

Ununterscheidbare Teilchen

Das Paulische Ausschlussprinzip besagt, dass keine zwei Elektronen denselben Zustand einnehmen dürfen. Die Quantenfeldtheorie zeigt, dass dies viel tiefer geht. Stellen wir uns vor, dass wir zwei ununterscheidbare Teilchen haben, die wir trotzdem a und b nennen. Die Wellenfunktion muss beide gleichberechtigt behandeln. Weil nur **Betragsquadrate der Wellenfunktion messbar** sind, muss gelten

$$|\Psi(a, b)|^2 = |\Psi(b, a)|^2.$$

Daraus folgt vorerst nur, dass $\Psi(a, b) = e^{i\delta}\Psi(b, a)$, wenn ich die zwei Teilchen vertausche. Tausche ich sie zurück, so habe ich wieder den ursprünglichen Zustand, und folglich $e^{2i\delta} = 1$, woraus für den Phasenfaktor $e^{i\delta} = \pm 1$ folgt. Es gibt also nur zwei mögliche Arten von Wellenfunktionen, symmetrische ($\Psi(a, b) = \Psi(b, a)$) und antisymmetrische ($\Psi(a, b) = -\Psi(b, a)$). Man nennt die entsprechenden Teilchen **Bosonen** und **Fermionen**. Sind die beiden Teilchen in den Zuständen a und b,

so gilt

$$\text{Bosonen: } \Psi(a, b) = (1/\sqrt{2})[\Psi_1(a)\Psi_2(b) + \Psi_1(b)\Psi_2(a)],$$

$$\text{Fermionen: } \Psi(a, b) = (1/\sqrt{2})[\Psi_1(a)\Psi_2(b) - \Psi_1(b)\Psi_2(a)],$$

wo der Faktor $(1/\sqrt{2})$ die Normierung sicherstellt. Das Pauliprinzip erscheint nun trivial, denn Elektronen sind - wie alle Leptonen, Baryonen und Quarks - Fermionen. Will ich zwei davon in dieselbe Wellenfunktion Ψ_1 quetschen:

$$|\Psi(a, b)|^2 = (1/2)|[\Psi_1(a)\Psi_1(b) - \Psi_1(b)\Psi_1(a)]|^2 = 0.$$

Zusammenfassend gilt:

Bosonen (ganzzahliger Spin) symmetrische Wellenfunktion		Fermionen (halbzahliger Spin) antisymmetrische Wellenfunktion	
Spin 0	Spin 1	Spin 1/2	Spin 3/2
- pseudoskalare Mesonen	Mediatoren Vektormesonen	Quarks / Leptonen Baryonenoktett	- Baryonendekuplett

Die Mediatoren sind das Photon, das W- und Z Boson, das Gluon oder das Graviton. Der Zusatz "pseudoskalar" bzw. "Vektor" wird durch das Verhalten unter der Paritätstransformation P erklärt (siehe P4_V9).

Skalar	:	$P(s) = s$
Pseudoskalar	:	$P(p) = -p$
Vektor	:	$P(\vec{v}) = -\vec{v}$
Pseudovektor	:	$P(\vec{p}) = \vec{p}$

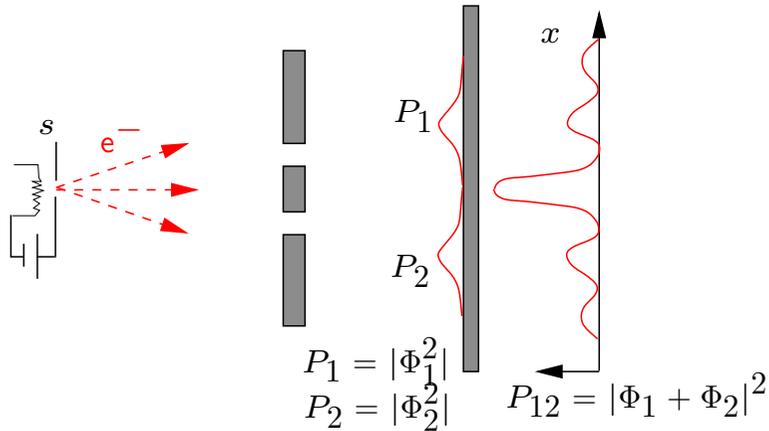
Bosonen und Fermionen

In den folgenden Folien werden wir, wie in Feynman (1965), ein Gedankenexperiment durchführen, welches uns sagen wird, wie wir Teilchen mit halbzahligem Spin (**Fermionen**) und ganzzahligem Spin (**Bosonen**) zu behandeln haben. Wir werden die Bose- und die Fermistatistik begründen und herleiten und am Schluss einige Anwendungen besprechen.

Als Gedankenexperiment schauen wir uns immer ein Streuexperiment an, in dem Teilchen aus einer Quelle s an einem Gegenstand gestreut werden und schließlich in einem Detektor d landen. Dazu werden wir uns der besonders einfachen Notation bedienen, die von P.A.M. Dirac entwickelt worden ist. In dieser Notation können wir die oft komplizierten Wellenfunktionen bzw. Wahrscheinlichkeitsplituden $\psi(x, t, \dots)$ viel einfacher schreiben als

$$\psi(x, t, \dots) = \langle \text{Teilchen am Schluss} | \text{Teilchen am Anfang} \rangle.$$

Wahrscheinlichkeitsamplituden



Die statistische Eigenschaft der Quantennatur hat uns gezeigt, dass wir mit Wahrscheinlichkeiten rechnen müssen und dass wir diese auf eine besondere Art und Weise zusammensetzen müssen. Ohne uns im Weiteren um die genaue mathematische Form zu kümmern, wollen wir das “Zusammensetzen” untersuchen. Die Wahrscheinlichkeits-

amplitude, dass ein Elektron oder Lichtquant die Quelle s verlässt und den Ort x erreicht, schreibt sich dann einfach als

$$\psi = \langle \text{Teilchen erreicht Ort } x | \text{Teilchen verlässt Quelle} \rangle = \langle x | s \rangle.$$

Dabei ist $\langle x | s \rangle$ eine komplexe Zahl und die Wahrscheinlichkeit, dass das Teil-

chen die Quelle s verlässt und den Ort x erreicht ist gerade das Quadrat der Wahrscheinlichkeitsamplitude ψ , $P = |\psi|^2 = |\langle x|s \rangle|^2$.

Kann das Teilchen den Ort x über zwei Wege erreichen, so schreiben wir einfach

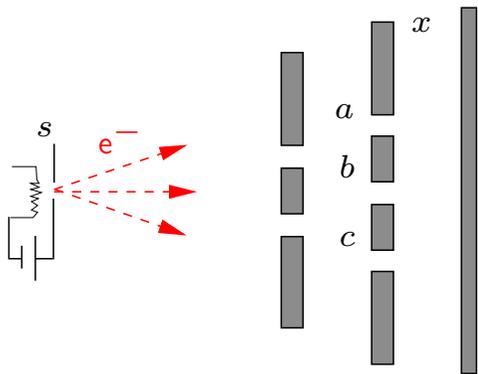
$$\langle x|s \rangle \text{ zwei offene Löcher} = \langle x|s \rangle_{\text{durchLoch1}} + \langle x|s \rangle_{\text{durchLoch2}}.$$

Dass wir diese Wahrscheinlichkeitsamplitude so einfach schreiben können liegt daran, dass wir ja auch hätten schreiben können

$$\langle x|s \rangle_{\text{durchLoch1}} = \langle x|\text{Loch 1}\rangle \langle \text{Loch 1}|s \rangle$$

und damit nach Superpositionsprinzip

$$\langle x|s \rangle \text{ zwei offene Löcher} = \langle x|1\rangle \langle 1|s \rangle + \langle x|2\rangle \langle 2|s \rangle.$$

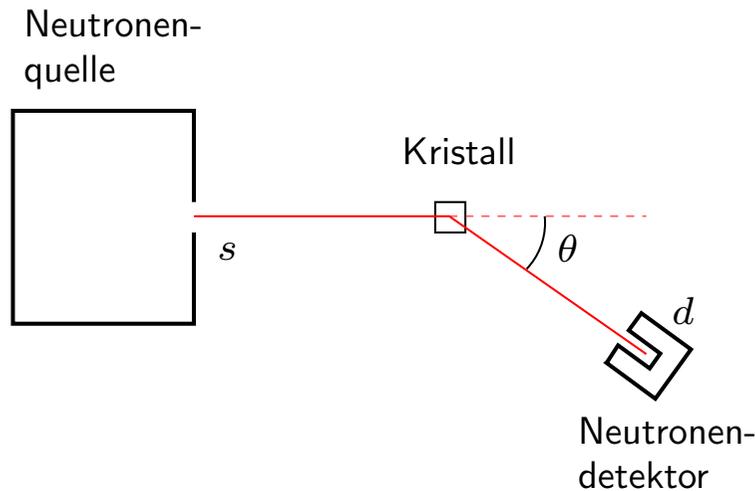


Mit dieser Schreibweise lässt sich auch die Situation links leicht beschreiben:

$$\begin{aligned}
 \langle x|s \rangle &= \langle x|a \rangle \langle a|1 \rangle \langle 1|s \rangle + \langle x|a \rangle \langle a|2 \rangle \langle 2|s \rangle \\
 &+ \langle x|b \rangle \langle b|1 \rangle \langle 1|s \rangle + \langle x|b \rangle \langle b|2 \rangle \langle 2|s \rangle \\
 &+ \langle x|c \rangle \langle c|1 \rangle \langle 1|s \rangle + \langle x|c \rangle \langle c|2 \rangle \langle 2|s \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=a}^c \langle x|\alpha \rangle \langle \alpha|i \rangle \langle i|s \rangle.
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\langle \vec{r}_2 | \vec{r}_1 \rangle$ ist (in Analogie zum Huygenschen Prinzip) proportional zu $\exp(i\vec{p} \cdot \vec{r}_{12} / \hbar) / |\vec{r}_{12}|$, wo $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, und wo \vec{p} relativistisch mit der Energie E zusammenhängt, $\vec{p}^2 c^2 = E^2 - (m_0 c^2)^2$.

Streuung von Neutronen



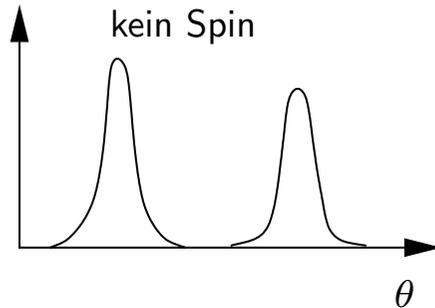
Wir betrachten die Streuung von Neutronen an einem Kristall bestehend aus N Atomen mit ihrem Index i . Die Neutronen verlassen die Quelle s und einige von ihnen werden an einem Atom i mit einer Wahrscheinlichkeitsamplitude a in Richtung θ zum Detektor d gestreut:

$$\langle \text{Neutron bei } d | \text{Neutron von } s \rangle_{\text{via } i} = \langle d | i \rangle a \langle i | s \rangle.$$

Die Streuung am Kristall ergibt sich durch Summation über den gesamten Kristall,

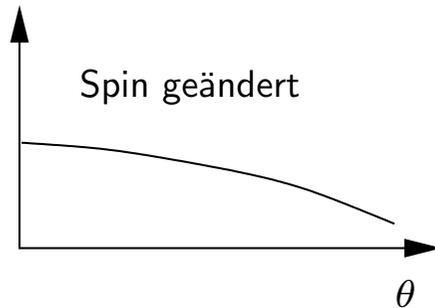
$$\langle \text{Neutron bei } d | \text{Neutron von } s \rangle = \sum_{i=1}^N \langle d | i \rangle a \langle i | s \rangle.$$

Streuung von Neutronen II



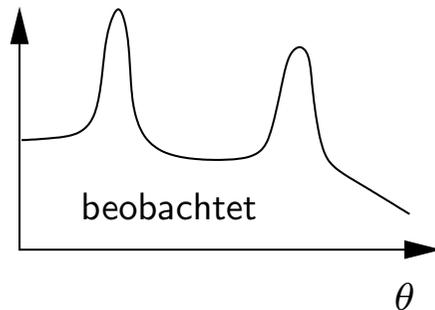
Bis jetzt haben wir unberücksichtigt gelassen, dass Neutronen auch einen Spin haben. Dies führt zu einem unerwarteten Verhalten bei der Streuung. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude, dass ein Neutron ohne seinen Spin zu wechseln durch den Kristall fliegt ist

$$\langle d_{\uparrow}, \text{Kristall}_{\downarrow} | s_{\uparrow}, \text{Kristall}_{\downarrow} \rangle = \langle d|i \rangle a \langle i|s \rangle.$$



Andererseits ist es möglich, dass das Neutron bei der Streuung seinen Spin mit einem Atomkern "austauscht",

$$\langle d_{\downarrow}, \text{Kristallatom}_{k\uparrow} | s_{\uparrow}, \text{Kristall}_{\downarrow} \rangle = \langle d|k \rangle b \langle k|s \rangle.$$



Weil ich dann herausfinden kann, welcher Kern gestreut hat,

muss ich Wahrscheinlichkeiten addieren¹:

$$P(\text{Neutron}_{\downarrow}) = |b|^2 \sum_{k=1}^N |\langle d|k\rangle \langle k|s\rangle|^2,$$

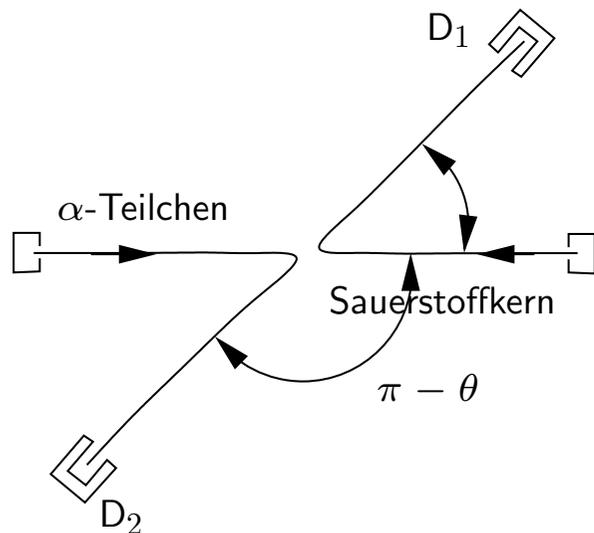
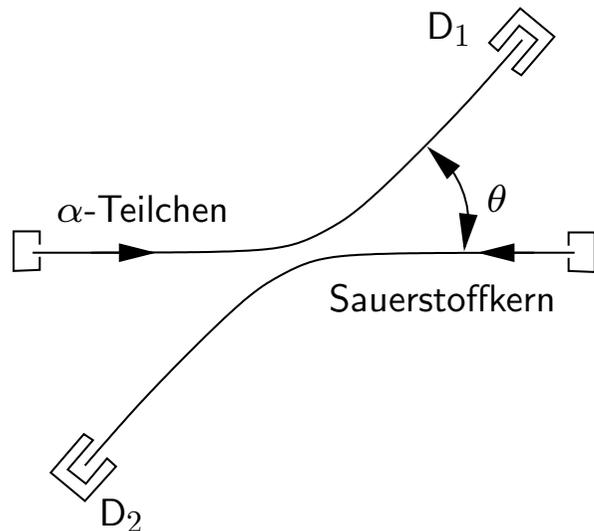
eine glatte Funktion des Winkels. Andererseits, weiss ich nicht, von welchem Atom das Neutron gestreut hat, wenn es den ursprünglichen Spin beibehalten hat, also ist die Wahrscheinlichkeit, den ursprünglichen Spin zu finden durch das Betragsquadrat der Summe der Amplituden gegeben:

$$P(\text{Neutron}_{\uparrow}) = \left| \sum_{i=1}^N \langle d|i\rangle a \langle i|s\rangle \right|^2,$$

was Interferenz zeigt!

¹Dies entspricht der Kenntnis durch welches Loch einer Blende ein Teilchen den Schirm erreicht hat.

Unterscheidbare vs. nicht unterscheidbare Teilchen



Bevor wir die Streuung von identischen (also nicht unterscheidbaren) Teilchen behandeln, betrachten wir die Streuung von α -Teilchen an Sauerstoffkernen. Im Schwerpunktsystem sei die Amplitude in den Winkel θ zu streuen gleich $f(\theta)$, dann ist $|f(\theta)|^2$ die entsprechende Wahrscheinlichkeit. Nun könnte aber auch die Situation im unteren Bild auftreten. Wenn die Detektoren D_1 und D_2 nicht unterscheiden, ob es sich um ein α -Teilchen oder einen Sauerstoffkern handelt, so ist die Wahrscheinlichkeit, irgend ein Teilchen im einen Detektor (z. B. D_1) zu messen

$$|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2.$$

Wir müssen die **Wahrscheinlichkeiten** addieren weil es sich um **im Prinzip** unterscheidbare Teilchen handelt.

Ganz anders sieht es aus, wenn wir aus beiden Quellen α -Teilchen im Grundzustand (also Bosonen!) aufeinander schießen. Dann stimmt der Ausdruck oben nicht. Es gibt zwei Arten, ein α -Teilchen in einen Detektor zu bringen, die wir nicht unterscheiden können - folglich müssen wir die **Amplituden** addieren, denn (von Seite 2)

$$\text{Bosonen: } \Psi(a, b) = (1/\sqrt{2})[\Psi_1(a)\Psi_2(b) + \Psi_1(b)\Psi_2(a)]$$

Wahrscheinlichkeit α -Teilchendetektion in $D_1 = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2$.

Nehmen wir z. B. $\theta = \pi/2$, so sehen wir, wie verschieden die Resultate sind: Für unterscheidbare Teilchen erhalten wir $2|f(\pi/2)|^2$, für nicht unterscheidbare Bosonen erhalten wir $4|f(\pi/2)|^2$!

Streuung von Elektronen (Fermionen)

Noch erstaunlicher wird es, wenn wir Elektronen (also nicht unterscheidbare Fermionen) aneinander streuen. Von Seite 2 wissen wir, dass eine andere Regel gelten muss. Für Elektronen müssen wir die interferierende Version wählen, aber mit einer antisymmetrischen Wellenfunktion!

$$\text{Fermionen: } \Psi(a, b) = (1/\sqrt{2})[\Psi_1(a)\Psi_2(b) - \Psi_1(b)\Psi_2(a)]$$

Wahrscheinlichkeit Elektronendetektion in $D_1 = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2$.

Die Aussage stimmt nur bedingt, wir haben den Elektronenspin noch nicht berücksichtigt, der u. U. ein Unterscheidungsmerkmal sein kann.

Betrachten wir Elektronen aus Quellen unpolarisierter Elektronen, so müssen wir zum besseren Verständnis eine Wahrheitstabelle aufstellen:

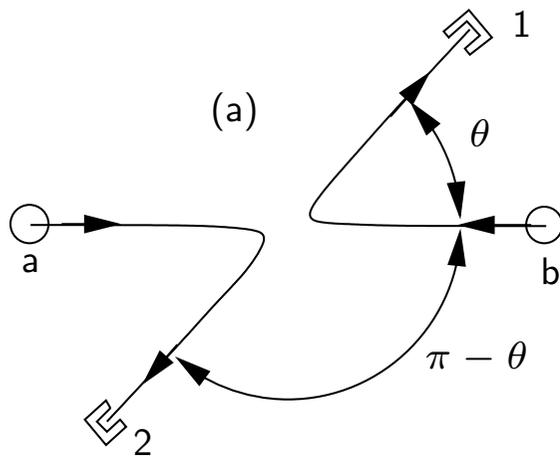
Bruchteil von Fällen	Spin von Teilchen 1	Spin von Teilchen 2	Spin bei D ₁	Spin bei D ₂	Wahrscheinlichkeit
$\frac{1}{4}$	↑	↑	↑	↑	$ f(\theta) - f(\pi - \theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	↓	↓	↓	↓	$ f(\theta) - f(\pi - \theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	↑	↓	↑	↓	$ f(\theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	↓	↑	↓	↑	$ f(\pi - \theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	↓	↑	↑	↓	$ f(\pi - \theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	↓	↑	↓	↑	$ f(\theta) ^2$

Lesebeispiel: Der Bruchteil aller Fälle, in denen Elektron 1 Spin ↑ und Elektron 2 Spin ↓ haben, ist gleich 1/4. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit, dass Detektor 1 ein Elektron mit Spin ↑ misst, gleich $|f(\theta)|^2$. Die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass Detektor 1 ein Elektron misst, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{Gesamtwahrscheinlichkeit} = \frac{1}{2}|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{2}|f(\theta)|^2 + \frac{1}{2}|f(\pi - \theta)|^2,$$

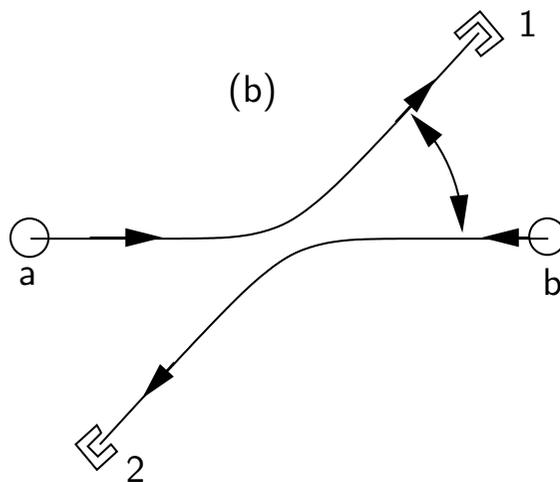
was für $\theta = \pi/2$ den Wert $|f(\pi/2)|^2$ ergibt, nur ein Viertel dessen, was wir vorhin für nicht unterscheidbare Bosonen (wie α -Teilchen) gefunden haben und die Hälfte dessen, was wir für die Kombination von unterscheidbaren α -Teilchen und Sauerstoffionen gefunden hatten!

Zusammenfassung: Bose und Fermiteilchen



Im Experiment (a) links sei die Streuamplitude $f(\theta)$, die Wahrscheinlichkeit Teilchen a im Detektor 1 und Teilchen b im Detektor 2 zu finden ist also $|f(\theta)|^2$. Die Wahrscheinlichkeit im Experiment (b) ist

$$P_2 = |f(\pi - \theta)|^2 = |e^{i\delta} f(\pi - \theta)|^2,$$



wo ein Phasenfaktor $e^{i\delta}$ möglich ist. Dieser spielt für identische Teilchen eine wesentliche Rolle, weil wir da ja auf Interferenz achten müssen. In diesem Fall gibt es eine Amplitude dafür, dass entweder Teilchen a oder b in Detektor 1 geht, während das andere in Detektor 2 geht und diese Amplitude ist

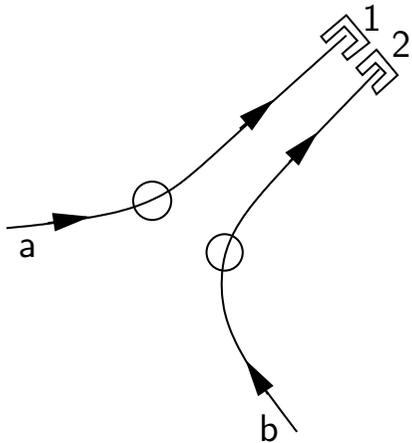
die Summe der Amplituden der beiden Prozesse (a) und (b), $f(\theta)$ und $e^{i\delta} f(\pi - \theta)$. Der Phasenfaktor erscheint, wenn wir Teilchen "austauschen". Zweimaliges Austauschen ergibt wieder die Ausgangssituation, also ist $e^{i\delta}$ gleich $+1$ oder gleich -1 . Teilchen können mit positiver oder negativer Phase interferieren:

positive Phase \longrightarrow **Bose-Teilchen: (Bosonen)**
(direkte Amplitude) + (ausgewechselte Amplitude)

negative Phase \longrightarrow **Fermi-Teilchen: (Fermionen)**
(direkte Amplitude) - (ausgewechselte Amplitude)

In der Natur existieren beide Sorten von Teilchen. Sie verhalten sich ganz unterschiedlich, wie wir im Folgenden sehen werden. Um zu begründen, warum sich Fermionen und Bosonen so und nicht anders verhalten, muss die relativistische Quantenmechanik herangezogen werden - was wir in dieser Vorlesung nicht tun werden.

Boseteilchen



Die Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen a in ein infinitesimales Flächenelement dS_1 von Detektor 1 streut, ist

$$|\langle 1|a\rangle|^2 dS_1 = |a_1|^2 dS_1,$$

wo wir die Abkürzung a_1 für $\langle 1|a\rangle$ eingeführt haben. Das Integral über die ganze Detektorfläche ΔS gibt die Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen a in Detektor 1 gestreut wird.

Sind die Detektoren klein und variiert die Amplitude über ihre Fläche nicht stark, so können wir nähern

$$p_a = \int_{\Delta S} |a_1|^2 dS_1 = |a|^2 \Delta S.$$

Für Teilchen b in Detektor 2 gilt entsprechend

$$p_b = \int_{\Delta S} |b_2|^2 dS_2 = |b|^2 \Delta S.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass a in 1 und b in 2 gestreut wird ist dann

$$P_2 = \int_{\Delta S} \int_{\Delta S} |a_1 b_2|^2 dS_1 dS_2 = |a|^2 |b|^2 (\Delta S)^2 = p_a \cdot p_b,$$

wie erwartet, wenn a und b unterscheidbare Teilchen sind.

Sind nun a und b nicht unterscheidbare Boseteilchen, so addieren sich ihre Amplituden

$$\int_{\Delta S} \int_{\Delta S} |a_1 b_2 + a_2 b_1|^2 dS_1 dS_2.$$

Weil das Integral über ΔS in diesem Fall jedes Teilchen doppelt zählen würde, müssen wir es durch 2 dividieren:

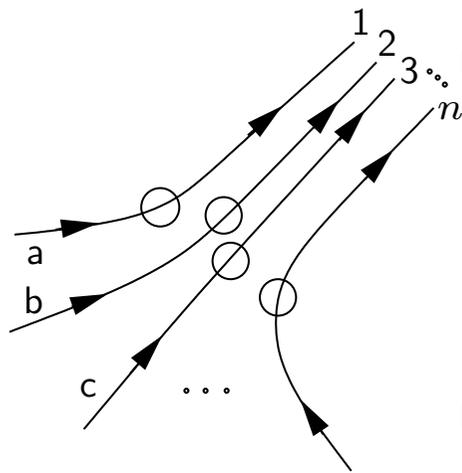
$$P_2(\text{Bose}) = \frac{1}{2} \{4|a|^2|b|^2(\Delta S)^2\} = 2|a|^2|b|^2(\Delta S)^2,$$

also doppelt soviel wie für unterschiedbare Teilchen²!

Erstaunlich, nicht? Nehmen wir an, wir wüssten schon, dass Teilchen b schon in Richtung Detektor läuft, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch Teilchen a in den Detektor fliegen wird, **doppelt** so groß, als sie es wäre, wenn es zwei unabhängige Ereignisse wären. **Bose-Teilchen verhalten sich nicht unabhängig voneinander!**

²Dabei haben wir angenommen, dass $\Delta S_1 = \Delta S_2$, d.h. dass beide Detektoren gleich groß sind.

n Bose-Teilchen



Wie steht es denn, wenn wir n Bose-Teilchen haben? Im unterscheidbaren Fall haben wir offensichtlich

$$P_n(\text{unterscheidbar}) = |a|^2 |b|^2 |c|^2 \dots (\Delta S)^n.$$

Für n Bose Teilchen müssen wir aber die Amplituden für alle möglichen Kombinationen Teilchen – Detektor addieren:

$$\begin{array}{cccccc}
 a \rightarrow 1 & a \rightarrow 1 & a \rightarrow 2 & a \rightarrow 2 & a \rightarrow 3 & a \rightarrow 3 \\
 b \rightarrow 2 & b \rightarrow 3 & b \rightarrow 1 & b \rightarrow 3 & b \rightarrow 1 & b \rightarrow 2 \\
 c \rightarrow 3 & c \rightarrow 2 & c \rightarrow 3 & c \rightarrow 1 & c \rightarrow 2 & c \rightarrow 1
 \end{array}$$

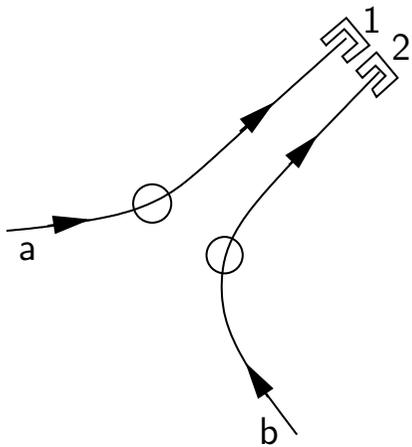
Wir müssen also $n!$ Amplituden addieren. Das Resultat ist

$$P_n(\text{Bose}) = \frac{1}{n!} |n! abc \dots|^2 (\Delta S)^n = n! |abc \dots|^2 (\Delta S)^n,$$

was $n!$ mal größer ist, als für unterscheidbare Teilchen! Bose-Teilchen haben die seltsame Eigenschaft, dass sie dorthin gehen, wo es schon viele Boseteilchen hat. Die Wahrscheinlichkeit w , dass ein $n + 1$ -es Bose-Teilchen in einen bestimmten Zustand geht, wenn dort bereits n Boseteilchen sind, ist

$$P_{(n+1)}(\text{Bose}) = (n + 1) |w|^2 \Delta S P_n(\text{Bose}).$$

Fermi-Teilchen



Für Fermi-Teilchen ist die Amplitude für den Streuprozess links gleich

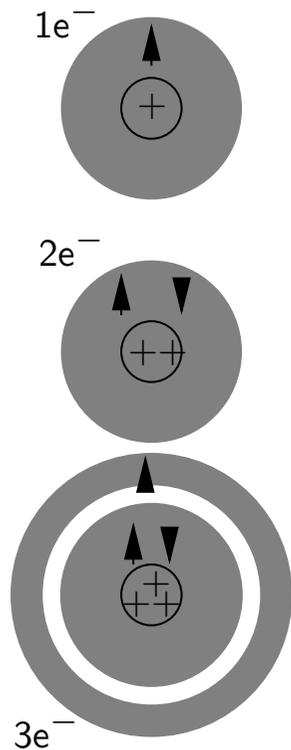
$$\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle - \langle 2|a\rangle\langle 1|b\rangle.$$

Sind Richtungen 1 und 2 (oder auch die Detektoren 1 und 2) dieselben, so verschwindet die Amplitude. Es ist identischen Fermionen unmöglich, denselben Zustand einzunehmen. Wenn sie am selben Ort sein und denselben Impuls haben sollen, müssen sie einen antiparallelen Spin aufweisen. Um kompatibel mit dem Resultat für Bosonen zu bleiben, können wir dies formal schreiben als

$$P_{(n+1)}(\text{Fermi}) = (1 - n)|w|^2 \Delta S P_n(\text{Fermi}),$$

wo nur $n = 0$ oder $n = 1$ möglich ist.

Das Pauli-Prinzip



Eine andere Formulierung dieses Prinzips hatte Goudsmit und Uhlenbeck zur Postulierung des Elektronenspins bewogen. Hier sagen wir einfach, dass Fermionen nicht denselben Zustand einnehmen können. Für den Aufbau der Atome ist dies von großer Bedeutung. Bereits im Heliumatom macht sich das Pauliprinzip bemerkbar. Das Heliumatom im Grundzustand muss zwei Elektronen mit antiparallelem Spin haben. Die beiden Elektronen können nicht denselben Spin haben. Das nächst-schwerere Element, Lithium, mit seinem dreifach geladenen Kern, muss selbst im Grundzustand eine noch kompliziertere Struktur aufweisen.

Selbst ein sehr starkes Magnetfeld könnte nicht beide Elektronenspins im Heliumatom parallel richten. Offenbar wirkt eine äußerst starke Kraft, welche die Elektronenspins antiparallel ausrichtet. Bei den Kernen reicht diese aber für ein ^2He Isotop nicht aus.

Quantenstatistik I: klassische Teilchen

Wir wollen in diesem Abschnitt weitere Folgerungen aus der Ununterscheidbarkeit ziehen. Dazu betrachten wir vorerst ein System von klassischen Teilchen im thermischen Gleichgewicht. Die Teilchen können von einem “Energiezustand” zum anderen wechseln, die “Übergangswahrscheinlichkeit” $R_{1\rightarrow 2}$ gibt dabei die Wahrscheinlichkeit an, von Zustand 1 mit Energie E_1 in Zustand 2 mit Energie E_2 zu wechseln. Im Gleichgewicht muss gelten

$$n_1 R_{1\rightarrow 2} = n_2 R_{2\rightarrow 1}, \quad \text{also} \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_{2\rightarrow 1}}{R_{1\rightarrow 2}}.$$

wo n_i die Anzahl Teilchen im Zustand i bezeichnet. Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt nach Boltzmann

$$n_1 = n(E_1) = A e^{-E_1/kT} \quad \text{und} \quad n_2 = n(E_2) = A e^{-E_2/kT}.$$

Daraus folgt für die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{Ae^{-E_1/kT}}{Ae^{-E_2/kT}} = \frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_2/kT}} = e^{-\frac{E_1-E_2}{kT}} = e^{\frac{E_2-E_1}{kT}}.$$

Quantenstatistik II: Bose-Teilchen

Für Bose-Teilchen im thermodynamischen Gleichgewicht gilt nach den bisherigen Überlegungen (siehe auch Seite 22)

$$n_1 R_{1 \rightarrow 2}^{\text{Boson}} = n_2 R_{2 \rightarrow 1}^{\text{Boson}}$$

und

$$R_{1 \rightarrow 2}^{\text{Boson}} = (1 + n_2) R_{1 \rightarrow 2} \quad \text{und} \quad R_{2 \rightarrow 1}^{\text{Boson}} = (1 + n_1) R_{2 \rightarrow 1},$$

wo $R_{1 \rightarrow 2}$ und $R_{2 \rightarrow 1}$ auf Seiten 25 und 26 definiert sind. Zusammen ergibt sich

$$n_1(1 + n_2) R_{1 \rightarrow 2} = n_2(1 + n_1) R_{2 \rightarrow 1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{n_1(1 + n_2)}{n_2(1 + n_1)} = \frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_2/kT}}.$$

Damit erhalten wir eine Gleichung, die auf beiden Seiten nur eine gemeinsame

Größe, die Temperatur T , enthält,

$$\frac{n_1}{1 + n_1} e^{E_1/kT} = \frac{n_2}{1 + n_2} e^{E_2/kT} = e^{-\alpha(T)}.$$

Wir können diese Gleichung nach n_1 bzw. nach n_2 auflösen

$$n_1 = \frac{1}{e^{\alpha(T)} e^{E_1/kT} - 1}, \text{ bzw. } n_2 = \frac{1}{e^{\alpha(T)} e^{E_2/kT} - 1}.$$

Dies ist die sogenannte **Bose-Verteilung** für den Erwartungswert n_i der Anzahl Bose-Teilchen mit einer Energie E_i in einem System im thermodynamischen Gleichgewicht. Beachten Sie die Ähnlichkeit mit dem Spektrum der Schwarzkörperstrahlung (siehe P4_V1):

$$\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Kein Wunder, Photonen sind Bosonen!

Quantenstatistik III: Fermionen

Für Fermi-Teilchen gilt nach den bisherigen Überlegungen

$$n_1 R_{1 \rightarrow 2}^{\text{Fermion}} = n_2 R_{2 \rightarrow 1}^{\text{Fermion}}$$

und

$$R_{1 \rightarrow 2}^{\text{Fermion}} = (1 - n_2) R_{1 \rightarrow 2} \quad \text{und} \quad R_{2 \rightarrow 1}^{\text{Fermion}} = (1 - n_1) R_{2 \rightarrow 1},$$

wo $R_{1 \rightarrow 2}$ und $R_{2 \rightarrow 1}$ auf Seiten 25 und 26 definiert sind. Zusammen ergibt sich

$$n_1(1 - n_2) R_{1 \rightarrow 2} = n_2(1 - n_1) R_{2 \rightarrow 1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{n_1(1 - n_2)}{n_2(1 - n_1)} = \frac{R_{2 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 2}} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_2/kT}}.$$

Damit erhalten wir eine Gleichung, die auf beiden Seiten nur eine gemeinsame

Größe, die Temperatur T enthält,

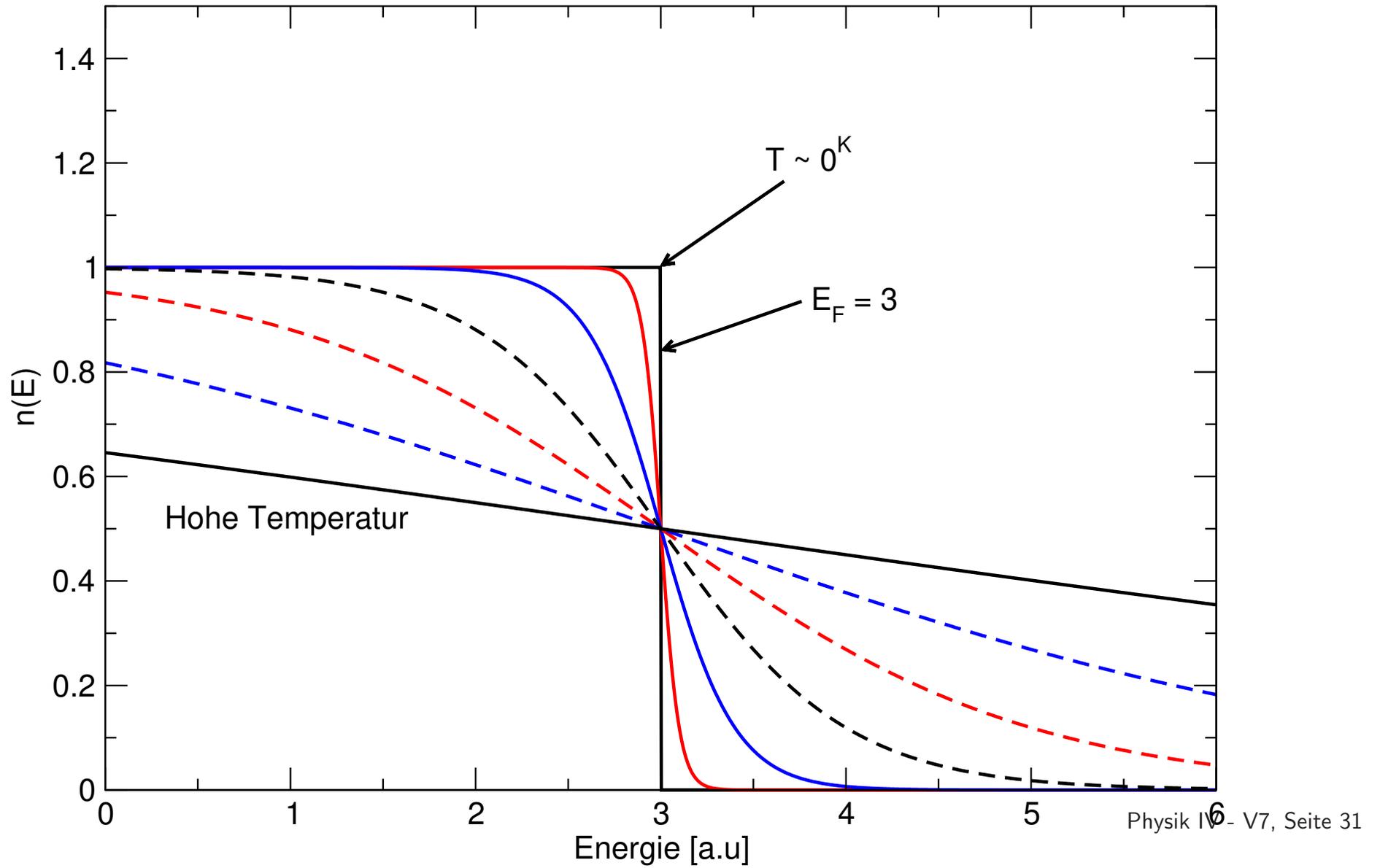
$$\frac{n_1}{1 - n_1} e^{E_1/kT} = \frac{n_2}{1 - n_2} e^{E_2/kT} = e^{-\alpha(T)}.$$

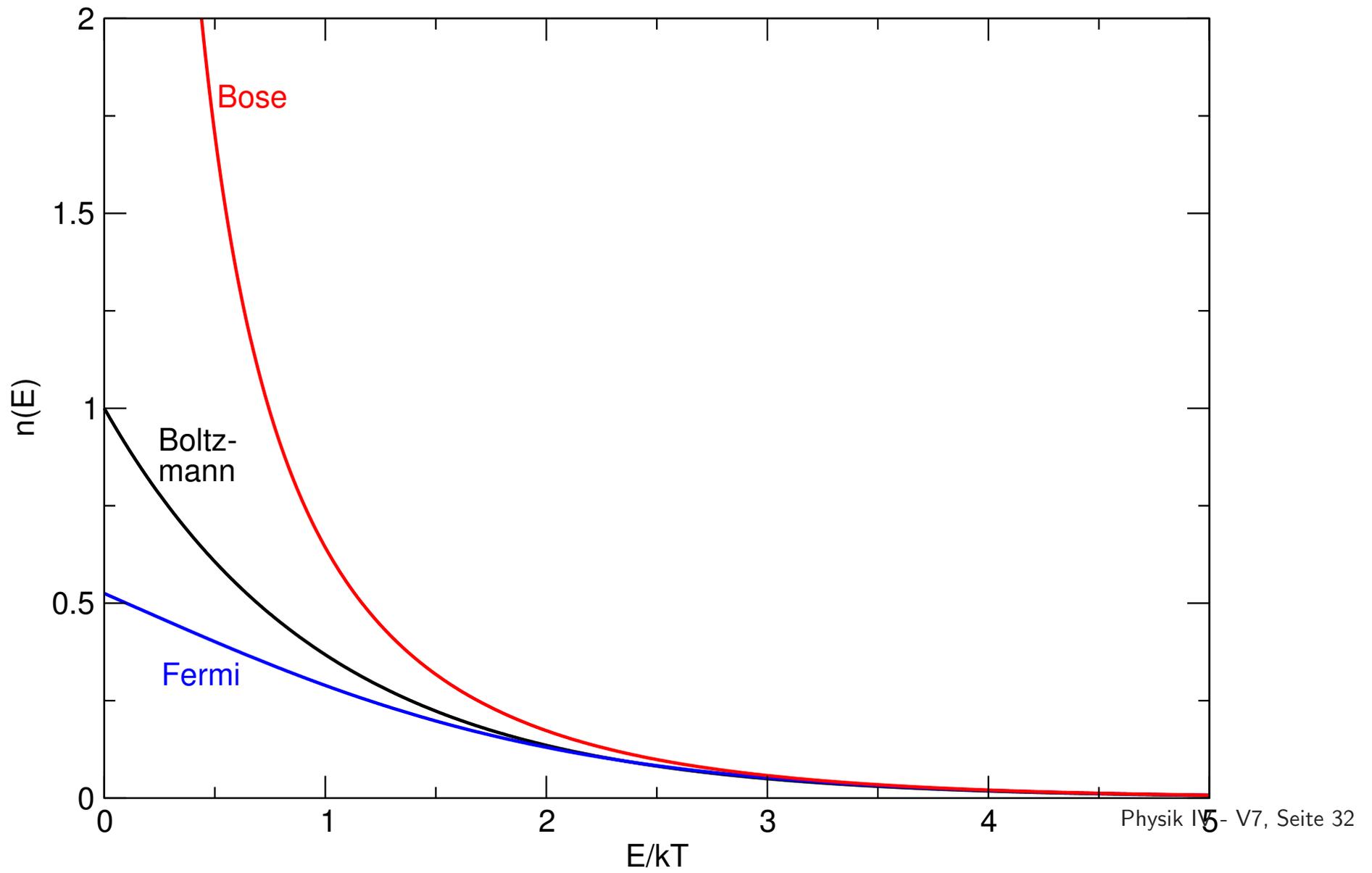
Wir können diese Gleichung nach n_1 bzw. nach n_2 auflösen

$$n_1 = \frac{1}{e^{\alpha(T)} e^{E_1/kT} + 1}, \text{ bzw. } n_2 = \frac{1}{e^{\alpha(T)} e^{E_2/kT} + 1}.$$

Dies ist die **Fermi-Verteilung** für den Erwartungswert n_i der Anzahl Fermi-Teilchen mit einer Energie E_i in einem System im thermodynamischen Gleichgewicht. Sie wird oft geschrieben als

$$n(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}, \text{ wo } E_F \text{ die Fermi-Energie ist.}$$





Anwendungen I: Absorption und Emission von Photonen

Photonen folgen der Bose-Statistik, folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom ein Photon eines bestimmten Zustandes emittiert, $n + 1$ mal größer, wenn es bereits n solche Photonen hat, als wenn es keines hat. Die Amplitude, dass ein Photon zu einem Zustand hinzugefügt wird, wenn es in diesem schon n Photonen hat, ist demnach

$$\langle n + 1 | n \rangle = \sqrt{n + 1} a,$$

wo a die Amplitude für keine Photonen in jenem Zustand ist.

Ganz allgemein gilt für Amplituden, dass die “Umkehramplitude” gerade die konjugiert-komplexe Amplitude ist:

$$\langle \chi | \phi \rangle = \langle \phi | \chi \rangle^*.$$

Damit wird die Amplitude von $n + 1$ zu n Photonen zu kommen gerade

$$\langle n | n + 1 \rangle = \sqrt{n + 1} a^*.$$

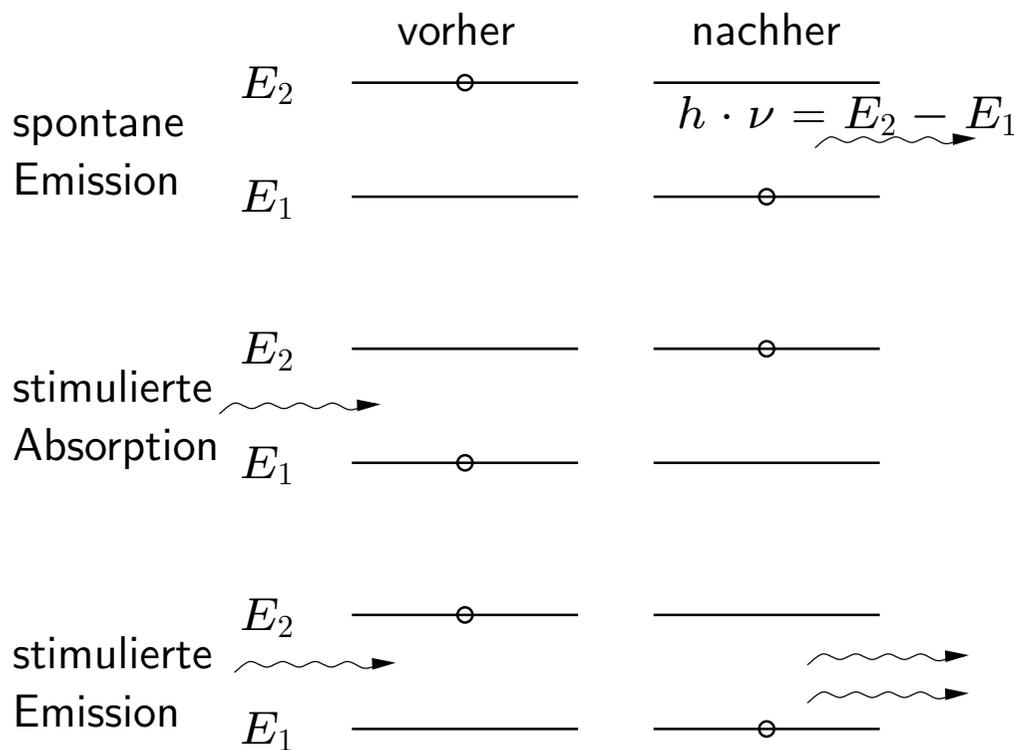
Wir betrachten ein Atom in einer Kiste (z. B. mit spiegelnden Wänden) in der auch n Photonen desselben Zustandes seien. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Atom ein solches Photon emittiert, ist

$$(n + 1) |a|^2$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Photon absorbiert, ist

$$n |a|^2,$$

wo $|a|^2$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Atom emittiert, wenn keine Photonen in der Kiste sind.



Nun kann ein Atom spontan ein Photon emittieren, es kann ein Photon absorbieren und es kann ein Photon emittieren, wenn es dazu angeregt (stimuliert) wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass es von Zustand 1 zu 2 angeregt wird (und dabei ein Photon absorbiert), sei

$$R_{1 \rightarrow 2} = B_{12}w(\nu),$$

wo $w(\nu) = n(\nu) \cdot h \cdot \nu$ die spektrale Energiedichte der Photonen ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Atom einen Übergang von 2 nach 1 macht (und dabei ein Photon emittiert) besteht aus zwei Teilen; einer spontanen Emission und einer

induzierten Emission, wo A_{21} , B_{21} und B_{12} **Einsteinkoeffizienten** heißen,

$$R_{2 \rightarrow 1} = A_{21} + B_{21}w(\nu).$$

Befinden sich in der Kiste N_1 Atome im Zustand 1 und N_2 Atome im Zustand 2, so muss im Gleichgewicht die Besetzung der beiden Zustände konstant bleiben, d. h. die Emissionsrate muss gleich der Absorptionsrate sein:

$$A_{21}N_2 + B_{21}w(\nu)N_2 = B_{12}w(\nu)N_1. \quad (1)$$

Abgesehen von einer möglicherweise verschiedenen Modenzahl beträgt das Verhältnis N_2/N_1 im thermodynamischen Gleichgewicht gerade

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} = e^{-(E_2-E_1)/kT} = e^{-h\nu/kT}. \quad (2)$$

Anwendungen II: Der Laser

Umstellen von Glg. 1 nach $w(\nu)$ zeigt, dass im thermodynamischen Gleichgewicht

$$w(\nu) = \frac{A_{21}/B_{21}}{e^{\frac{E_2-E_1}{kT}} \frac{B_{12}}{B_{21}} - 1}$$

gilt, wo nach Glg. 2

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} = e^{-(E_2-E_1)/kT} = e^{-h\nu/kT}.$$

Wie kann man nun erreichen, dass in einem Laser mehr emittiert wird? Tja, der Trick liegt in N_2/N_1 ! Kann ich irgendwie N_2/N_1 beeinflussen, d.h., erreichen, dass $N_2/N_1 \gg 1$? Wenn ja hätten wir erreicht, dass netto mehr Photonen emittiert würden, als absorbiert werden. Wir hätten eine "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" (Laser)! Technisch kann eine solche Besetzungsinversion z.B. durch optisches Pumpen erreicht werden, in welchem der Zustand 2 durch externes Pumpen bevölkert wird.

Anwendungen III: Photonengas

Nach den bisherigen Überlegungen muss gelten

$$N_1 n = N_2 (n + 1), \quad \text{womit} \quad \frac{n}{n + 1} = e^{-h\nu/kT}.$$

Damit haben wir für $n(\nu)$

$$n(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad \text{bzw.} \quad n(\nu)h\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

was uns angibt, wieviele Photonen der Frequenz ν in der Kiste sind, bzw. die Energie in diesen Photonen. Die spektrale Energiedichte des thermischen Strahlungsfeldes erhalten wir aus dem Planckschen Strahlungsgesetz,

$$w(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Es sieht also so aus, weil Photonen Bosonen sind!

In der Herleitung der Planck-Formel hatten wir vorausgesetzt, dass wir eine Ansammlung von harmonischen Oszillatoren in der Kiste hatten mit Energieniveaus $n h \nu$. Dies ist völlig gleichberechtigt mit der Vorstellung von n identischen Boseteilchen der Energie $h \nu$ in der Kiste!

Anwendungen IV: Einsteinkoeffizienten

Aus der Gleichung

$$A_{21}N_2 + B_{21}w(\nu)N_2 = B_{12}w(\nu)N_1.$$

erhalten wir nun die spektrale Energiedichte $w(\nu)$

$$w(\nu) = \frac{A_{21}/B_{21}}{\frac{B_{12}}{B_{21}}e^{h\nu/kT} - 1},$$

was mit der Planck-Formel übereinstimmen muss, folglich muss gelten:

$$\frac{B_{21}}{B_{12}} = 1, \quad \text{und} \quad \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi\nu^3}{c^3}.$$

Sobald wir also z. B. den Koeffizienten für spontane Emission berechnen können, folgen daraus auch die für induzierte Emission und Absorption. Ferner gilt, dass die Einsteinkoeffizienten für spontane Emission und Absorption gleich sein müssen³.

Mit

$$w(\nu) = \frac{A_{21}/B_{21}}{\frac{B_{12}}{B_{21}}e^{h\nu/kT} - 1},$$

finden wir

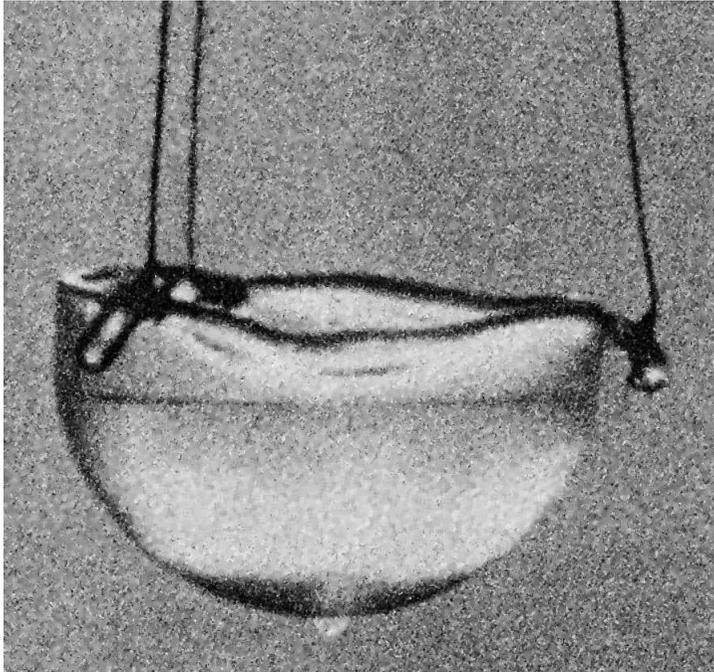
$$\frac{A_{21}}{B_{21}w(\nu)} = e^{h\nu/kT} - 1,$$

was sagt, dass für $h\nu \gg kT$ die spontane Emission dominiert. $h\nu \sim kT$ gilt erst für Strahlung im Mikrowellenbereich (\rightarrow Maser!).

³Wir haben hier keine Entartung angenommen. Diese müsste hier noch berücksichtigt werden,

$$B_{21}/B_{12} = g_1/g_2.$$

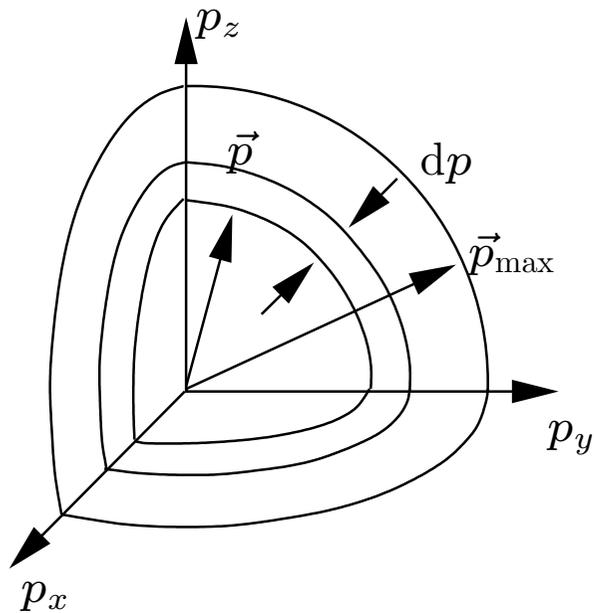
Anwendungen V: Bose-Kondensation



Die Eigenschaft von Bosonen, dasselbe zu tun, was alle anderen tun, hat eigenartige Konsequenzen, eine davon ist die Bose- oder Bose-Einstein Kondensation. Kühlt man ^4He sehr stark ab (z. B. indem man es verdampfen lässt), so erreicht es unterhalb einer Temperatur von ca. 2,18 K, dem sog. λ -Punkt, eine suprafluide Phase, in der es ohne Reibungswiderstand über den Rand eines Gefäßes laufen kann (die Viskosität hat um einen Faktor $> 10^6$ abgenommen, das Benetzungsvermögen ist enorm gestiegen). Dies ist für

^3He erst bei viel tieferen Temperaturen möglich, wenn sich zwei (fermionische) ^3He -Atome zu einem (bosonischen) $^3\text{He}_2$ -"Molekül" verbinden. (Bild: ER)

Anwendungen IV: Entartungsdruck



Das Pauli-Prinzip führt bei niedrigen Temperaturen oder bei hohen Drücken zur sogenannten “Entartung” der Materie. Hier wollen wir als Beispiel die Entartung des Elektronengases in einem Stern betrachten. Nach der Unschärferelation braucht ein Elektron ein minimales Phasenraumvolumen

$$\Delta\Omega = \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \cdot \Delta x \Delta y \Delta z = h^3.$$

Wegen des Pauli-Prinzips kann sich in einem solchen Phasenraumvolumen nur ein Elektronenpaar mit antiparallelem Spin aufhalten, nach der klassischen Physik gäbe es keine Beschränkung. Die Zustandsgleichung des Elektronengases lässt sich nun leicht bestimmen. In einem Volumen V befinden

sich $n \cdot V$ Elektronen, im Impulsraum füllen sie gleichförmig eine Kugel mit Radius des maximalen Impulses, bzw. der Fermi-Energie $E_F = p_{\max}^2/2m_e$ auf, also

$$n \cdot V = \frac{2}{h^3} \cdot V \cdot \frac{4\pi}{3} p_{\max}^3, \quad \text{bzw.} \quad p_{\max} = \sqrt{2mE_F} = h \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3}.$$

Der Druck ist $P = nk_B T = (2/3)n\bar{E}$, wo $\bar{E} = (3/2)k_B T$ die mittlere Energie pro Elektron ist. Nach der Abb. auf Seite 43 gibt es $n(E) = 4\pi p^2 dp$ Elektronen im Impulsintervall $[p, p+dp]$, bzw. nach $E = p^2/(2m)$ im Energieintervall $[E, E+dE]$.
Damit

$$\bar{E} = \frac{4\pi \int_0^{p_{\max}} dp E p^2}{4\pi \int_0^{p_{\max}} dp p^2} = \frac{3 p_{\max}^2}{5 \cdot 2m} = \frac{3}{5} E_F.$$

Die Zustandsgleichung lautet nun

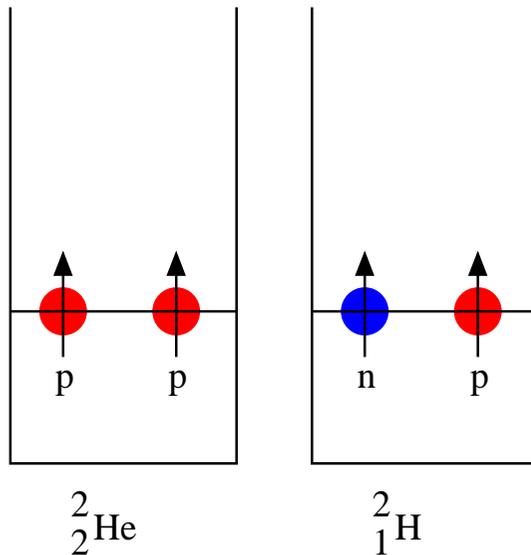
$$P = \frac{2}{3}n\bar{E} = \frac{2}{3}n\frac{3}{5}E_F = \frac{2}{5}nE_F = \frac{8\pi h^2}{15m} \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{5/3}.$$

Die Temperatur kommt überhaupt nicht mehr vor! Setzen wir typische Zahlen für einen Weissen Zwerg ein, $n \approx 10^{30}\text{cm}^{-3} = 10^{36}\text{m}^{-3}$, so erhalten wir

$$P \approx \frac{25}{15} \frac{(6.6 \cdot 10^{-34})^2}{9 \cdot 10^{-31}} \left(\frac{3 \cdot 10^{36}}{8\pi}\right)^{5/3} \approx \frac{25}{3} 10^{-37} \frac{1}{35} 10^{60} \approx \frac{1}{21} 10^{23} \text{ Pa} \approx 10^{17} \text{ bar}.$$

Auch Leitungselektronen in Festkörpern sind entartet, typische Werte sind $n_e \approx 10^{22}\text{cm}^{-3}$ und $E_F \approx 3\text{eV}$, der Druck beträgt also $P \approx 3 \cdot 10^9\text{Pa}$, bzw. $P \approx 3 \cdot 10^4\text{bar}$!

Anwendung VII: Kerne



Das Pauliprinzip spielt auch in der Kernphysik eine wichtige Rolle. Es erklärt z. B. warum der links skizzierte Kern ${}^2_2\text{He}$ nicht existiert, wohl aber der Deuteriumkern, ${}^2_1\text{H}$. Die Bindungskräfte im Kern sind für parallele Spins der Kernkomponenten Protonen und Neutronen etwas stärker, als für anti-parallele. Ein Deuteron mit anti-parallelen Spins im Kern, also mit Gesamtkernspin $I = 0$ gibt es nicht, weil dafür die Bindungsenergie nicht ausreicht. Wegen des Pauli-Prinzips ist aber ${}^2_2\text{He}$, welches aus zwei spin-parallelen Protonen bestehen müsste, nicht erlaubt.

${}^2_1\text{H}$ wird in der Natur als Deuteron (z. B. in schwerem Wasser) nachgewiesen, ${}^2_2\text{He}$ existiert nicht. Man beachte die "Gleichbehandlung" von Neutronen und Protonen!