir die lokale Eichinvarianz von Glg. 8 ein weiteres Mal ausnützen und das Feld ξ (bzw. ϕ_2) vollständig wegtransformieren! Wir schreiben die globale Eichtransformation $\phi \longrightarrow \exp(i\theta)\phi$ in Real- und Imaginärteilen,

$$\begin{aligned}\phi \longrightarrow \phi' &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\phi_1 + i\phi_2) \\ &= (\phi_1\cos\theta - \phi_2\sin\theta) + i(\phi_1\sin\theta + \phi_2\cos\theta)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Wenn wir nun

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)$$

wählen, damit dann ϕ' reell wird, heisst das, dass $\phi_2 = 0$ verschwindet! Das Eichfeld A^μ wird sich entsprechend auch transformieren, aber die Lagrangedichte wird wegen ihrer Eichinvarianz ihre Form beibehalten, nur ξ ist jetzt Null und die entsprechenden Terme verschwinden:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)\left(\partial^\mu \eta\right) - \mu^2\eta^2\right] + \left[-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] \\ &\quad + \left\{\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 \eta\left(A_\mu A^\mu\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 \eta^2\left(A_\mu A^\mu\right) - \lambda\mu\eta^3 - \frac{\lambda^2}{4}\eta^4 + \right\} \\ &\quad + \left(\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2 . \end{aligned} \tag{11}$$

Dadurch haben wir das Goldstoneboson und den 'schlechten' Term in der Lagrangedichte eliminiert und es verbleiben ein massives Eichfeld A^μ und ein neues skalares massives Feld η übrig, das **Higgs-Teilchen**. Diese Rechnung ist natürlich nur mit einer "Spielzeugtheorie" durchgeführt. In der echten Rechnung ist das Eichfeld das $W^\pm$ und das Z-Boson und das Higgs-Feld eben das Higgs-Teilchen.