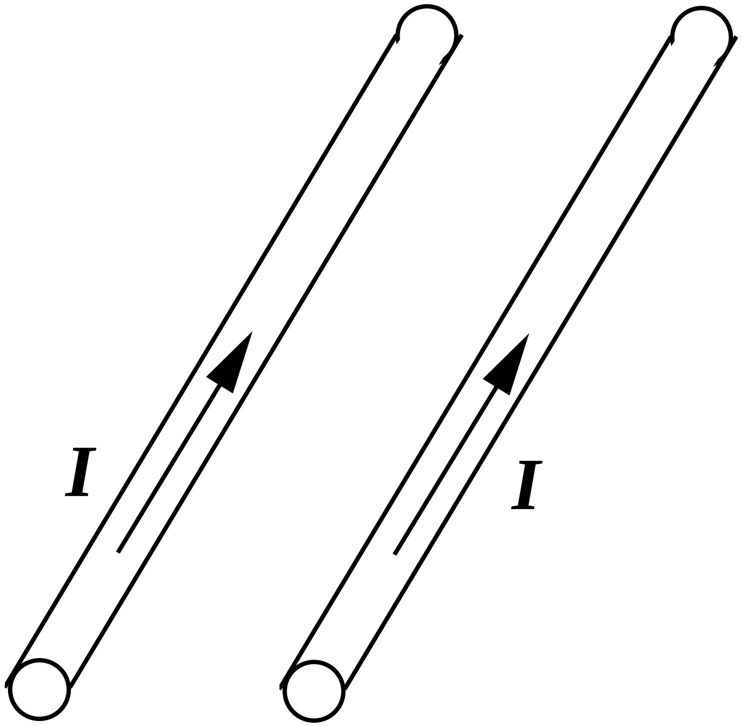
Kräfte auf stromdurchflossene elektrische Leiter - das Ampère relativistisch



Ein Ampère ist die Stromstärke, die zwei stromdurchflossene unendlich lange, gerade in einem Abstand d von einem Meter von einander im Vakuum angeordnete Leiter aufeineander eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N ausüben lässt.

Der Strom berechnet sich aus der Ladungsdichte n_{-} und der Fließgeschwindigkeit der Leitungselektronen v. Alle anderen Ladungsträger im Leiter mit Querschnittsfläche A stehen still. Im Leiter fließt der Strom $I = e \cdot n_{-} \cdot A \cdot v$.

Wir betrachten nun die Situation, in der die Ströme in den beiden Leitern parallel sind. Die Leitungselektronen im einem Leiter fließen genau gleich schnell, wie die im anderen Draht. Für die Leitungselektronen erscheint es aber, als ob das andere Leiterstück $\mathrm{d}l' = \mathrm{d}l/\gamma$ leicht längenkontrahiert ist, weshalb dort die immobilen positiven Ladungsträger eine leicht erhöhte Dichte aufweisen, $n'_+ = N_+/(A \cdot l') = N_+/(A \cdot l) \cdot \gamma = n_+ \cdot \gamma$, wo N_+ die Anzahl positiver Ladungen und $Q = N_+ \cdot e$ die positive Ladung im Leiter ist.

Wir stellen also fest, dass im Laborsystem S der Leiter elektrisch neutral erscheint und im bewegten Sytem S' der Leiter leicht positiv geladen erscheint und sich die positive Ladungsdichte so transformiert,

$$n'_+ = n_+ \cdot \gamma.$$

Wie groß ist denn die Dichte der Leitungselektronen, n_-, im bewegten System

S'? Im Laborsystem S erscheint der Leiter elektrisch neutral, also $n_+ = n_-$. In S bewegen sich die Leitungselektronen mit Geschwindigkeit v, d.h., $n_- = n'_- \cdot \gamma$, also $n'_- = n_-/\gamma$.

Die Ladungsdichte des Leiter im bewegten Bezugssystem S' beträgt deshalb

$$
\begin{aligned}
\rho' &= en' = en'_+ - en'_- = en_+ \cdot \gamma - en_-/\gamma \\
&= e\left(\frac{n_+}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - n_-\sqrt{1-(v/c)^2}\right) \\
&= e\left(\frac{n_+}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - n_+\frac{1-(v/c)^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) \\
\rho' &= e\left(n_+\frac{(v/c)^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) \quad = \quad en'_{\text{eff}}.
\end{aligned}
$$

Im Bezugssystem der Leitungselektronen wirkt auf ein Leitungselektron eine Coulombkraft senkrecht zum Draht.

$$F_e' = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2 \cdot n_{\mathrm{eff}}' \cdot A}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{\left(d^2 + l^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}l,$$

wo der Faktor $d/\sqrt{d^2 + l^2}$ den $\cos$ des Winkels zwischen Position l entlang des Leiters, der Position des Leitungselektrons und von dort aus der Senkrechten auf den Leiter beschreibt. So ergibt sich die Kraft senkrecht zum Draht. Die Kräfte parallel zum Draht heben sich gegenseitig auf.

Das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}l}{\left(d^2 + l^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{d^2}$$

wird auf Seiten 7 bis 9 bestimmt. Wir setzen es ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
F_e' &= -\frac{e^2 \cdot n'_{\mathrm{eff}} \cdot A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2d}{d^2} \\
&= -\frac{e^2 \cdot n_+ \cdot A}{2\pi\varepsilon_0}\frac{v^2}{c^2}\frac{1}{d}\,\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \\
&= -\frac{e^2 \cdot n_+ \cdot A}{2\pi\varepsilon_0}\frac{v^2}{c^2}\frac{1}{d},
\end{aligned}
$$

wo wir im letzten Schritt die relativistische Korrektur weggelassen haben weil sie wirklich nur sehr klein ist. Leitungselektronen im Leiter bewegen sich typisch mit Geschwindigkeiten von mm/s. Die Anzahl Leitungselektronen in einem infinitesimalen Leiterstück $\mathrm{d}l$ ist gerade $n_- \cdot A \cdot \mathrm{d}l = n_+ \cdot A \cdot \mathrm{d}l$, was wir einsetzen um die

Kraft auf ein infinitesimales Leiterstück zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}F'_e &= -\frac{e^2 \cdot n_+^2 \cdot A^2 \cdot v^2}{2\pi\varepsilon_0 d c^2}\mathrm{d}l \\
&= -\frac{(e \cdot n_+ \cdot A \cdot v)^2}{2\pi\varepsilon_0 d c^2}\mathrm{d}l \\
&= -\frac{I^2}{2\pi\varepsilon_0 d c^2}\mathrm{d}l \\
&= -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\mathrm{d}l
\end{aligned}
$$

wo wir $\mu_0 \cdot \varepsilon_0 = 1/c^2$ eingesetzt haben.

Eine Schwierigkeit bereitet allenfalls das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}l}{\left(d^2 + l^2\right)^{3/2}}.$$

Es erinnert stark an die nützliche trigonometrische Relation $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ was wir ausnutzen sollten. Wir substituieren deshalb

$$l = d\tan x, \quad x = \arctan\frac{l}{d}, \quad \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = d\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x} = d\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}l}{(d^2+l^2)^{3/2}} &= \int \frac{d}{\cos^2 x} \frac{1}{\left(d^2+d^2\tan^2 x\right)^{3/2}} \mathrm{d}x \\
&= d \int \frac{\left(\cos^2 x\right)^{3/2}}{\left(d^2\cos^2 x + d^2 \sin^2 x\right)^{3/2}} \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{d^2} \int \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{d^2} \sin x \\
&= \frac{1}{d^2} \sin\left(\arctan(l/d)\right).
\end{aligned}
$$

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit Gegenkathete l und Ankathete d. Der $\arctan(l/d)$ ist der Winkel zwischen Ankathete und Hypotenuse. Der $\sin$ dieses Winkels ist

$$
\sin\left(\arctan(l/d)\right) = \frac{l}{\sqrt{d^2+l^2}},
$$

womit wir das Integral bestimmt haben:

$$\int \frac{\mathrm{d}l}{\left(d^2 + l^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{d^2} \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}}.$$

Mit

$$\lim_{l \longrightarrow \infty} \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{l \longrightarrow -\infty} \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}} = -1$$

haben wir schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}l}{\left(d^2 + l^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{d^2}.$$