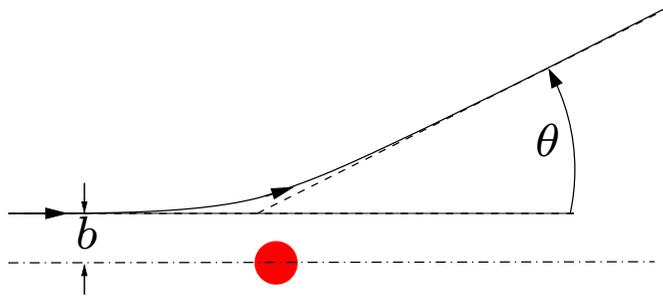
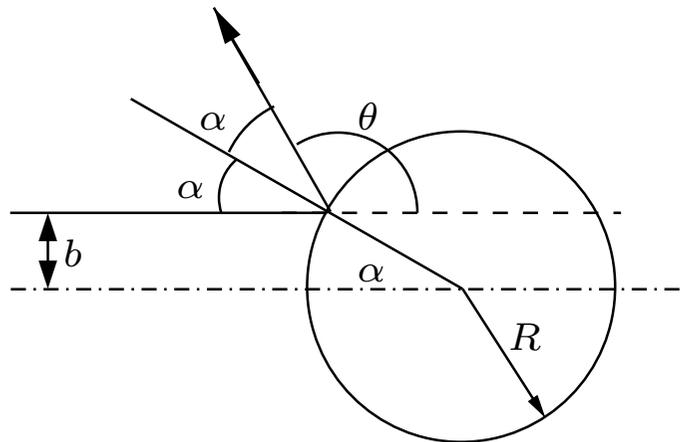


Streuung von Teilchen

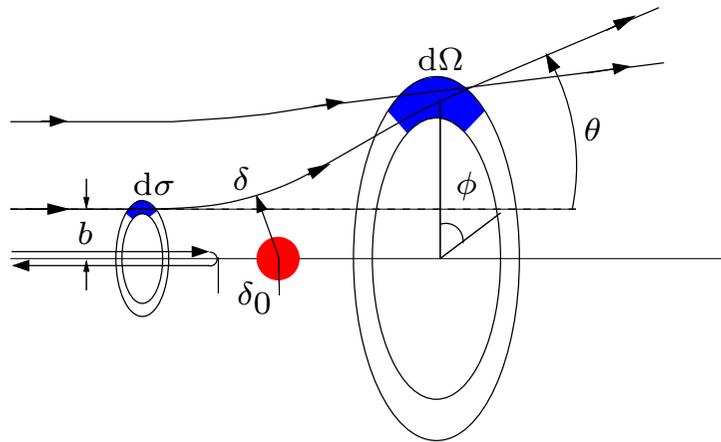


Bei der Streuung eines Teilchens an einem anderen spielt die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen eine entscheidende Rolle - keine Wechselwirkung, keine Streuung! Zur Beschreibung führt man den Streuwinkel θ und den Stoßparameter b ein. Beide sind über das Potential miteinander verknüpft.



An einer harten Kugel streuen Teilchen nach dem bekannten Prinzip "Einfallswinkel = Ausfallswinkel". Aus der Abbildung haben wir $b = R \sin \alpha$ und $2\alpha + \theta = \pi$. Folglich gilt $\sin \alpha = \sin(\pi/2 - \theta/2) = \cos(\theta/2)$. Daraus folgt $b = R \cos(\theta/2)$ bzw. $\theta = 2 \arccos(b/R)$, womit $b(\theta)$ bzw. $\theta(b)$ gegeben ist.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt oder der Streuquerschnitt



Streut das Teilchen aus einem Stoßparameter im Intervall $b, b + db$ wird es in einen Winkel im Intervall $\theta, \theta + d\theta$ streuen. Passiert es eine infinitesimale Fläche $d\sigma$, so streut es in einen Raumwinkel $d\Omega$. Der Proportionalitätsfaktor $d\sigma/d\Omega$ heißt **differentieller Streuquerschnitt**:

$$d\sigma = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega.$$

Aus der Abbildung entnehmen wir, dass

$$d\sigma = |b db d\phi| \quad \text{und} \quad d\Omega = |\sin \theta d\theta d\phi|.$$

Daraus können wir den differentiellen Streuquerschnitt berechnen,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \left(\frac{db}{d\theta} \right) \right|.$$

Für das Beispiel der Streuung an harten Kugeln erhalten wir mit $b = R \cos(\theta/2)$

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{also} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \frac{R \sin(\theta/2)}{2} = \frac{R^2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)}{2 \sin \theta} = \frac{R^2}{4}.$$

Der totale Streuquerschnitt σ ist durch das Integral von $d\sigma$ über alle Raumwinkel gegeben

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega,$$

was im Falle von harten Kugeln wie erwartet $\sigma = \pi R^2$ ergibt.

Die Einheit des Streuquerschnitts ist m^2 , bzw. das **barn**:

$$1\text{b} = 10^{-28}\text{m}^2.$$

Um die Größe eines Atomkernes aufzulösen darf das Projektil höchstens eine de Broglie-Wellenlänge $\lambda = h/p$ haben, die dem Kernradius entspricht, besser aber kürzer. Das kann auch als Folge der Heisenbergschen Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq h/(4\pi)$ interpretiert werden.

Die Rutherford'schen Experimente zum Aufbau von Atomen haben gezeigt, dass diese aus einem Kern und einer Hülle von Elektronen bestehen. Der Rutherford'sche Streuquerschnitt, oder der differentielle Wirkungsquerschnitt lautet

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2},$$

wo E_0 die kinetische Energie des Projektils ist. Bei fester Energie des Projektils ist der Streuquerschnitt nur noch eine Funktion des Winkels und von konstanten Größen. Wenn wir also nun bei einem Streuexperiment Abweichungen vom Rutherford'schen Streuquerschnitt feststellen, so deuten diese darauf hin, dass noch andere Kräfte, die Kernkräfte, wirken. Aus dem Winkel, bei dem diese Abweichung festgestellt werden kann und der Energie der Projektile kann auf den Kernradius geschlossen werden.

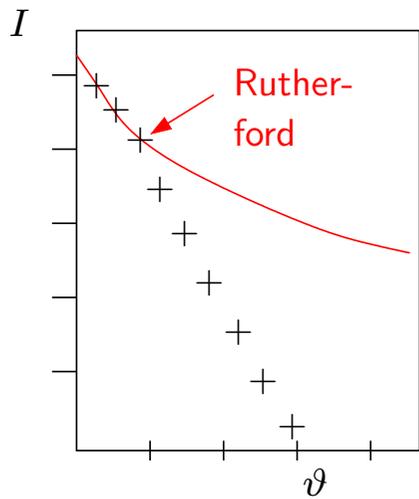
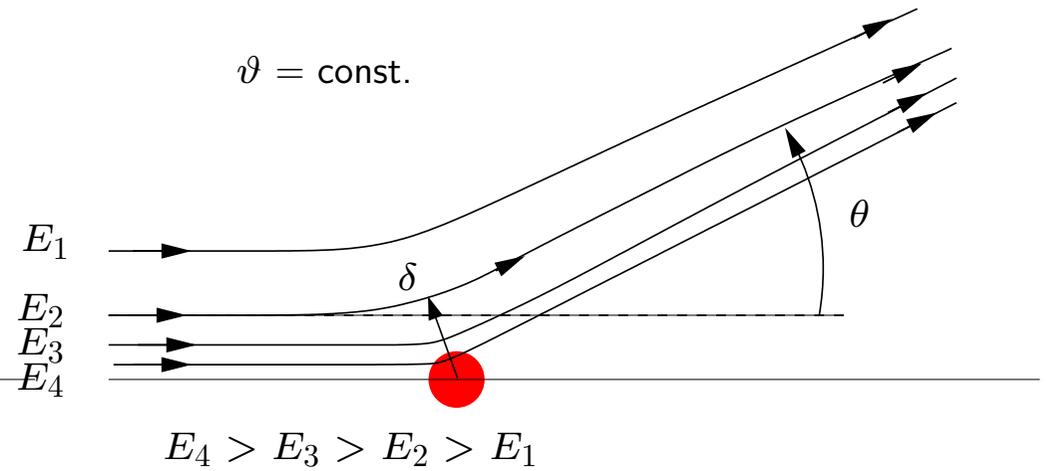
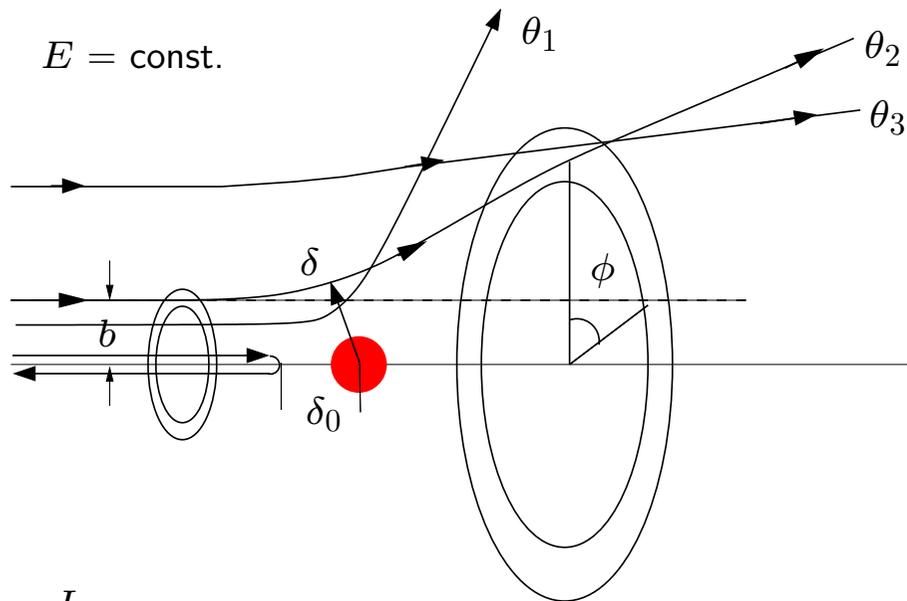
Aus solchen Streuexperimenten wird für die Größe von Kernen der folgende Zusammenhang gefunden:

$$R_N \approx r_0 \cdot A^{1/3},$$

wo A die Massenzahl ist und

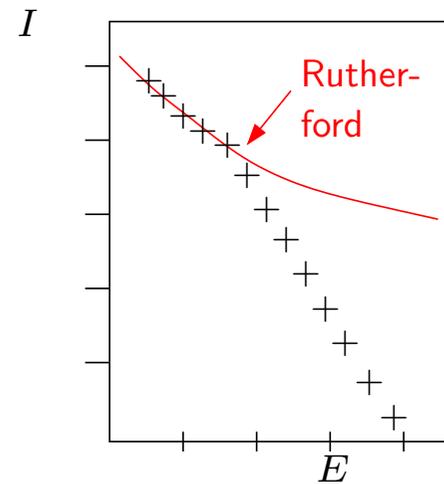
$$r_0 = (1,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-15} \text{m} = (1.3 \pm 0,1) \text{fm}.$$

Ein Femtometer (1 fm), oft Fermi genannt, entspricht etwa einem Kernradius.

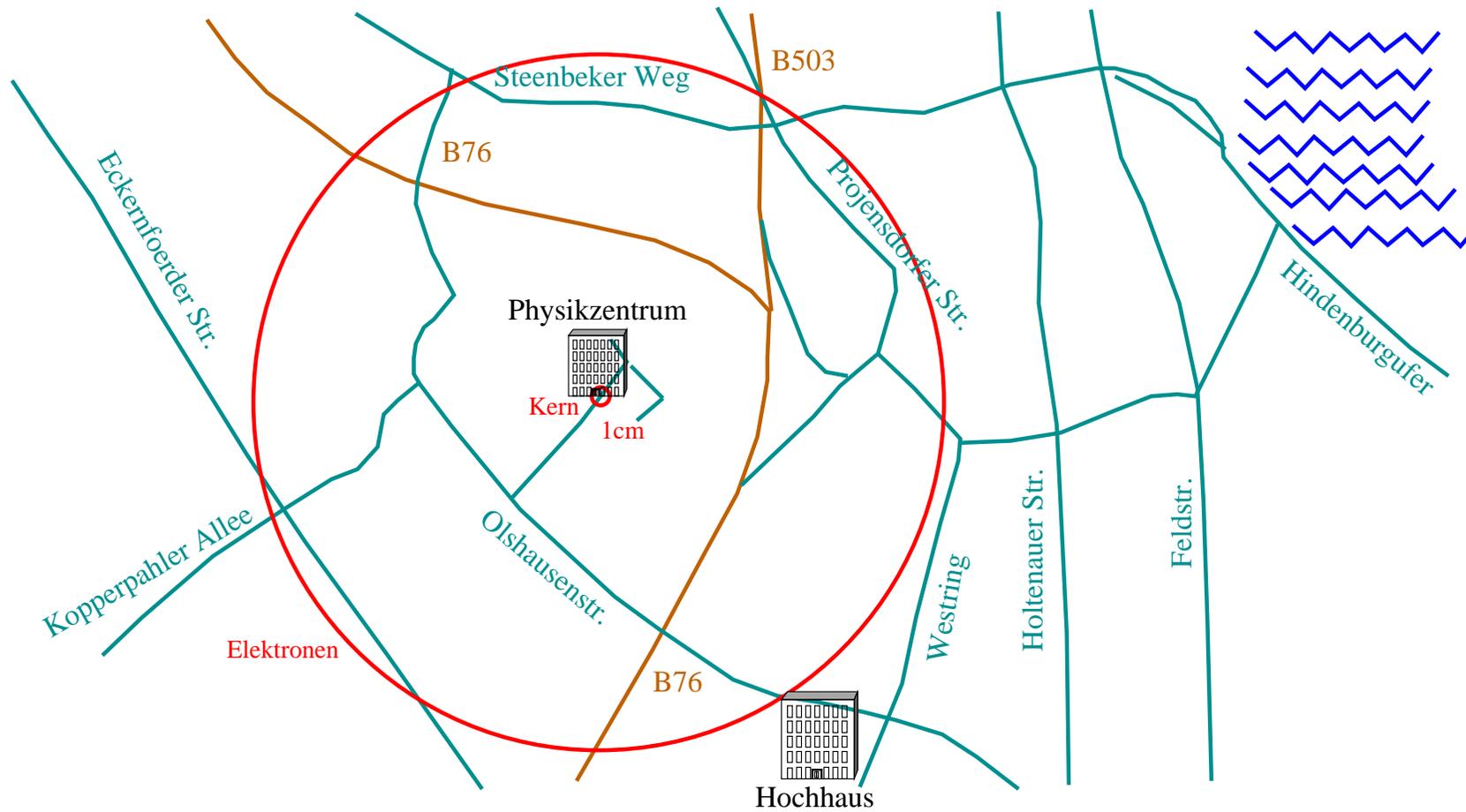


+ Messungen

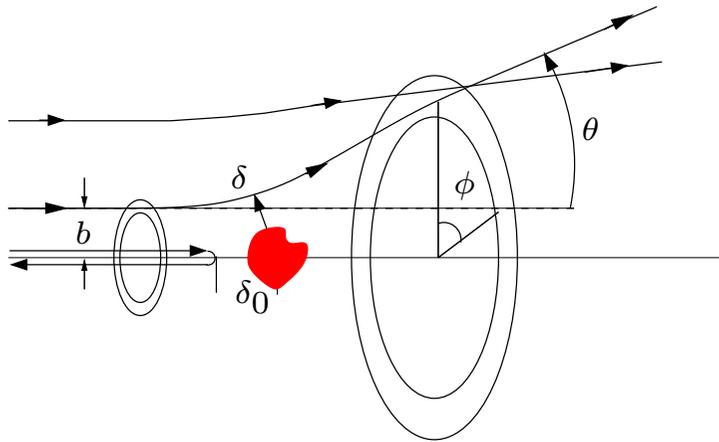
Der Ort des Knicks wird durch die Kernkräfte bestimmt.



Die Größe von Kernen



Die Größe von Kernen



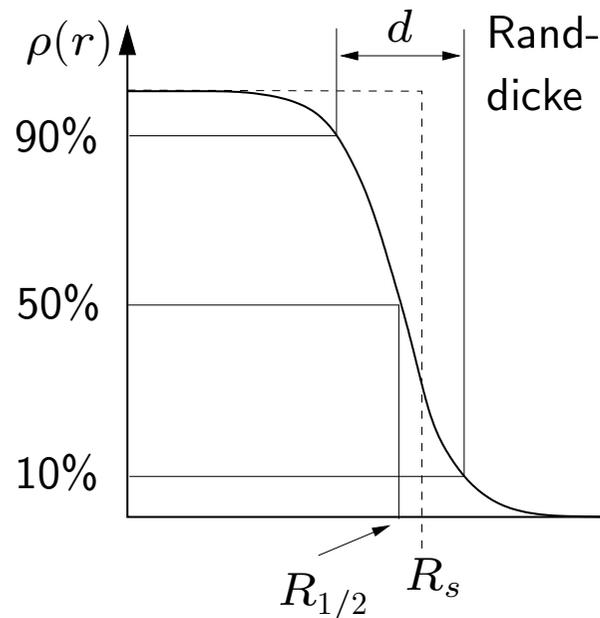
Verwendet man statt Kernen (z. B. α -Kerne) Elektronen als Projektile, so wird man eine andere Verteilung messen weil auf Elektronen keine Kernkräfte wirken und weil sie aufgrund ihres Spins im Coulombfeld des Kerns eine magnetische Kraft spüren. Abgesehen von letzterem Effekt messen Elektronen also die Ladungsverteilung im Kern. Der Streuquerschnitt kann geschrieben werden als

geschrieben werden als

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} \left| \frac{1}{e} \int_0^\infty \rho(r) e^{(i/\hbar)\vec{q}\cdot\vec{r}} dr \right|^2 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} \cdot F^2(q),$$

wo q der Impulsübertrag im Stoß und die Funktion $F^2(q)$ der sog. **Formfaktor** ist.

Formal ist er die Fouriertransformierte der Ladungs- oder Massendichteverteilung und kann im Prinzip aus Streuexperimenten über $d\sigma/d\Omega$ bestimmt werden. Weil aber q und auch $d\sigma/d\Omega$ nicht beliebig genau gemessen werden können, wird oft ein anderer Weg begangen.



Meistens wird für die Ladungs- oder Massendichteverteilung $\rho(r)$ eine Fermiverteilung angenommen:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + e^{(r-R_{1/2})/a}},$$

wo die Ladungsdichte bei $r = R_{1/2}$ auf die Hälfte von $\rho(0)$ abgesunken ist und a ein Maß für die Dicke d der Randschicht ist.

Bindungsenergie von Kernen I

Partikel	Masse [u]	E_B [MeV]	E_B/A [MeV]	Die anziehende Kraft zwischen den Nukleonen ist für die Kombination Proton-Neutron etwa gleich stark wie für Proton-Proton oder Neutron-Neutron. Sie überwiegt die Coulomb-Abstoßung zwischen den positiv geladenen Protonen bei weitem. Sie ist so stark, dass sie sich in
Proton	1,00783	—	—	
Neutron	1,00866	—	—	
${}^2_1\text{H}$	2,014	2,225	1,112	
${}^4_2\text{He}$	4,0026	28,28	7,07	
${}^{12}_6\text{C}$	<u>12,000</u>	92,161	7,68	
${}^{56}_{26}\text{Fe}$	55,921	492,258	8,79	
${}^{238}_{92}\text{U}$	238,00024	1801,69	7,57	

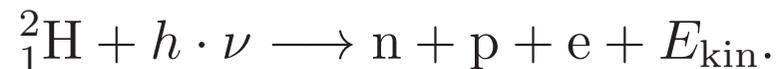
einer messbaren Massendifferenz zwischen der Summe aller Protonen und Neutronen und der Masse des Kerns niederschlägt¹. So besteht ${}^4_2\text{He}$ aus zwei Protonen und zwei Neutronen, und wir würden eine Masse von $\bar{m}_{4_2\text{He}} = 2 \cdot m_p + 2 \cdot m_N =$

¹Zum Vergleich: Die Bindungsenergie des ersten Elektrons im ${}^4\text{He}$ -Atom beträgt 24,5 eV, die des 2-ten 54,4 eV.

$2 \cdot (1.007825 + 1.0086649) = 4.03298\text{u}$ erwarten. Effektiv wird aber eine Masse gemessen, die **kleiner** ist als die Summe der Bestandteile, nämlich 4.0026033 amu. Die Differenz ist das Massenäquivalent der Bindungsenergie aufgrund von $E_B = mc^2 \approx 28,28$ MeV. Dieser Sachverhalt wird auch **Massendefekt** genannt weil die Bindungsenergie **negativ** zu zählen ist. Allgemein gilt also

$$M_K = \sum m_p + \sum m_n - \Delta M = \sum m_p + \sum m_n - E_B/c^2.$$

Die Massen der einzelnen Kerne können sehr genau mit Massenspektrometern gemessen werden, die Masse eines Protons ebenso (als H^+ -Ion), die Masse des Neutrons z. B. aus der Photospaltung des Deuterons, des Kerns von Deuterium. Dort kann die Bindungsenergie sehr genau gemessen werden indem man die für die folgende Reaktion minimal benötigte Photonenenergie misst ².



²Chadwick & Goldhaber, *Nature*, **134**, 237, (1934), Greene et al., *PRL*, **56**, 819, (1986)

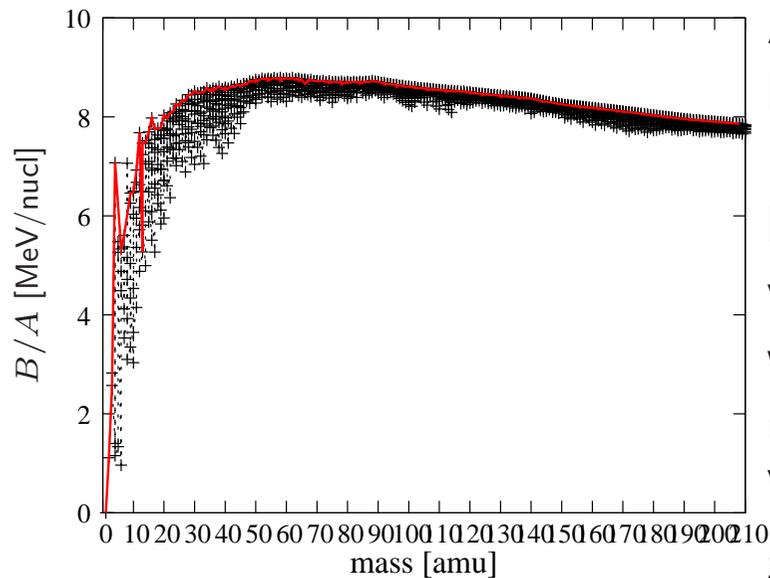
Man findet $E_\gamma = (2226 \pm 3)$ keV, also $m_D = m_p + m_n + m_e - 2226 \text{ keV}/c^2$. Die Masse von Deuterium kann aber massenspektroskopisch auch sehr genau bestimmt werden und man findet für die Differenz $2 \cdot m_H - m_D = (1442 \pm 1)$ keV/ c^2 . Mit $m_D = m_p + m_n + m_e - 2226 \text{ keV}/c^2$ ergibt dies für die Masse des Neutrons $m_n = m_H + (784 \pm 4) \text{ keV}/c^2$ oder³

$$\begin{aligned} m_n = m_p + m_e + 784 \text{ keV}/c^2 &= (938.256 + 0.784 + 0.511) \text{ MeV}/c^2 \\ &= (939.551 \pm 0.004) \text{ MeV}/c^2. \end{aligned}$$

Die Bindungsenergien wird bei einer Massenzahl A von ca. 60 maximal und beträgt für die meisten schweren Nuklide zwischen 7.5 und 8.5 MeV/A. Dieser Verlauf bedeutet, dass man aus der Verschmelzung von zwei leichten Kernen oder der Spaltung eines schweren Kernes Energie gewinnen kann⁴.

³Die Fehler sind experimentspezifisch. E_{kin} blieb bei dieser Rechnung unberücksichtigt.

⁴ca. 1MeV pro Nukleon im Falle der Kernspaltung. Warum?



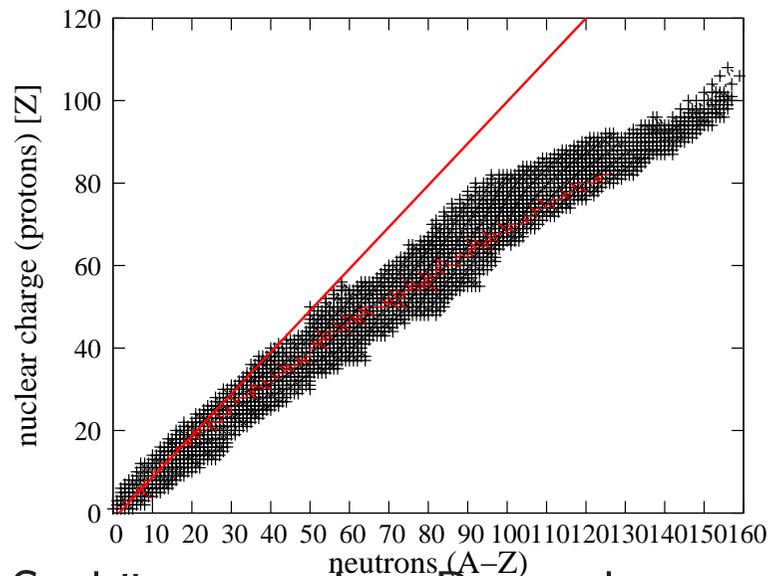
Als Faustregel kann man sich merken, dass die Bindungsenergie etwa ein Prozent der Kernmasse beträgt⁵. Als Energiequelle von Sternen dient die **Kernfusion**, bei der leichte Kerne zu schwereren verschmolzen werden, in Atom- oder Kernkraftwerken die **Kernspaltung** von schweren Kernen (z.B. ${}_{92}^{235}\text{U}$). Beide Prozesse werden später in der Vorlesung genauer untersucht. Ein weiterer Vorgriff soll hier aber noch gemacht werden. Ele-

mente bis hin zur Eisengruppe (Fe, Co, Ni) können in exothermen Kernreaktionen erzeugt werden, schwerere Elemente nur in endothermen⁶. Die Abbildung zeigt die Bindungsenergien pro Nukleon von über 2000 Kernen in schwarz und die der stabilen Kerne in rot.

⁵Ein Proton wiegt $938.272 \text{ MeV}/c^2$, eine Bindungsenergie von $\sim 8 \text{ MeV}/\text{Nukleon}$ ist also *ungefähr* 1%.

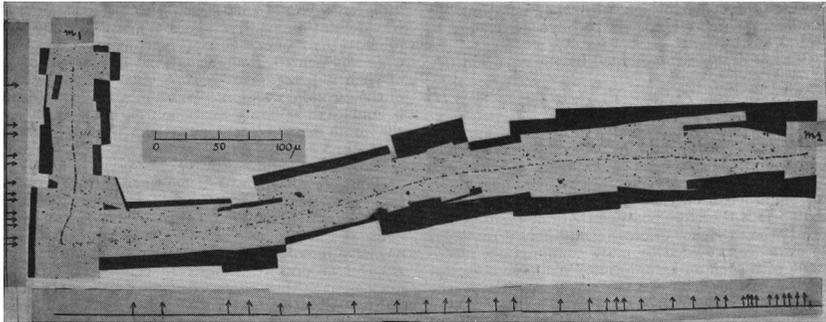
⁶Dies spielt insbesondere bei der Nukleosynthese eine wichtige Rolle.

Aufbau/Struktur von Kernen



Tragen wir für alle bekannten Kerne ihre Kernladungszahl gegen die Anzahl Neutronen auf, so erhalten wir die Abb. links. Für leichte Kerne gilt in nullter Näherung $N = (A - Z) = Z$, für schwere ist dies offensichtlich nicht der Fall. Daraus können wir schon einige Schlussfolgerungen über die in Kernen wirkenden Kräfte ziehen. Wie wir schon gesehen haben, ist die Bindungsenergie pro Nukleon E_B/A näherungsweise konstant.

So könnten wir z. B. annehmen, dass jedes Nukleon im Kern mit jedem anderen Nukleon im Kern wechselwirkt. Es gäbe dann pro Nukleon $(A - 1)$ Bindungen mit anderen Kernen und folglich insgesamt $A(A - 1)/2$ Bindungen. Der Faktor $1/2$ berücksichtigt die Doppelzählungen. Wäre diese Vorstellung richtig, müsste die Bindungsenergie portional zu A^2 sein, was sie offensichtlich nicht ist.



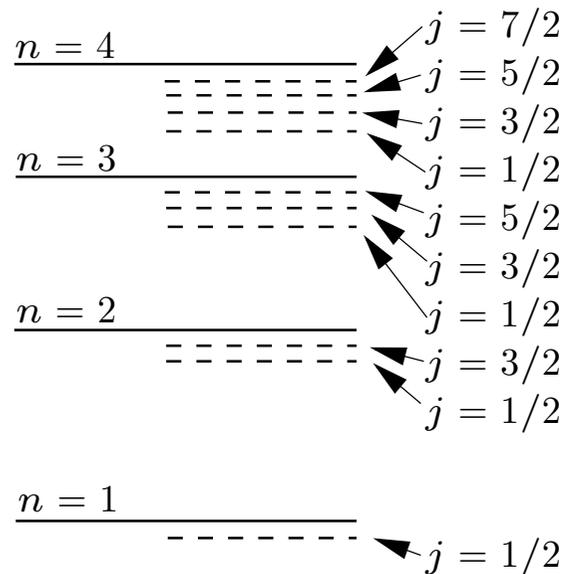
Dass für die meisten Kerne ungefähr $E_B \propto A$ gilt, deutet darauf hin, dass die Kernkräfte nur zwischen Paaren von Kernen wirken. Yukawa hat 1935 erkannt, dass zwischen Kernen eine neuartige Kraft wirken muss. Ähnlich wie sich ein Wasserstoffmolekül aufgrund

der quantenmechanischen Austauschkraft bildet, stellte er sich die Bildung von Nukleonenpaaren vor. Dabei tauschen die beiden Kerne, ähnlich wie die Wasserstoffatome im H_2 -Molekül, ein Teilchen⁷ aus, das sog. **Pion**. Weil die Kerne klein sind, hat Yukawa argumentiert, dass dieses Austauscheteilchen schwer sein müsste, ca. $140 \text{ MeV}/c^2$, ca. 300 mal schwerer als ein Elektron oder etwa einen Sechstel eines Protons. Das Pion wurde 1947 durch Powell in den Zerfallsprodukten der galaktischen kosmischen Strahlung nachgewiesen⁸.

⁷Die beiden Atome "teilen sich" ein Elektron.

⁸1937 gab es einen "Fehlalarm", als das Myon entdeckt wurde. Die Abb. stammt aus Lattes et al., *Nature*, **159**, 694–697, (1947)

Die Linienstruktur von Wasserstoff*



Die Linienstruktur von Wasserstoff folgt aus der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi = E\psi,$$

wo der erste Term der kinetischen und der zweite der potentiellen Energie entspricht. Die Energieniveaux des Wasserstoffatoms sind nach Bohr gegeben durch

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\alpha^2 mc^2 \left(\frac{1}{2n^2} \right) = -\frac{13,6\text{eV}}{n^2},$$

wo $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137,036$ die sog. **Feinstrukturkonstante** ist. Berücksichtigen wir, dass die kinetische Energie relativistisch korrekt gegeben ist durch

$$T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \dots,$$

müssen wir den Ausdruck in der Schrödingergleichung entsprechend ändern. Die Energieniveaux werden durch diese relativistische Korrektur nach unten verschoben. Das Elektron hat aufgrund seines Spins \vec{S} ein Dipolmoment $\vec{\mu}_e = -e/(mc)\vec{S}$. Vom Elektron aus gesehen erzeugt das Proton einen Kreisstrom und ein Magnetfeld \vec{B} . Die Energieniveaux werden um einen Betrag $-\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}$ erniedrigt. Mit j , der Quantenzahl für $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, addieren sich die beiden Effekte zu einer Störung

$$\Delta E_{\text{FS}} = -\alpha^4 mc^2 \frac{1}{4n^4} \left(\frac{2n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \right), \quad \text{wo } j = l \pm \frac{1}{2}.$$

Die Linien von Wasserstoff weisen aber noch feinere Strukturen auf. Die **Hyperfeinstruktur** entsteht durch den Spin \vec{S}_p und damit das magnetische Moment $\vec{\mu}_p = g_p e / (m_p c) \vec{S}_p$ des Protons. Dieses spürt genauso den Kreisstrom des Elektrons, bzw. das induzierte Magnetfeld, aber wechselwirkt auch direkt mit dem Spin des Elektrons. Es gibt also auch eine Kern-Elektron Spin-Bahn Kopplung und eine Kern-Elektron Spin-Spin Kopplung. Die Energieniveaux werden aufgespalten um

$$\Delta E_{\text{HFS}} = \left(\frac{m}{m_p} \right) \alpha^4 m c^2 \frac{g_p}{2n^3} \frac{\pm 1}{(f + \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2})}, \quad \text{wo } f = j \pm \frac{1}{2}$$

die neue Quantenzahl für den Gesamtdrehimpuls (Bahn plus beide Spins) ist. Die Hyperfeinstruktur geht auch mit α^4 , ist aber wegen m/m_p um einen Faktor ~ 2000 kleiner als die Feinstruktur. Für $l = 0$ ergibt sich eine Aufspaltung in ein Singlet (antiparallele Spins) und ein Triplet (parallele Spins). Im Grundzustand ($n = 1$) von Wasserstoff entspricht der Energieunterschied der 21,1 cm Welle.

Intermezzo: Die 21,1 cm Linie von Wasserstoff*

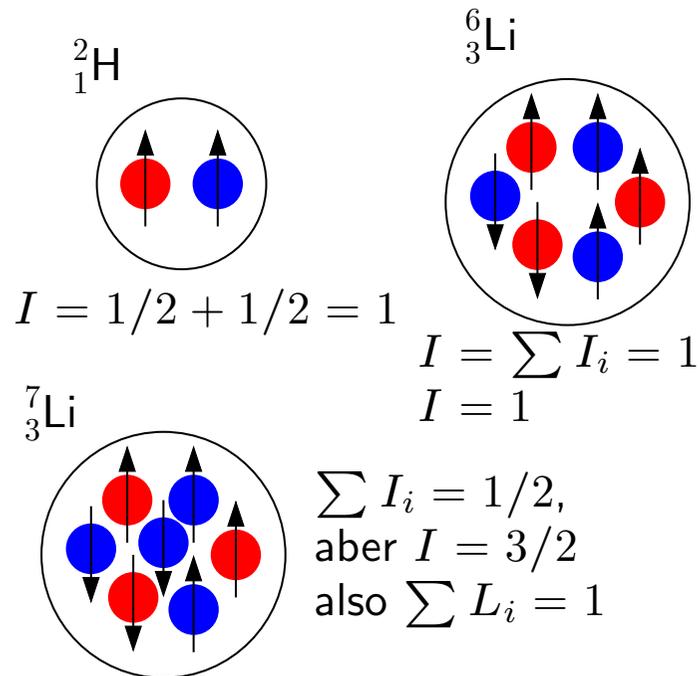


Die 21,1cm Linie des Wasserstoffs stammt aus einem stark verbotenen Übergang, die Übergangswahrscheinlichkeit beträgt $2,9 \times 10^{-15} \text{s}^{-1}$. Ein Wasserstoffatom im “angeregten” Singlett-Zustand wird im Schnitt also etwa 10 Millionen Jahre in diesem Zustand bleiben, bevor es ein Photon der Wellenlänge 21,1 cm aussendet. Weil es im interstellaren Medium aber viel Wasserstoff gibt, ist es sehr wahrscheinlich, dass wir den Übergang mit einer Radioantenne (links) messen können. Die 21,1cm Linie wurde von Ewen und Purcell 1951 entdeckt⁹. Sie wird insbesondere nicht durch Staub absorbiert und kann z. B. zur Bestimmung von

Rotationskurven verwendet werden.

⁹Ewen, H.I., Purcell, E.M., *Nature*, **168**, 356, (1951)

Kerndrehimpuls und magnetisches Moment*



Bevor wir die Struktur der Kerne eingehend behandeln können, müssen wir den Drehimpuls von Kernen behandeln. Weil viele Spektren von Atomen eine Hyperfeinstruktur aufweisen, muss man schließen, dass Kerne ein magnetisches Moment besitzen. Analog zum magnetischen Moment einer Elektronenhülle, nimmt man an, dass das magnetische Moment von Kernen genauso durch den Drehimpuls des Kerns gegeben ist und sich schreiben lässt als $|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)} \cdot \hbar$. \vec{I} ist der **Kernspin** und die ganz- oder halbzahlige Zahl

I ist die **Kernspinquantenzahl**. Der Kernspin setzt sich zusammen aus der Vektorsumme der Protonen- und Neutronenspins und ihren Bahndrehimpulsen,

$\vec{I} = \sum (\vec{I}_i + \vec{L}_i)$. In den meisten stabilen Kernen gilt im Grundzustand $\sum \vec{L}_i = 0$. Dies muss aber nicht für alle Kerne gelten, wie das Beispiel ${}^7_3\text{Li}$ zeigt.

Das magnetische Moment des Protons und des Neutrons lassen sich wieder analog zum Spin der Elektronenhülle schreiben als das Produkt aus Landé-Faktor g_I , Kernmagneton μ_N und dem Kernspin \vec{I}/\hbar ,

$$\mu_I = g_I \cdot \mu_N \cdot \vec{I}/\hbar, \quad \text{wo} \quad \mu_N = e/(2m_p) \cdot \hbar.$$

Das Protonenmagneton ist wegen der größeren Masse des Protons m_e/m_p mal kleiner als das Elektronenmagneton¹⁰. Messungen ergeben ein anomal großes magnetisches Moment des Protons, $\mu_p = +2.79278\mu_N$. Der Spin beträgt $I = 1/2$ (Fermion!) und folglich ist der Landé-Faktor $g_p = 2.79278/(1/2) = 5.58556$, was darauf hindeutet, dass das Proton aus mehreren Teilchen zusammengesetzt ist¹¹.

¹⁰Das Bohrsche Magneton.

¹¹Beim elementaren Elektron ist der Landé-Faktor $g_e \approx 2$.

Größe	Proton	Neutron	Elektron
Masse [kg]	$1.672623 \cdot 10^{-27}$	$1.6749286 \cdot 10^{-27}$	$9.1093898 \cdot 10^{-31}$
Spinquantenzahl	1/2	1/2	1/2
Magnet. Moment	$1.4106 \cdot 10^{-26}$ $= 2.79278\mu_N$	$-9.6629 \cdot 10^{-27}$ $= -1.91315\mu_N$	$9.2849 \cdot 10^{-24}$ $= 1.001\mu_B$
Lebensdauer	$> 10^{32}$ Jahre	887 s	∞

Dass auch das Neutron ein magnetisches Moment hat, obwohl es doch elektrisch neutral ist, weist noch deutlicher darauf hin, dass Proton und Neutron aus noch kleineren Teilchen zusammengesetzt sind. Wir werden auch diesem Sachverhalt noch auf den Grund gehen.

Anwendung: Magnetresonanztomographie (MRT)*



Wird ein magnetischer Dipol $\vec{\mu}$ in ein äußeres Magnetfeld \vec{B}_0 gebracht, so hat er eine potentielle Energie von $E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ und es wirkt auf ihn ein Drehmoment $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Der Dipol beginnt also um die Richtung von \vec{B}_0 zu präzedieren. Die Gesamtmagnetisierung bleibt aber verschwindend klein weil die Präzessionsbewegungen der einzelnen Dipole (Kerne) unkorreliert sind. Diese Präzession kann nun mit einem hochfrequenten, mit der Präzessionsfrequenz resonanten äußeren Magnetfeld, welches senkrecht zu \vec{B}_0 steht, synchronisiert und in die

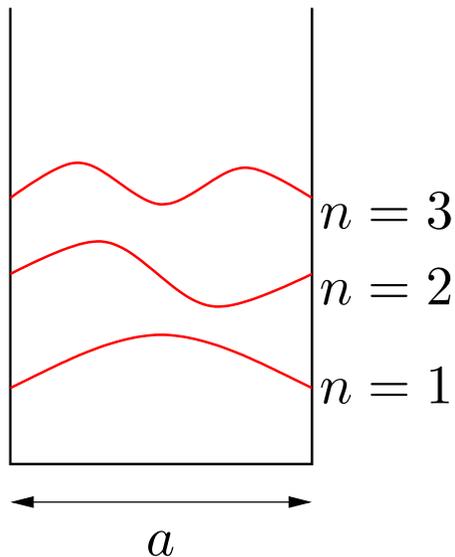
Transversalebene zu \vec{B}_0 gekippt werden. Die Magnetisierung \vec{M} präzediert dann in der Transversalebene zu \vec{B}_0 und kann mit einer äußeren Spule gemessen wer-

den. Wird nun das Wechselfeld abgestellt, so beginnen die Dipolmomente der Kerne mit einer Zeitkonstante T_1 zu dekorrelieren, die vom Element und von der Viskosität des umliegenden Materials abhängt. Im Wasser beträgt diese Zeit ca. 1 Sekunde, in menschlichem Gewebe zwischen 100 ms (Körperfett) bis zu einigen Sekunden (Blut, Hirnflüssigkeit).

Die Präzessionsfrequenz hängt vom äußeren Magnetfeld \vec{B}_0 ab. Wenn man also ein \vec{B}_0 erzeugen kann, welches in einzelnen Ebenen homogen aber von Ebene zu Ebene verschieden ist, so kann man Schnittbilder des menschlichen Körpers erzeugen.

Die Magnetfelder in MRT-"Röhren" betragen heute zwischen 1 und 3 Tesla, am Uniklinikum werden Apparate von 1,5 und 3 Tesla verwendet. Die Auflösung und das Signal-zu-Rausch-Verhältnis gehen linear mit der Feldstärke, deshalb geht der Trend zu immer stärkeren Feldern.

Die Fermi-Energie



Aus der Atomphysik wissen wir bereits, dass die Energie eines Teilchens der Masse m in einem Kastenpotential der Kantenlänge a gerade gleich

$$E = E_x + E_y + E_z = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi \hbar}{a} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

ist, wo $n_i \geq 0$ die Indizes der Wellenfunktionen sind. Wir fragen uns nun, wieviele $(n(E)dE)$ Zustände in einem Energieintervall $[E, E + dE]$ Platz haben. Weil $n_i \geq 0$ sind dies

$$n(r)dr = \frac{\pi r^2 dr}{2} \quad \text{wo} \quad r \doteq \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad \text{womit} \quad E = \frac{h^2}{8ma^2} r^2.$$

Folglich ist $r = \sqrt{(8ma^2)/h^2} \cdot \sqrt{E}$ und $dr = \sqrt{(8ma^2)/h^2}/(2\sqrt{E})dE$ und

$$n(r)dr = \frac{\pi r^2 dr}{2} = \frac{\pi 8ma^2}{2 h^2} E \cdot \sqrt{\frac{8ma^2}{h^2}} \frac{1}{2\sqrt{E}} dE = \frac{4\pi a^3}{h^3} \sqrt{2m^3} \sqrt{E} dE.$$

Damit ist $n(E)dE \propto \sqrt{E}dE$. Im Grundzustand kann also der Kern mit maximal

$$n = \int_0^{E_F} 2n(E)dE = 2Ca^3 \int_0^{E_F} \sqrt{E}dE = \frac{16\pi V \sqrt{2m^3}}{3h^3} E_F^{3/2} \quad (\text{wo } V = a^3)$$

Nukleonen aufgefüllt werden. Die Grenzenergie, bis zu der alle Zustände aufgefüllt sind, heißt **Fermi-Energie**. Wir können das Resultat aber auch für die

Fermi-Energie invertieren und erhalten

$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3n}{\pi V} \right)^{2/3} \quad \left(= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 n}{V} \right)^{2/3} \right),$$

was eigentlich ganz erstaunlich ist, denn wir können nun wegen $n = A$ und $V = a^3 = (4\pi/3)r_0^3 \cdot A$ die Fermienergie direkt aus dem Nukleonenradius r_0 bestimmen¹². Das Resultat ist unabhängig von A und ungefähr

$$E_F \approx 30 \text{ MeV.}$$

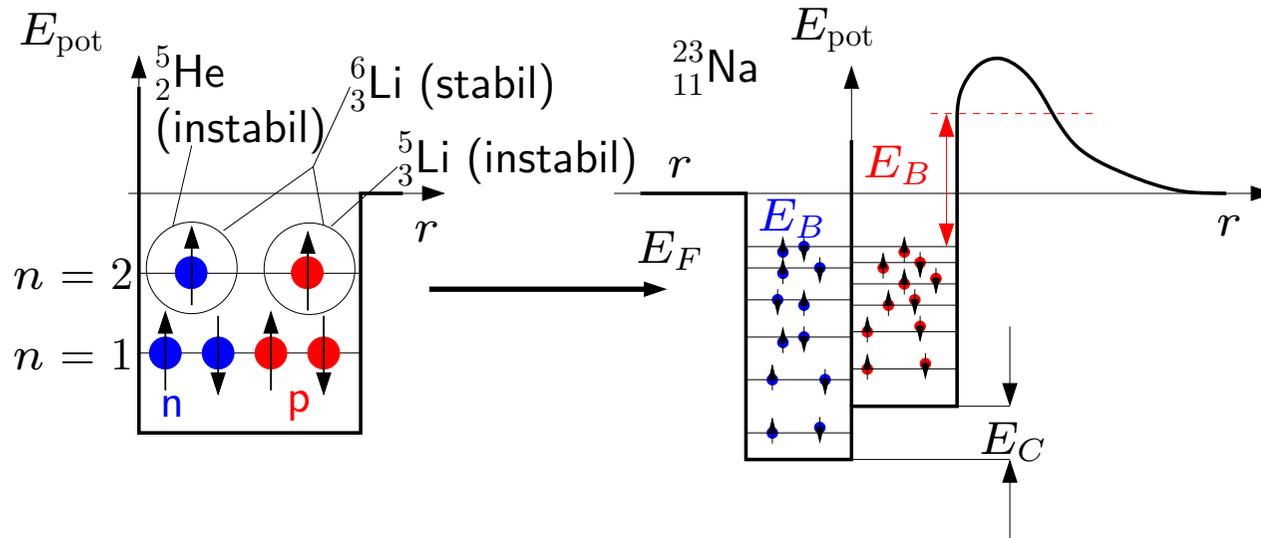
Damit haben wir die minimale Tiefe des Potentialkastens (oder des Potentials) mit ca. 30 MeV abgeschätzt. Weil die meisten Nukleonen etwa 8 MeV brauchen

¹² $n = A$ weil wir einen Kern "auffüllen".

um aus einem Kern herausgelöst zu werden, haben wir also als groben Wert für die Tiefe des Potentials etwa

$$V_0 \approx -40 \text{ MeV, unabhängig vom Kern!}$$

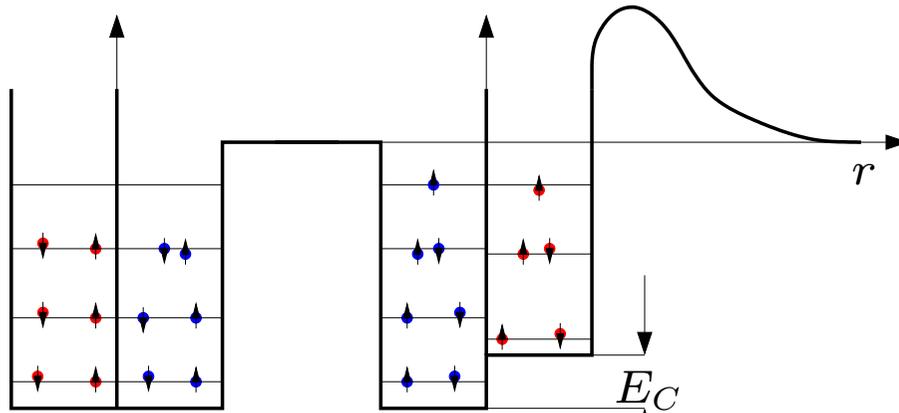
Bindungsenergie von Kernen II



Das bisher naiv dargestellte Bild eines Kerns als eine Ansammlung von Protonen und Neutronen bedarf einer Präzisierung. Wegen des Pauliprinzips können sich maximal zwei Protonen und zwei Neutronen auf ei-

nem Energieniveau E_i befinden. Wegen der Coulomb-Abstoßung befinden sich die Protonen zudem auf einer etwas höheren potentiellen Energie. Die Niveaux werden bis zur Fermi-Energie E_F besetzt. Die Bindungsenergie der Neutronen ist wegen der Coulombbarriere etwas geringer als die der Protonen. Der Tunneleffekt verringert diese Barriere. Der Aufbau der Kerne ist nun analog zum Atomaufbau.

Einfluss der Coulomb-Abstoßung der Protonen



Die Summe der Bindungsenergien ist im asymmetrischen Fall kleiner.

Wie aus der Abbildung links ersichtlich ist, braucht man weniger Energie, um aus dem asymmetrischen Potentialtopf (rechts) ein Nukleon zu entfernen, die Bindungsenergie ist kleiner. "Symmetrische" Kerne sind stabiler als "asymmetrische", wobei sich jetzt symmetrisch auf die Anzahl Neutronen und Protonen bezieht. Gilt $Z = A - Z$, so ist der

Kern stabiler als wenn $Z < (A - Z)$. Weil der Potentialtopf für die Neutronen tiefer liegt, können im selben Kern in der Regel mehr Neutronen als Protonen untergebracht werden. Die Fermi-Energie für Protonen und Neutronen ist etwa gleich groß. Wäre sie für Neutronen größer, wäre es energetisch günstiger, wenn ein Neutron in ein Proton und ein Elektron zerfallen würde und umgekehrt.

Wie ändert sich also die Bindungsenergie eines Kernes aufgrund der Coulomb-Abstoßung? Die totale Energie E_{tot} eines Fermionengases im Grundzustand ist

$$E_{\text{tot}} = \int_0^{E_F} 2E n(E) dE = 2Ca^3 \int_0^{E_F} E^{3/2} dE = \frac{4}{5} Ca^3 E_F^{5/2}.$$

Einsetzen der Fermi-Energie E_F (von Seite 27) und von $a^3 = (4\pi/3)r_0^3 \cdot A$ ergibt $E_{\text{tot}} = C'n^{5/3}A^{-2/3}$. Wären die Protonen auch Neutronen, so könnten wir für beide Hälften (Protonen und Neutronen) $n = A/2$ setzen und das Resultat wäre $E'_{\text{tot}} = 2C'A^{-2/3}(A/2)^{5/3}$. Weil die Protonen aber geladen sind, ergibt sich $E_{\text{tot}} = C'A^{-2/3}(N^{5/3} + Z^{5/3})$, woraus wir den Energieunterschied aufgrund der Coulomb-Abstoßung erhalten:

$$\Delta E = E_{\text{tot}} - E'_{\text{tot}} = C'A^{-2/3} \left(N^{5/3} + Z^{5/3} - 2(A/2)^{5/3} \right).$$

Wir definieren nun eine Größe X für den Überschuss der Neutronen über

$I : N = (A/2) + X$ und $II : Z = (A/2) - X$. Mit $I - II$ erhalten wir $X = (1/2)(N - Z)$. Wir klammern $(A/2)^{5/3}$ aus und setzen N und Z in ΔE ein

$$\Delta E = C' A \left[\left(1 + \frac{2X}{A}\right)^{5/3} + \left(1 - \frac{2X}{A}\right)^{5/3} - 2 \right]. \quad \text{Nun verwenden wir}$$

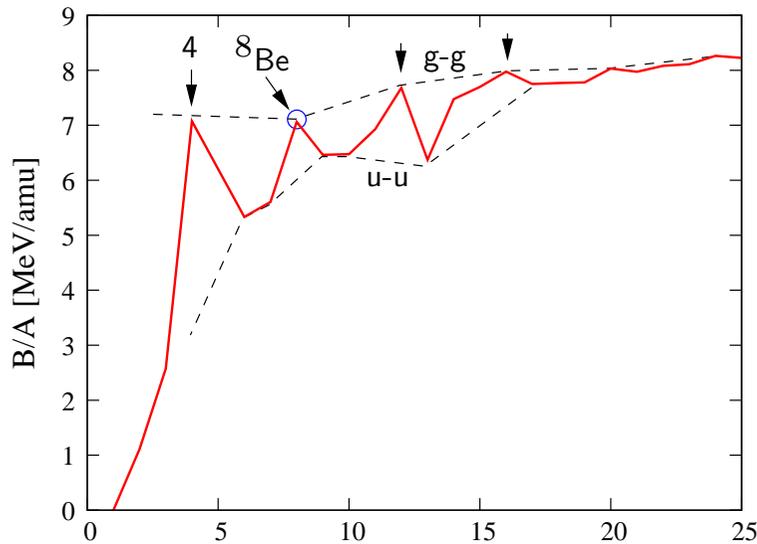
$$(1 + x)^p \approx 1 + p(1 + x)^{p-1}x + \frac{1}{2}p(p-1)(1 + x)^{p-2}x^2 + \dots$$

Die konstanten und linearen Terme verschwinden und es verbleibt ein Rest

$$\Delta E \sim X^2/A \sim (N - Z)^2/A.$$

Wegen des Pauliprinzips (Nukleonen sind Fermionen) führt die Coulomb-Abstoßung zu einer Reduktion der Bindungsenergie, die ungefähr quadratisch mit dem halben Neutronenüberschuss wächst.

g-g und u-u Kerne



Messungen der Bindungsenergien der Kerne zeigen einen weiteren bemerkenswerten Umstand. Kerne mit einer geraden Anzahl Neutronen und einer geraden Anzahl Protonen (sog. **g-g** Kerne) haben eine höhere Bindungsenergie, Kerne mit ungerader Anzahl Neutronen und ungerader Anzahl Protonen (sog. **u-u** Kerne) eine niedrigere Bindungsenergie als andere Kerne. Der Grund für diese erhöhte Bindungsenergie liegt darin,

dass jeweils zwei Protonen und Neutronen mit antiparallelem Spin dasselbe Energieniveau besetzen können¹³. Der Ursprung dieser “Paarenergie” geht über diese Vorlesung hinaus¹⁴. (Es gibt gerade mal 6 stabile u-u Isotope!)

¹³In der Abb. ist auch das instabile ^8Be eingezeichnet. Weil seine Bindungsenergie etwas kleiner als die von ^4He ist, ist es energetisch günstiger in zwei α -Teilchen zu zerfallen.

¹⁴Warum gibt es denn z. B. keinen $n - n$ oder $p - p$ -Kern?

Das Tröpfchenmodell von Weizsäcker

Von Weizsäcker hat erstmals ein einfaches Modell für die totale Bindungsenergie eines Kerns entwickelt. Es beruht auf der Analogie eines Kerns mit einem Wassertropfen. Weil die Kernkräfte sehr kurzreichweitig sind, wechselwirken Nukleonen hauptsächlich mit ihren nächsten Nachbarn. An der Oberfläche ist diese Wechselwirkung erniedrigt. Ferner muss das Pauli-Prinzip berücksichtigt werden, wie auch die Coulomb-Abstoßung der Protonen und die höhere (niedrigere) Bindungsenergie der g-g (u-u) Kerne. Dies geschieht im Tröpfchenmodell als Summe von fünf Termen, pro Beitrag einer. Die Bindungsenergie wird hauptsächlich durch die Kernkräfte zwischen den nächsten Nachbarn bestimmt, die weiteren Terme sind Korrekturen, welche die Bindungsenergie in der Regel verringern.

$$E_B = \Delta M c^2 = E_{\text{Vol}} - E_{\text{Oberfl.}} - E_{\text{Asy}} - E_{\text{Coul}} - E_{\text{Paar}}.$$

Die Volumen-, Oberflächen- und Asymmetrie-Terme

Aus Beobachtungen wissen wir, dass die Kerne eine einigermaßen homogene Verteilung der Nukleonen und eine etwa konstante Bindungsenergie pro Nukleon aufweisen. Dies führt auch zur Annahme, dass jeder Kern nur mit seinen unmittelbaren Nachbarn wechselwirkt. Das Volumen ist $V \propto A = Z + N$ und folglich ist der Volumenterm $E_{\text{Vol}} = a_V \cdot A$.

Bei homogener Verteilung im Kern ist die Oberfläche $O \propto A^{2/3}$. Weil diese Kerne weniger unmittelbare Nachbarn haben, sind sie etwas schwächer gebunden, was zu einer Reduktion der Bindungsenergie führt, also $E_{\text{Oberfl.}} = a_O \cdot A^{2/3}$.

Wir haben bereits gesehen, dass die Bindungsenergie von g-g-Kernen maximal ist und für u-u-Kerne minimal wird, also $E_{\text{Asy}} = a_A(N - Z)^2/A$. Der Zähler drückt aus, dass bei großen Kernen die Asymmetrie $(N - Z)$ proportional weniger wichtig ist.

Coulomb-Abstoßung

Die Ladungsdichte in einem homogenen Kern mit Radius R_K und Ladung $q = Z \cdot e$ sei $\rho = (Z \cdot e) / ((4/3)\pi R_K^3)$. Dann ist die Ladung innerhalb eines Radius r gerade $Q(r) = (r/R_K)^3 \cdot Z \cdot e$.

Die potentielle Energie einer Punktladung q an der Oberfläche dieser Kugel ist gerade $E_{\text{pot}} = 1/(4\pi\epsilon_0) \cdot (Q(r)/r)$. Die potentielle Energie einer Kugelschale mit Radius r und Ladung $q = \rho \cdot 4\pi \cdot r^2 dr$ ist also gerade $E_{\text{pot}} = (\rho/\epsilon_0) \cdot Q(r) \cdot r dr$.

Wir integrieren nun diesen Ausdruck über r um die gesamte Coulomb-Energie zu erhalten,

$$E_{\text{Coul}} = Z^2 \frac{3 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 R_K^6} \int_0^{R_K} r^4 dr = Z^2 \frac{3e^2}{5 \cdot 4\pi\epsilon_0 R_K} = a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \text{ wo } a_C = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

Der g-g, u-g, g-u und u-u Term

Weil dieser Beitrag zur Bindungsenergie besonders kompliziert ist, führen wir rein empirisch den folgenden Ansatz ein:

$$E_{\text{Paar}} = a_P \delta A^{-1/2}, \quad \text{wo } \delta = \begin{cases} +1 & \text{für g-g-Kerne} \\ 0 & \text{für g-u und u-g-Kerne} \\ -1 & \text{für u-u-Kerne} \end{cases}$$

Der Ansatz $A^{-1/2}$ wurde einfach an Messungen der Differenz von Bindungsenergien, $E_B^{gg}(A) - E_B^{uu}(A)$, angepasst, hier steckt kein tieferer physikalischer Grund dahinter.

Das Tröpfchenmodell II

Fassen wir nun alle Terme zusammen, so erhalten wir für die Bindungsenergie

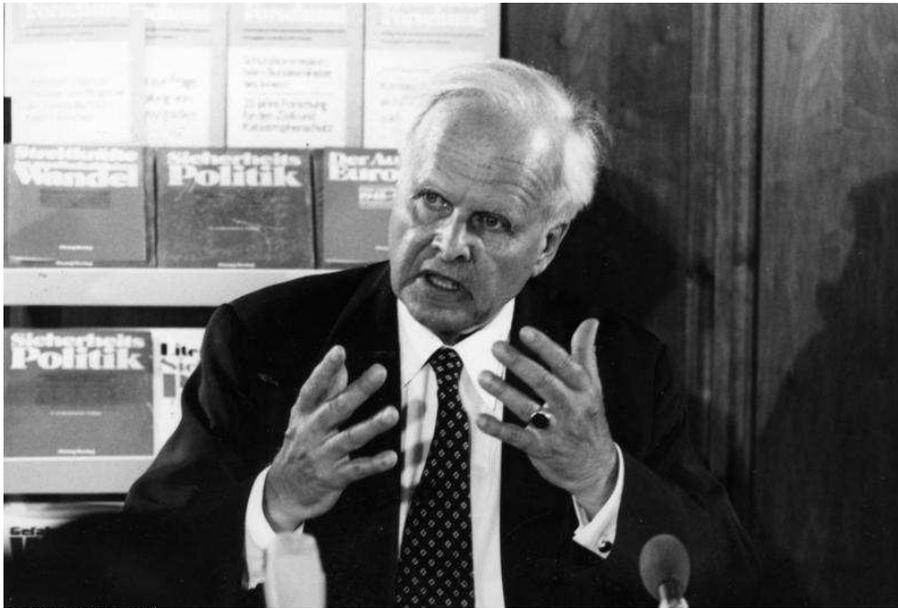
$$E_B = \Delta M \cdot c^2 = a_V A - a_O \cdot A^{2/3} - a_A \cdot \frac{(N - Z)^2}{A} - a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} + \delta a_P A^{-1/2}.$$

Aus Anpassungen an bekannte Bindungsenergien hat man folgende Werte gefunden:

$$\begin{aligned} a_V &= 15.84 \text{ MeV}, & a_C &= 0.714 \text{ MeV}, \\ a_O &= 18.33 \text{ MeV}, & a_P &= 11.2 \text{ MeV}, \\ a_A &= 23.2 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Heute kann man einige dieser Werte ab initio berechnen - was auch wieder den Rahmen dieser Vorlesung sprengt.

Carl Friedrich von Weizsäcker*



Bundesarchiv, B 422 Bild-0174
Foto: Hilberath, Kurt | 1963

Carl Friedrich Freiherr von Weizsäcker wurde 28. Juni 1912 als Sohn einer Diplomatenfamilie an der Feldstraße 68 in Kiel geboren. Er interessierte er sich bereits früh für die Astronomie und schon bald für die philosophische Interpretation des Aufbaus der Natur. Heisenberg, der in Kopenhagen bei Bohr studierte, riet aber dem jungen von Weizsäcker zunächst ein “anständiges Fach” zu studieren. Dieser hat dann in

Berlin, Göttingen und Leipzig Physik, Astronomie und Mathematik studiert und 1933, also mit 21 Jahren, in Physik promoviert.

Die Klarheit seiner philosophischen Gedanken wird wohl am besten mit einer Anekdote aus seiner frühen Jugend illustriert, als er sich folgendes überlegt hat: Wenn es so ist, dass ein Atom wie ein kleines Planetensystem ist, dann müssen doch auf diesen Planeten auch wieder ganz winzige Menschen leben, deren Körper auch wieder aus Atomen bestehen. Und das kann so nicht weitergehen, also müssen die Naturgesetze, die ein Atom zusammenhalten, andere sein, als die, die ein Planetensystem zusammenhalten. So klar dieser Gedanke scheinen mag, so sehr wir diese Schlussfolgerung heute bejahen, von Weizsäcker hat nun versucht, diese verschiedenen Naturgesetze unter einen Hut zu bringen.

Die Geschichte des “Uranvereins” von deutschen Physikern, die während des Krieges an der Konstruktion von Atombomben und Kernreaktoren gearbeitet haben, ist auch heute noch höchst brisant, und die Einstellungen und Rollen der Beteiligten sind auch heute nur zum Teil geklärt. Haben sie die Entwicklung der Bombe systematisch verzögert - oder waren die ihnen zu Verfügung stehenden Mittel einfach ungenügend? Fest steht, dass das Erlebnis der Bombenabwürfe

über Hiroshima und Nagasaki von Weizsäcker und die anderen Physiker zutiefst erschüttert und dass sie seinen weiteren Lebenslauf sehr stark geprägt haben.

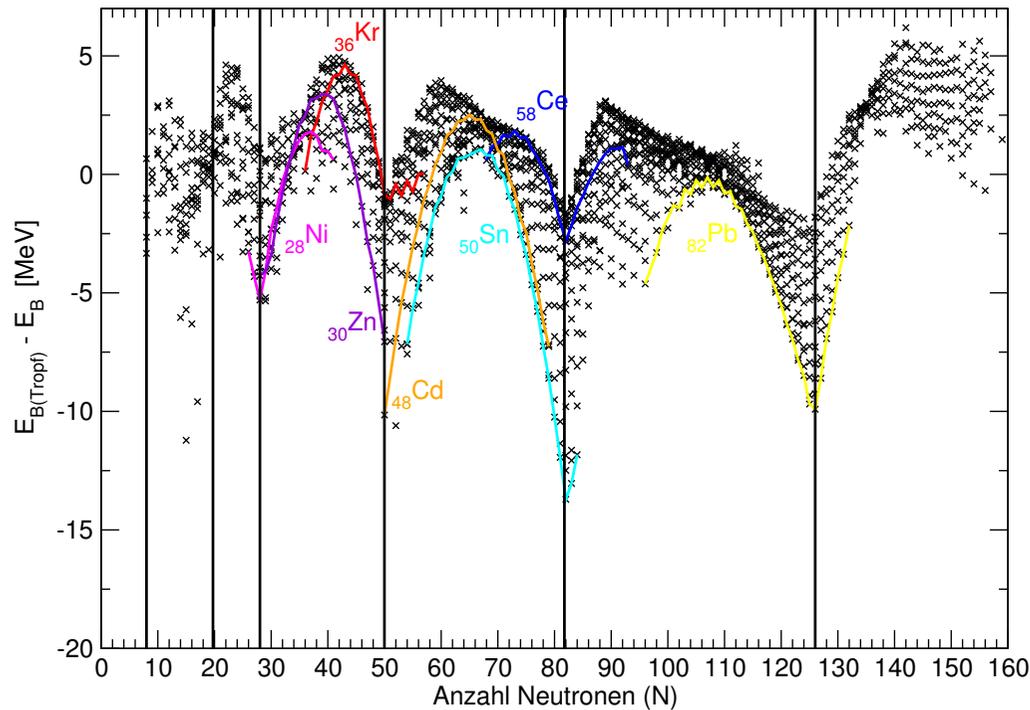
Nach seiner Rückkehr aus der Internierung in Farm Hall begann sich seine Arbeit am Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen immer mehr auf Fragen der Verantwortung und Ethik in den Naturwissenschaften zu fokussieren. Diese Beschäftigung gipfelte 1957 im Manifest der Göttinger 18, in dem er, zusammen mit Otto Hahn und anderen Kernforschern, vehement für einen freiwilligen Verzicht der Bundesrepublik Deutschland auf Atomwaffen eintrat.

Nach Professuren für Physik und Philosophie in Göttingen und Hamburg gründete von Weizsäcker 1970 am Starnbergersee das Max-Planck-Institut zur "Erforschung der Lebensbedingungen der wissenschaftlich-technischen Welt" an dem an hochpolitischen Themen wie den Gefahren eines Atomkrieges und deren Verhinderung, der Energie- und Umweltproblematik und auch an der zunehmenden Globalisierung der Wirtschaft (und Umwelt-, Energie, und

Kriegsfragen) unpolitisch und wissenschaftlich geforscht wurde. Die großen Zusammenhänge zu erkennen war auch hier sein Ziel. Die Reduktion der Komplexität auf das Wesentliche, wie dies Physiker gerne tun, hat ihm auch hier geholfen, äußerst schwierigen Sachverhalten auf den Grund zu gehen und sie in einer Klarheit darzulegen, die ihresgleichen sucht.

‘‘Es gibt Wege in der Gefahr. Unser Wille, die Wege zu beschreiten, hängt daran, dass wir die Gefahr sehen. Unsere Fähigkeit, die Wege zu beschreiten, hängt daran, dass wir die Wege sehen.’’

Magische Zahlen*



Das Tröpfchenmodell von Weizsäcker nähert die Bindungsenergie eines Kernes bereits recht gut. In der Abbildung links sind von über 2000 Kernen die Differenzen

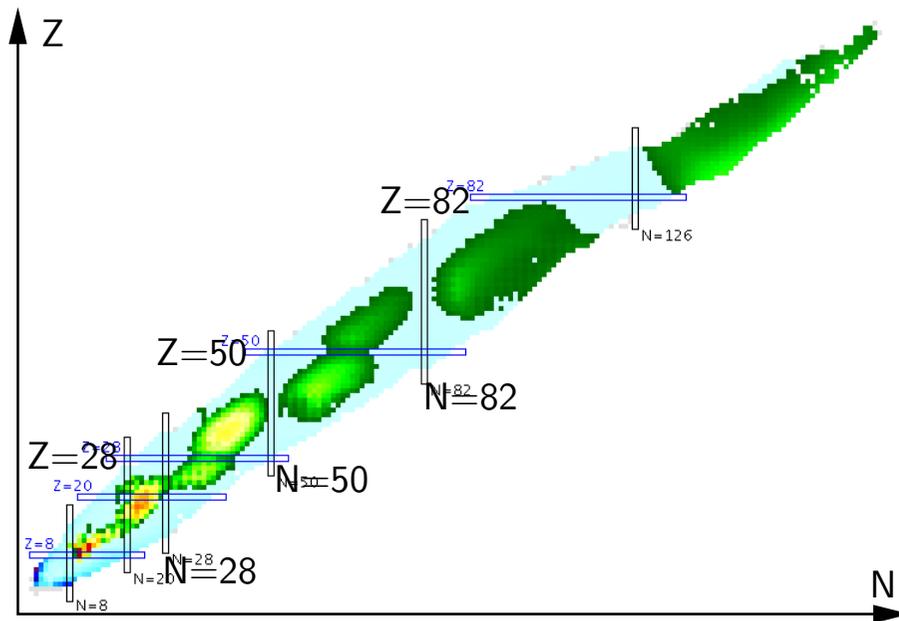
$$\Delta E_B = E_{B\text{Tropf}} - E_{B\text{meas}}$$

aufgezeichnet (schwarze Symbole). Ebenfalls habe ich farbig die ΔE_B für verschiedene Elemente eingetragen

¹⁵. Offensichtlich stimmen die Bindungsenergien des Tröpfchenmodells bis

¹⁵Die Rechnung kann man bei <http://128.95.95.61/~intuser/ld.html> durchführen lassen.

auf wenige MeV gut mit den Messungen überein. Die Differenzen unterliegen aber einer gewissen Systematik und erreichen bei den sog. **magischen Zahlen** jeweils ein Minimum.

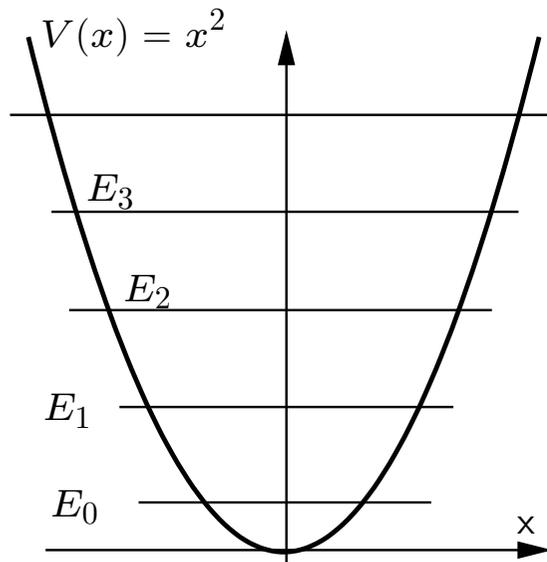


Trägt man dieselbe Differenz ΔE_B wie links gegen N und Z auf, so sieht man auch hier eine Struktur, die Minima treten in beiden Richtungen bei den magischen Zahlen M auf:

$$M = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.$$

Diese magischen Zahlen erinnern an die besonders hohen Ionisationsenergien der Edelgase, bei denen Elektronenschalen vollständig gefüllt sind. Könnte es sein, dass ein Schalenmodell auch für Kerne angebracht wäre?

Die Energieniveaux im harmonischen Oszillator*



Als einfaches Modell für das Kernpotential kann man den harmonischen Oszillator betrachten. Kann man damit die magischen Zahlen erklären? Im eindimensionalen harmonischen Oszillator hat das Potential die Form

$$V(x) = \frac{1}{2}Cx^2,$$

wo C eine Konstante ist. Ein Teilchen, welches sich in diesem Potential bewegt verspürt eine Kraft $F(x) = -dV/dx = -Cx$, die proportional ist zum Abstand vom Ursprung, äquivalent dem Hookeschen Gesetz der Federkraft. Aus der Mechanik wissen wir ja bereits, dass die Frequenz einer harmonischen Schwingung in diesem Potential gegeben

ist durch

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}.$$

In der Quantenmechanik unterscheiden sich die verschiedenen erlaubten Energieniveaux jeweils um einen Wert $\Delta E = \delta \hbar \omega$ wo $\delta = 1, 2, 3, \dots$. Die Herleitung der Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für den harmonischen Oszillator ist nicht schwierig aber etwas länglich, darum geben wir hier die Energieniveaux einfach an:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega.$$

Man bemerke die Nullpunktsenergie $E_0 = \hbar \omega / 2$. Weil fast immer nur Energiedifferenzen eine Rolle spielen, bemerkt man sie meistens nicht. Es gibt aber sehr wohl messbare Konsequenzen von $E_0 \neq 0$!

In einem dreidimensionalen harmonischen Oszillator addieren sich die Lösungen der einzelnen Dimensionen, $n = n_x + n_y + n_z = 0, 1, 2, \dots$:

$$E_n = \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_z + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right),$$

Unter Berücksichtigung der beiden Spinausrichtungen gibt es $q = 2 \cdot \frac{1}{2}(n + 1) \cdot (n + 2)$ verschiedene Kombinationen von n_x, n_y, n_z , die zu derselben Energie E_n führen - man sagt, das Energieniveau E_n ist q -fach **entartet**.

n	q	Z
0	2	2
1	6	8
2	12	20
3	20	40

Leider erhält man auf diese Weise die magischen Zahlen nicht, wie man leicht durch Einsetzen erkennt - siehe Tabelle links. Für $n = 0$ gibts genau $q = 2$ Möglichkeit, das Energieniveau aufzufüllen, für $n = 1$ gibt es genau $q = 6$, etc. Die magischen Zahlen ergeben sich aus den Summen der Möglichkeiten bis zu einer Schale aufzufüllen, $Z = \sum_{i=0}^{i=n} q_i = (n + 1)(n + 2)(n + 3)/3$.

Das Schalenmodell*

Nimmt man an, dass die Nukleonen in einem zentralsymmetrischen Potential gefangen sind, so kann man dafür die Schrödingergleichung in einen radialen und einen Winkelanteil separieren. Der Winkelanteil wird wieder durch die Kugelfunktionen gegeben sein, die von den Quantenzahlen des Drehimpulses l und m_z abhängen. Der Radialanteil $u(r)$ wird durch die Schrödingergleichung bestimmt:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0,$$

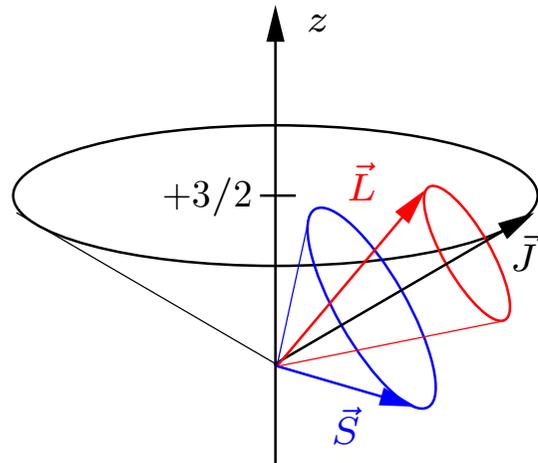
wo $V(r)$ das angebrachte Potential ist. Das Problem ist, dass man dieses Potential nicht kennt. In einem Atom sieht $V(r)$ einem Coulomb-Potential ähnlich, bei mehreren Elektronen ist es ein abgeschirmtes Coulomb-Potential. In einem Kern ist $V(r)$ nicht bekannt. Das heißt, dass man $V(r)$ variieren muss. Es stellt sich nicht nur heraus, dass der harmonische Oszillator die magischen Zahlen nicht

erklärt sondern auch, dass es überhaupt kein Potential $V(r)$ gibt, welches die magischen Zahlen reproduziert.



Der entscheidende Durchbruch zum Verständnis der magischen Zahlen kam 1949 mit der Idee von Maria Goeppert-Mayer (1906 - 1972, Nobelpreis 1963; Foto links von Wikipedia) und unabhängig von ihr von Jensen und Haxel, dass jedes Nukleon zusätzlich zum Potential $V(r)$ eine sehr starke inverse Spin-Bahn-Wechselwirkung $\vec{S} \cdot \vec{L}$ spürt. Diese Wechselwirkung ist etwa 20 mal stärker, als man aus der Analogie zur atomaren LS -Kopplung erwarten würde. Sie wirkt auch anders (invers), indem die Energie des Nukleons verringert wenn $\vec{S} \cdot \vec{L} > 0$ und erhöht, wenn $\vec{S} \cdot \vec{L} < 0$. Die Wechselwirkung ist daher nicht magnetischer Natur, sondern muss ihren Ursprung in der starken Wechselwirkung (den Kernkräften) haben.

Spin-Bahn-Kopplung*



Die Vektoren \vec{J} , \vec{L} und \vec{S} sind für den Fall $l = 2$, $j = 5/2$ und $m_j = 3/2$ links skizziert. Die Vektoren \vec{L} und \vec{S} präzedieren um ihre Summe \vec{J} während \vec{J} um die z -Achse präzediert weil nur $J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$ und $J_z = m_j\hbar$ fixiert sind. Die möglichen Werte von m_j sind

$$m_j = -j, -j + 1, \dots, +j - 1, j.$$

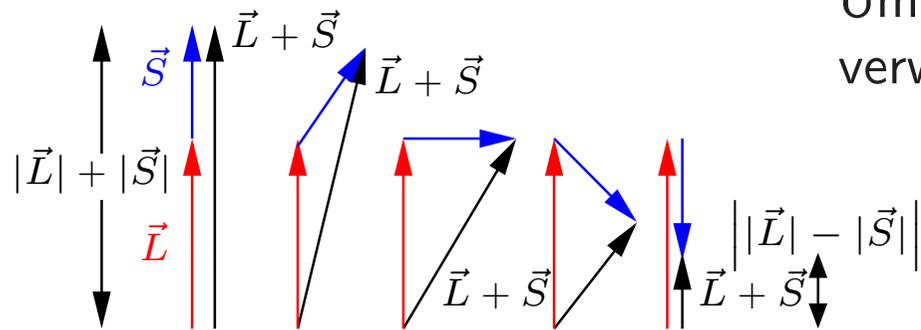
Wir können die möglichen Werte von j bestimmen, indem wir die z -Komponente von $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ messen, welche \vec{J} definiert:

$$J_z = L_z + S_z \quad \text{bzw.} \quad m_j\hbar = m_l\hbar + m_s\hbar \quad \text{bzw.} \quad m_j = m_l + m_s.$$

Weil der maximale Wert von m_l gerade l ist und der maximale Wert von m_s

$s = 1/2$ ist, ist der maximale Wert von m_j gerade $l + 1/2$. Dies ist aber auch gerade der maximale Wert von j weil $m_j = -j, \dots, j$. Die möglichen Werte von j sind also

$$j = l + 1/2, l - 1/2, l - 3/2, l - 5/2, \dots$$



Um herauszufinden, wann diese Reihe endet, verwenden wir die Vektorungleichung

$$|\vec{L} + \vec{S}| \geq \left| |\vec{L}| - |\vec{S}| \right|,$$

wie man auch aus nebenstehender Abb. sehen kann. Mit $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ erhalten wir

$$|\vec{J}| \geq \left| |\vec{L}| - |\vec{S}| \right|, \text{ und damit } \sqrt{j(j+1)\hbar} \geq \left| \sqrt{l(l+1)\hbar} - \sqrt{s(s+1)\hbar} \right|.$$

Diese Ungleichung kann wegen $s = 1/2$ für beliebige l nur mit $j = l + 1/2$ und $j = l - 1/2$ erfüllt werden. Für $l = 0$ gilt $j = 1/2$.

Die Idee von Goeppert-Mayer, Jensen und Haxel kann wie folgt skizziert werden. Das i -te Nukleon spürt nicht das Potential $V(r)$ sondern ein durch die Spin-Bahn-Kopplung verändertes effektives Potential

$$V_i(r) = V(r) + V_{ls}(r)\vec{L} \cdot \vec{S}.$$

Aus der Quantenmechanik kennt man den Erwartungswert von $\vec{S} \cdot \vec{L}$,

$$\langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \cdot \hbar^2.$$

Der Spin der Nukleonen ist $s = 1/2$ und folglich gilt auch hier $j = l \pm 1/2$. Die beiden Möglichkeiten haben aber eine andere Energie, was zu einer

Energieaufspaltung führt. Einsetzen von $j = l \pm 1/2$ ergibt

$$V_i^{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{1}{2}V_{ls}(r) \cdot l \cdot \hbar \quad \text{für } j = l + \frac{1}{2},$$

$$V_i^{\text{eff}}(r) = V(r) - \frac{1}{2}V_{ls}(r) \cdot (l + 1) \cdot \hbar \quad \text{für } j = l - \frac{1}{2},$$

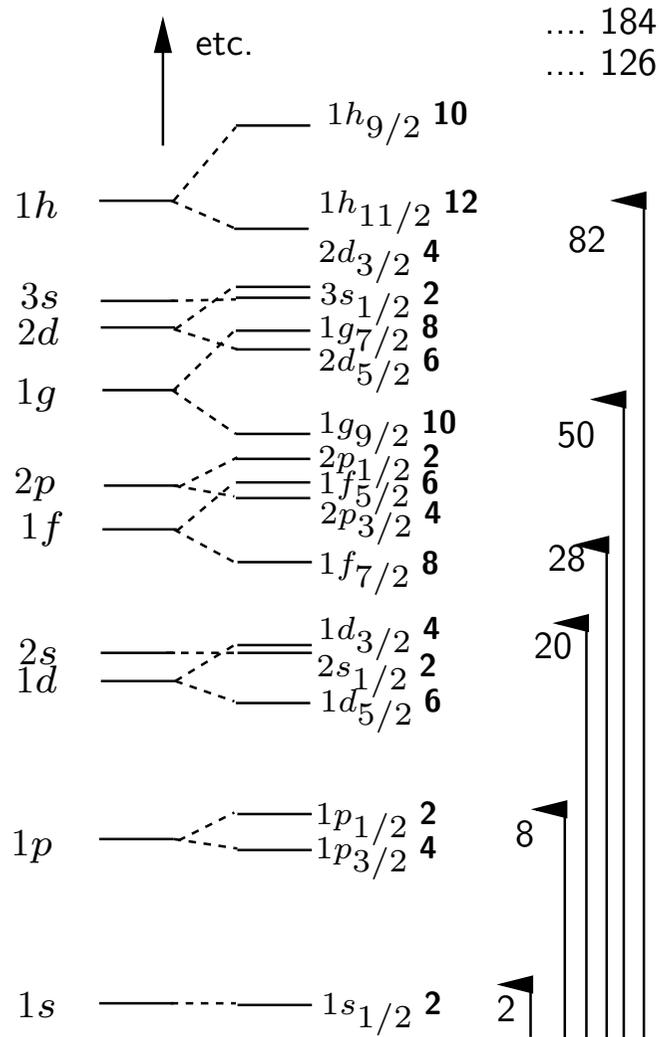
was zu einer Energieaufspaltung führt,

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot (2l + 1) \cdot V_{ls} \cdot \hbar.$$

Diese Aufspaltung ist von derselben Größenordnung wie der Abstand der Energieniveaux für verschiedene Werte von n , E_n , z. B. im harmonischen Oszillator oder auch in einem Kastenpotential.¹⁶

¹⁶Dies im Unterschied zur äquivalenten Feinstruktur in den atomaren Energieniveaux.

Das Schalenmodell II*



Als nächsten Schritt muss man nun für ein Potential $V(r)$ die Aufspaltungen der Energieniveaux und deren Entartung bestimmen. Weil die Aufspaltung so groß ist, überlappen die aufgespaltentenen Energieniveaux eines Zustandes n_1 mit denen eines anderen Zustandes n_2 . Links sind in der linken Hälfte die Energieniveaux eines harmonischen Oszillators mit Drehimpuls dargestellt. In der rechten Hälfte sind die Spin-Bahn-aufgespaltene Energieniveaux dargestellt, sowie fett deren Entartung. Die gebrochenen Pfeile markieren die Schalen, daneben stehen die magischen Zahlen, die sich aus den Summen der Entartungsgrade ergeben.

Voraussagen des Schalenmodells*

Nach dem Schalenmodell ist z. B. ${}^8_8\text{O}$ ein sog. **doppelt magischer** Kern mit 8 Protonen und 8 Neutronen. Protonen und Neutronen füllen je zwei Schalen vollständig aus. Dabei sind also alle $2j + 1$ Zustände des Gesamtdrehimpulses besetzt. Der Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \sum \vec{j}_i$ eines solchen Kernes muss also verschwinden. Kerne mit abgeschlossenen Schalen (doppelt magische Kerne) sind kugelsymmetrisch, haben Kernspin $I = 0$ und können kein Quadrupolmoment besitzen.

Folgende stabile Kerne sind doppelt magisch: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{28}\text{Ni}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$.
Überprüfen Sie das in den Abbildungen auf Seiten 43 und 44.

Doppelt magische Kerne sind besonders stabil. Nach Wasserstoff ist Helium das nächst-häufige Element, dann folgt Sauerstoff.