

Das Elektron, die Dirac-Gleichung und die QED

In der nicht-relativistischen Quantenmechanik werden Teilchen durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben. Bei den Geschwindigkeiten, die in modernen Teilchenbeschleunigern oder auch in astrophysikalischen Beschleunigern erreicht werden, müssen die Teilchen aber relativistisch behandelt werden.

Man fragt sich also, wie lautet denn eine relativistisch korrekte Schrödinger-Gleichung? Es zeigt sich, dass die Situation vertrackter ist, als man denken würde. Wir werden heute die Schrödinger-Gleichung (nicht relativistisch) “herleiten” und ebenso die relativistische Klein-Gordon Gleichung (für Spin 0 Teilchen) und die relativistische Dirac-Gleichung (für Spin 1/2 Teilchen).

Mit der Dirac-Gleichung werden wir verstehen, warum es Antiteilchen gibt.

Die Fortsetzung der Vorlesung mit Prof. Wolf beginnt am 31.5.2017.

Die Wellenfunktion in der Quantenmechanik

Die Wellenfunktion gibt bekanntlich das Verhalten von Teilchen an. Für ein freies Teilchen können wir eine ebene Welle ansetzen,

$$\Psi(t, x) = A \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}.$$

Mit der de-Broglie Wellenlänge des Teilchens $\lambda = \frac{h}{p} \longrightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k$ und $E = \hbar\omega$ können wir die Wellenfunktion auch umschreiben

$$\Psi(t, x) = A e^{-(i/\hbar)Et} \cdot e^{(i/\hbar)\vec{p} \cdot \vec{x}}.$$

So lautet

$$\partial_t \Psi = -i \frac{E}{\hbar} \Psi \implies \underline{E \longrightarrow i\hbar \partial_t} \quad \text{und} \quad \partial_{\vec{x}} \Psi = \frac{i}{\hbar} \vec{p} \Psi \implies \underline{\vec{p} \longrightarrow -i\hbar \partial_{\vec{x}}}.$$

Eine “Herleitung” der Schrödingergleichung

Die klassische Energie-Impuls-Beziehung lautet

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} + V = E,$$

wo V ein Potential beschreibt.

Die soeben motivierten quantenmechanischen Beziehungen $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ und $E \rightarrow i\hbar\partial_t$ setzen wir in die klassische Energie-Impuls-Beziehung ein und wenden sie auf die Wellenfunktion Ψ an

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + V\psi = i\hbar\partial_t\psi.$$

Voilà, die Schrödingergleichung!

“Herleitung” der Klein-Gordon Gleichung

Spin 0 Teilchen (Bosonen) werden relativistisch durch die Klein-Gordon Gleichung beschrieben, die wir hier ähnlich “herleiten”. Wir beginnen mit der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0$$

für ein freies Teilchen (kein Potential hält es gefangen). Die quantenmechanischen Beziehungen $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ und $E \rightarrow i\hbar\partial_t$ können als Vierervektor geschrieben werden

$$p_\mu \longrightarrow i\hbar\partial_\mu, \quad \text{wo } \partial_\mu \doteq \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \text{d. h. } \partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Einsetzen liefert die **Klein-Gordon Gleichung**

$$-\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \psi - m^2 c^2 \psi = 0, \quad \text{bzw. } \underline{\underline{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi.}}$$

Herleitung der Dirac-Gleichung

Dirac hat versucht, die relativistische Energie-Impuls-Beziehung zu faktorisieren. Wenn sich das Teilchen in Ruhe befände ($\vec{p} = \vec{0}$), wäre dies einfach,

$$(p^0)^2 - m^2 c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0,$$

woraus man zwei lineare Gleichungen $(p^0 - mc) = 0$ oder $(p^0 + mc) = 0$ erhält, die beide die Energie-Impulsbeziehung erfüllen. Dummerweise wird es komplizierter, wenn das zu beschreibende Teilchen nicht in Ruhe ist ($\vec{p} \neq \vec{0}$). In diesem Fall muss man acht Koeffizienten β^κ und γ^λ bestimmen, damit folgende Gleichung gilt

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc).$$

Ausmultiplizieren der rechten Seite ergibt

$$\beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda + mc(\gamma^\kappa - \beta^\kappa)p_\kappa - m^2 c^2.$$

Um die Energie-Impuls-Beziehung zu erfüllen, muss der lineare Term in p_μ verschwinden, also $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$ gelten. Somit müssen wir also Koeffizienten finden, für die gilt

$$\begin{aligned}
 p^\mu p_\mu &= \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda, \quad \text{d. h.} \\
 (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\gamma^0)^2 (p^0)^2 + (\gamma^1)^2 (p^1)^2 + (\gamma^2)^2 (p^2)^2 + (\gamma^3)^2 (p^3)^2 \\
 &\quad + (\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0) p_0 p_1 + (\gamma^0 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^0) p_0 p_2 \\
 &\quad + (\gamma^0 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^0) p_0 p_3 + (\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1) p_1 p_2 \\
 &\quad + (\gamma^1 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^1) p_1 p_3 + (\gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2) p_2 p_3.
 \end{aligned}$$

Das Problem liegt in den Kreuztermen. Sie können wegen der Kommutativität der reellen Zahlen nicht zum Verschwinden gebracht werden!

Hier hatte Dirac eine geniale Idee - Wie wäre es, wenn die γ s statt Zahlen Matrizen wären? Matrizen kommutieren nicht und wenn es gelänge, solche zu finden, für die gilt

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \quad \text{und} \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu$$

dann wäre das Problem gelöst¹. Die kleinsten Matrizen, die diese Bedingung erfüllen sind 4×4 Matrizen und sind auf der nächsten Seite gezeigt. Mit diesen γ -Matrizen kann die relativistische Energie-Impuls-Beziehung also tatsächlich faktorisiert werden.

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc) (\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0.$$

¹Man kann das etwas kompakter ausdrücken. Wir definieren den sog. Antikommutator $\{A, B\} = AB + BA$. Damit lauten diese Bedingungen einfach $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Welchen der beiden Faktoren $(\gamma^\kappa p_\kappa + mc)$ $(\gamma^\lambda p_\lambda - mc)$ man wählt ist Konvention. Wir setzen wieder die quantenmechanischen Beziehungen ein und erhalten die **Dirac-Gleichung** (P. A. M. Dirac, 1927):

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0 \longrightarrow \underline{i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0.}$$

Man bemerke, dass die einfachst möglichen Lösungen der Dirac-Gleichungen Wellenfunktionen mit vier Komponenten sind, sog. **Spinoren** der Form

$$\vec{\psi}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1(t, \vec{x}) \\ \vec{\psi}_2(t, \vec{x}) \\ \vec{\psi}_3(t, \vec{x}) \\ \vec{\psi}_4(t, \vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Trotz der vier Komponenten sind es keine Vierervektoren – Spinoren transformieren sich anders. Die beiden oberen Komponenten (ψ_1 und ψ_2) beschreiben die beiden Spin-Zustände (rauf und runter) eines negativ geladenen Teilchens (Elektrons) mit positiver Energie. Genauere Betrachtung zeigt, dass die beiden unteren Komponenten die beiden Spin-Zustände eines entsprechenden Teilchens (eines Elektrons) aber mit negativer Energie beschreiben. Das ist insofern problematisch, als die Elektronen dann hin zu immer niedrigeren Energien kaskadieren könnten

und dabei zünftig abstrahlen würden. Dirac hat dieses Problem mit einer zweiten brillanten Idee gelöst indem er gesagt hat, dass diese negativen Energiezustände durch ein unendliches Meer von Elektronen bereits vollständig besetzt sind. Weil dieses Meer von Elektronen (engl. sea electrons) immer und überall homogen vorhanden ist, können wir es nicht nachweisen und übt es keine Kraft auf die "normale" Welt aus. Mithilfe des Pauliprinzips, wonach keine zwei Fermionen denselben Quantenzustand besetzen dürfen, war die Welt dann gerettet und die normalen Elektronen in positiven Energiezuständen.

Was passiert nun, wenn wir einem Elektron im Meer genügend Energie geben, dass es plötzlich eine positive Energie hat? Dann bleibt im Meer ein positiv geladenes "Loch" übrig, welches genau den umgekehrten Spin des Meer-Elektrons hat. Die fehlende negative Energie wäre dann als positive Energie sichtbar. Dirac hoffte ursprünglich, so eine Erklärung für das Proton gefunden zu haben, es stellte sich aber heraus, dass diese Löcher dieselbe Masse haben mussten, wie die Elektronen. Dieses Problem mit seiner Gleichung war dann 1933 ein Triumph, als Anderson

das Positron, das Antiteilchen des Elektrons, entdeckte.

Die etwas komplizierte Interpretation von Dirac wurde in den 1940-er Jahren durch Stückelberg und Feynman vereinfacht. Die Lösungen für Elektronen negativer Energie sind darin Lösungen für Positronen positiver Energie.

Das Resultat von Dirac (und auch die Interpretation von Stückelberg und Feynman) gilt aber nicht nur für Elektronen sondern für alle Elementarteilchen. Alle Elementarteilchen haben ein Antiteilchen mit derselben Masse aber umgekehrter Ladung. Das Antiteilchen wird in der Regel mit einem Balken gekennzeichnet, $\nu, \bar{\nu}$, oder e^- und $\bar{e} = e^+$. Teilchen und Anti-Teilchen können annihilieren und geben dabei die doppelte Ruheenergie ab, $2m_0c^2$. Das Photon ist sein eigenes Antiteilchen, $\gamma = \bar{\gamma}$.

Die Entdeckung des Positrons

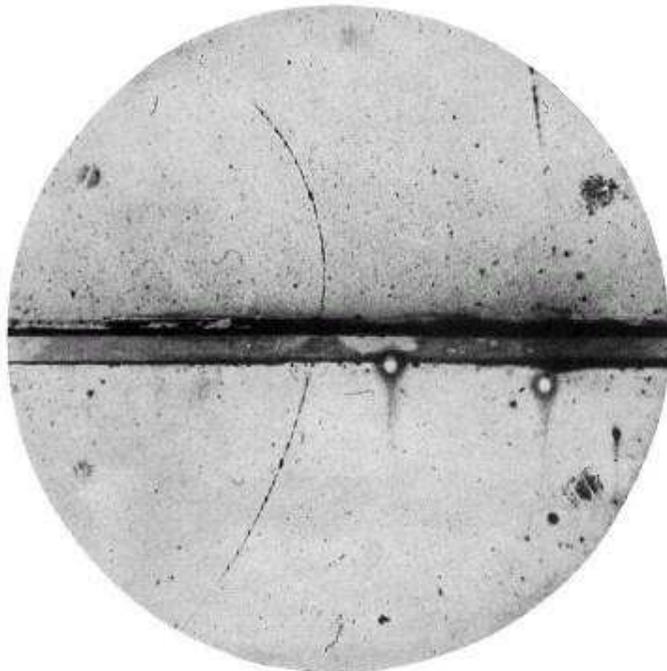


FIG. 1. A 65 million volt positron ($H_D = 2.1 \times 10^6$ gauss-cm) passing through a 6 mm lead plate and emerging as a 23 million volt positron ($H_D = 1.3 \times 10^6$ gauss-cm). The length of this latter path is at least ten times greater than the possible length of a proton path of this curvature.

Carl Anderson war PostDoc bei R. Millikan und hat mit einer Wilsonschen Nebelkammer, durch die ein starkes Magnetfeld (ca. 1,5 T, hier in die Bildebene hineinzeigend) verlief, als erstes das Positron nachgewiesen². Auch er nutzte die kosmische Strahlung als Quelle (hätte man damals den β^+ -Zerfall schon gekannt, wäre eine β^+ -Quelle einfacher gewesen. Durch Einbringen einer 6mm dicken Bleiplatte in der Mitte der Kammer konnte er die Einfallsrichtung bestimmen, weil die Teilchen beim Durchdringen Energie verlieren. Aus dem Krümmungsradius über und unter der Platte

kann man sagen, ob das Teilchen von oben oder unten kam (Tun Sie's selber!).

²Anderson, C. D., *The positive electron*, Phys. Rev., **43**, 491-494 (1933)

Antiprotonen am Bevatron

Am Bevatron in Berkley sollten mittels der Reaktion $p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$ Antiprotonen erzeugt werden. Dabei diene ein Tank mit Wasserstoff als Target. Wie groß muss die Energie des Projektil-Protons mindestens sein (Schwellwert)? Am einfachsten geht es im Schwerpunktsystem. Da bewegen sich die beiden Protonen mit derselben Geschwindigkeit aufeinander zu, der Gesamtimpuls verschwindet. Aber wir kennen die Energie des Projektils nur im Laborsystem. Verwenden wir den Viererimpuls, so können wir dessen Quadrat in beiden Systemen gleichsetzen.

$$p_{\text{tot,Lab,vor}}^{\mu} = \left(\frac{E + mc^2}{c}, |\vec{p}|, 0, 0 \right) \quad \text{und} \quad p_{\text{tot,SP,nach}}^{\mu} = (4mc, 0, 0, 0).$$

Die Betragsquadrate der beiden Vierervektoren sind Lorentz-invariant, also

$$\left(\frac{E + mc^2}{c}\right)^2 - (\vec{p})^2 = (4mc)^2.$$

Mit $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$ können wir den Impuls rauswerfen und erhalten

$$E = 7mc^2.$$

Die Ruheenergie eines Protons beträgt ca. 1000 MeV (genau 938,272 MeV). In der Tat wurden 1955 ab einer Strahlenergie von etwa 6000 MeV die ersten Antiprotonen beobachtet.

Symmetrien/Invarianzen und Erhaltungssätze

Symmetrien und Invarianzen spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Sie führen oft zu Erhaltungssätzen. Der Satz von Noether (1917) drückt dies mathematisch aus.

Ein Beispiel ist die Invarianz unter Translationen, also die Homogenität des Raumes. Aus dieser Invarianz folgt die Impulserhaltung.

Aus der Invarianz unter Drehungen folgt die Erhaltung des Drehimpulses. Dieser spielt in der Quantenphysik eine wichtige Rolle weil er die Klassifizierung von Zuständen nach ihrem Spin (neben anderen Quantenzahlen) ermöglicht.

Interessanterweise sind alle drei Wechselwirkungen, die wir in dieser Vorlesung behandelt haben sog. Eich-invariant. Bei der Coulomb-Wechselwirkung kennen wir dies bereits, wir können die Werte für das Vektorpotential \vec{A} , für welches $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ gilt, und für das skalare Potential Φ z. B. durch die Coulomb-Eichung festlegen. In der Elektrodynamik folgt aus dieser Eichinvarianz die Erhaltung der

Ladung. Ähnliche Eichinvarianzen gelten auch für die schwache und die starke Wechselwirkung. Eine Folge dieser Invarianz ist, dass alle Elementarteilchen masselos sein sollten! Es ist deshalb klar, dass diese drei Kräfte durch die bisher behandelten Formalismen nicht vollständig beschrieben werden können.

Eine Lösung über den Higgs-Mechanismus wird in V10 behandelt (siehe P4_V10).

Pariät und Paritätsverletzung

Zwei weitere Invarianzen spielen in der Physik der Elementarteilchen eine Rolle, Raumspiegelungen und “Ladungskonjugation”.

Die Invarianz der Gleichungen unter Raumspiegelungen führt zur Erhaltung der **Parität**. Der Paritätsoperator \hat{P} führt diese Raumspiegelung durch,

$$\hat{P}\Psi(\vec{x}, t) \doteq P\Psi(-\vec{x}, t),$$

wo P der Eigenwert von \hat{P} ist. Zweimaliges Anwenden führt zu einer Bedingung an die möglichen Eigenwerte,

$$\hat{P}^2\Psi(\vec{x}, t) = P\hat{P}\Psi(-\vec{x}, t) = P^2\Psi(\vec{x}, t),$$

also muss $P^2 = 1$ und deshalb $P = \pm 1$ gelten.

Nicht alle Zustände sind Eigenzustände der Parität. Ein Impulseigenzustand

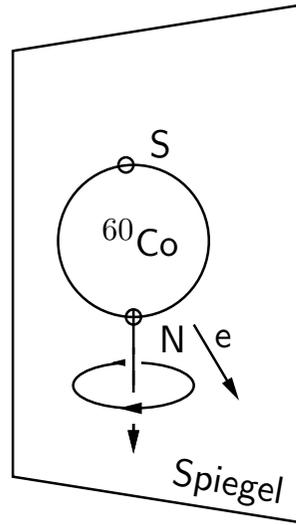
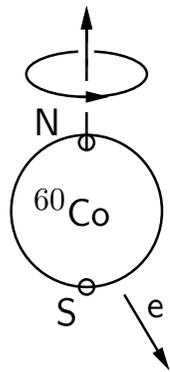
$$\Psi_p(\vec{x}, t) = \exp(i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)) \quad \text{wird zu} \quad \hat{P}\Psi_p(\vec{x}, t) = P\Psi_p(-\vec{x}, t) = P\Psi_{-p}(\vec{x}, t).$$

Deshalb ist nur der Zustand mit $\vec{p} = \vec{0}$ ein Eigenzustand der Parität. Der dazugehörige Eigenwert $P = \pm 1$ heißt Parität oder intrinsische Parität des Zustandes. Die Parität eines Zustandes, der aus einzelnen Zuständen zusammengesetzt ist, ist das Produkt deren Paritäten, Parität ist also eine multiplikative Quantenzahl³.

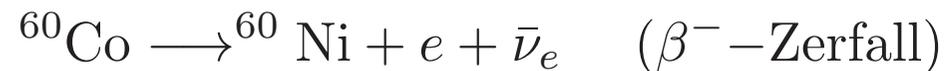
Wenden wir den Paritätsoperator auf die Dirac-Gleichung an, so findet man, dass diese nur invariant ist, wenn gilt $P(e^+e^-) = -1$, wie dies ja auch für alle Fermionen und ihre Antiteilchen gelten muss. Es ist **Konvention**, allen Leptonen Parität $P = 1$ und allen Anti-Leptonen Parität $P = -1$ zuzuordnen. Auch für Quarks gilt die Konvention, dass Quarks $P = 1$ und Antiquarks $P = -1$ haben.

³Siehe http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=PPN252457811_1927&DMDID=dmdlog30 für einen schönen Artikel von E. Wigner (insbesondere Punkt 4c).

Messung der Paritätsverletzung



1956 gab es ausgezeichnete experimentelle Bestätigungen für die Paritätserhaltung der elektromagnetischen Kraft und der starken Wechselwirkung, nicht aber für die schwache Wechselwirkung. Wu et al. (*Phys. Rev.*, **105**, 1413, (1957)) untersuchten dazu die Reaktion



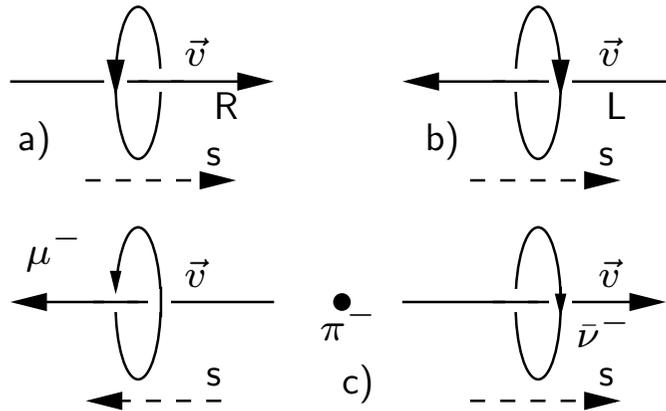
in der alle Spins der ^{60}Co -Kerne ausgerichtet waren⁴.

Dabei stellten sie fest, dass die Elektronen in die dem Kernspin entgegengesetzte Richtung emittiert wurden.

In einem Spiegelbild würden die Elektronen parallel zum Kernspin emittiert, was aber nicht beobachtet wird. **Die schwache WW verletzt die Parität!**

⁴Dazu mussten diese über eine längere Zeit bei 1K gehalten werden, damals eine beachtliche Leistung.

Paritätsverletzung – Die Helizität des Neutrinos



Die Helizität⁵ eines Teilchens wird über seinen Spin und seine Geschwindigkeit definiert. Dabei wird die z -Achse in Richtung der Geschwindigkeit gewählt, damit wird m_s/s als **Helizität** des Teilchens definiert. Ein Elektron mit Spin $1/2$ hat demnach Helizität $+1$ ($m_s = 1/2$) oder -1 ($m_s = -1/2$) und heißt dann **rechtshändig** bzw. **linkshändig**. Dieser Unterschied spielt nur für masselose Teilchen eine

Rolle - nur für sie ist die Helizität ein Unterscheidungsmerkmal. Ein - hier masseloses - Neutrino ist durch seine Helizität ausgezeichnet. Beim Zerfall eines (Spin 0) Pions nach $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ müssen Myon und Antineutrino den entgegengesetzten Spin und deshalb dieselbe Händigkeit aufweisen. Beobachtung zeigt, **Neutrini sind immer linkshändig, Antineutrini sind immer rechtshändig**.

⁵Das ist - im Wesentlichen - die Händigkeit

Ladungskonjugation

Eine weitere Symmetrie ist die **Ladungskonjugation**. Vertausche ich in den Gleichungen für die Coulomb- und die starke Wechselwirkungen alle Vorzeichen der Ladung, so stehen am Schluss wieder die ursprünglichen Gleichungen da. Sie sind invariant gegen das Vertauschen des Vorzeichens der Ladungen. Dabei müssen wir Teilchen, die kein Antiteilchen haben, wie z. B. das Photon, anders behandeln, als solche, die eines haben, wie z. B. das Elektron. Der Konjugationsoperator \hat{C} wirkt auf Zustände

$$\hat{C}|a, \Psi_a\rangle = C|a, \Psi_a\rangle \quad \text{und} \quad \hat{C}|b, \Psi_b\rangle = C|\bar{b}, \Psi_{\bar{b}}\rangle,$$

wo a für Teilchen ohne und b für Teilchen mit Antiteilchen steht. Wenden wir \hat{C} zweimal an, so sehen wir, dass $C = \pm 1$ gelten muss, genau wie bei der Parität. Teilchen ohne Antiteilchen können als Paritäts-Eigenzustände existieren, Teilchen

mit Antiteilchen können dies nicht. Sie können nur als Linearkombinationen von solchen auftreten. Die Ladungskonjugation sagt unter anderem voraus, dass

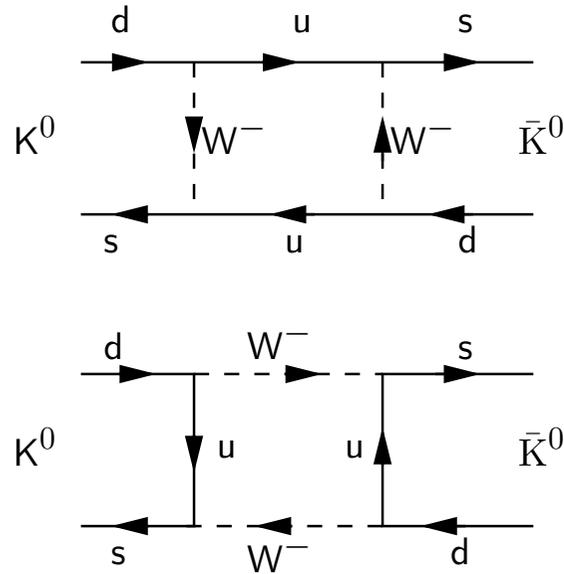
$$\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma,$$

und nicht in drei Photonen zerfällt, weil das Photon $C = -1$ hat. Eine weitere Voraussage ist, dass die Energie im Zerfall

$$p + \bar{p} \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

sich im Mittel auf alle drei Pionen gleich aufteilen muss. Die starke Wechselwirkung ist invariant unter Ladungskonjugation. Andererseits ist die Ladungskonjugation nicht eine Symmetrie der schwachen Wechselwirkung, wie man am Beispiel des Neutrinos sieht. Ein Neutrino ist **immer** linkshändig. Anwenden von C auf ein linkshändiges Neutrino liefert ein linkshändiges Antineutrino, **was es nicht gibt!**

CP -(Fast)-Invarianz und der Zerfall von Kaonen

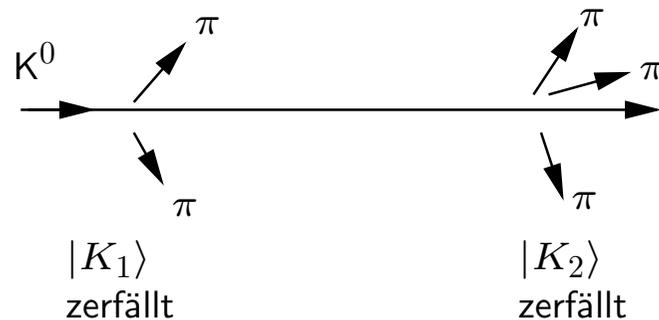


Wenn wir C und P kombinieren, stellt sich heraus, dass CP fast erhalten ist. Das linkshändige Antineutrino wird rechtshändig und die Welt ist in Ordnung. Uffffffff. . . , Glück gehabt! Dann war halt CP die wahre Symmetrie! Beim neutralen K -Meson ist aber alles anders. Die beiden Diagramme links zeigen, dass das neutrale Kaon K^0 mit strangeness⁶ +1 in sein Antiteilchen \bar{K}^0 mit strangeness -1 übergehen kann. Deshalb sehen wir normalerweise nur Linearkombinationen der beiden Teilchen. Dabei gibt es Eigenzustände von CP , nämlich wegen $P|K^0\rangle = -|K^0\rangle$ und $P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$ sowie $C|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$ und $C|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad \text{und} \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle).$$

⁶Das s -Quark hat strangeness $S = -1$.

Dann gilt $CP|K_1\rangle = |K_1\rangle$ und $CP|K_2\rangle = -|K_2\rangle$ und $|K_1\rangle$ kann nur in einen Zustand mit $CP = +1$, $|K_2\rangle$ aber nur in einen mit $CP = -1$ zerfallen⁷. Neutrale Kaonen zerfallen typischerweise in zwei oder drei Pionen mit Parität $1 = (-1)^2$ bzw. $-1 = (-1)^3$. Wie auf S. 23 gezeigt, haben K_1 und K_2 $C = +1$. Also muss $|K_1\rangle$ mit Parität $+1$ in zwei Pionen und $|K_2\rangle$ mit $P = -1$ in drei Pionen zerfallen.



Nun ist aber der Zerfall in zwei Pionen viel schneller als der in drei weil die freigesetzte Energie viel größer ist. Deshalb zerfällt $|K_1\rangle$ wesentlich schneller (und damit näher an der Quelle) als $|K_2\rangle$. Hmmm, in der Tat fand man $\tau_1 = 0,895 \cdot 10^{-10}\text{s}$ und $\tau_2 = 5,11 \cdot 10^{-8}\text{s}$. Kaonen entstehen also über die

starke Wechselwirkung (als K^0 oder \bar{K}^0) und zerfallen über die schwache Wechselwirkung als $|K_1\rangle$ oder $|K_2\rangle$. Welches ist denn das "richtige" Teilchen???? Sogar in großen Abständen gibt es Zerfälle in zwei π ! CP ist auch nicht erhalten!

⁷wenn CP -Erhaltung gilt!

CP-Verletzung

Das langlebige Kaon $|K_L\rangle$ ist also nicht ein Eigenzustand von *CP*, sondern enthält einen kleinen Anteil von $|K_1\rangle$,

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\epsilon|^2}} (|K_2\rangle + \epsilon|K_1\rangle).$$

Aber es kommt noch besser. . . Das langlebige Kaon $|K_L\rangle$ zerfällt zu 32% in 3π und zu 41% in die Teilchen

$$\text{a.) } \underbrace{\pi^+}_{P=-1} + \underbrace{e^-}_{P=+1} + \underbrace{\bar{\nu}_e}_{P=-1} \quad \text{oder} \quad \text{b.) } \underbrace{\pi^-}_{P=-1} + \underbrace{e^+}_{P=-1} + \underbrace{\nu_e}_{P=+1} .$$

Die *CP* Transformation würde die Reaktionsprodukte a.) in die von b.) verwandeln (oder umgekehrt), also müssten beide gleich wahrscheinlich sein. Das sind

sie aber nicht, $p(b) = 1.0033 \cdot p(a)$!

**Diese Reaktionen unterscheiden also zwischen Materie und Antimaterie!
Damit kann auch die positive Ladung eindeutig definiert werden als diejenige des Leptons, welches in diesem Zerfall etwas häufiger entsteht.**

Es stellt sich heraus, dass es auch mindestens eine andere Reaktion gibt, die CP verletzt. Der seltene Zerfall $B^0 \longrightarrow K^+ + \pi^-$ ist immerhin 13% häufiger als sein CP -Spiegelbild $\bar{B}^0 \longrightarrow K^- + \pi^+$.

Zeitumkehr- und *CPT*-Invarianz

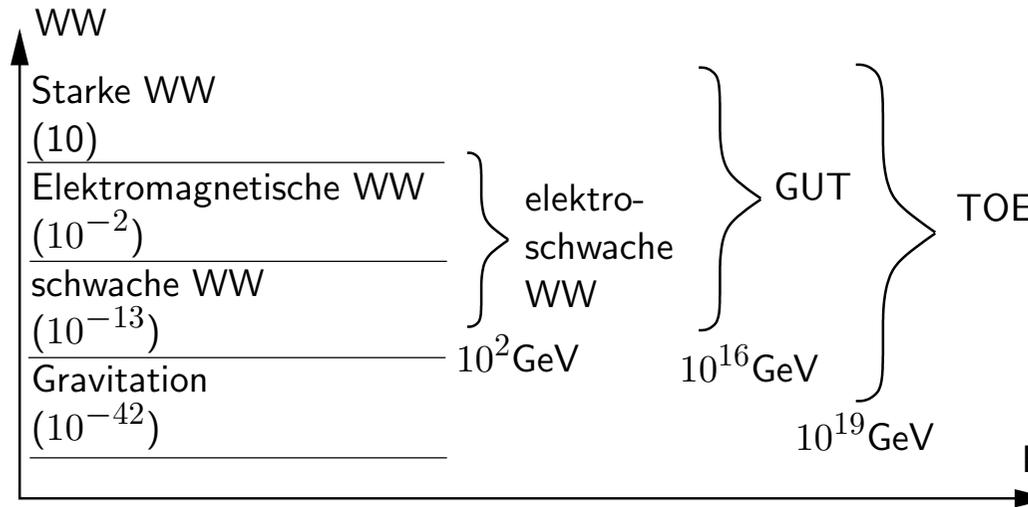
Gemeinhin erwarten wir, dass alle Gesetze der Physik invariant unter Zeitumkehr sind. Das heisst nicht, dass eine Tasse, die vom Tisch gefallen ist, sich plötzlich wieder zusammensetzt und auf den Tisch springt. Es heisst, dass eine Reaktion auch “rückwärts” laufen kann, wenn die Anfangsbedingungen stimmen.

Die Invarianz der Zeitumkehr zu testen ist sehr schwierig, eine Verletzung wurde bisher auch nie beobachtet.

Soweit, so gut — **Aber:** Unter den sehr allgemeinen Annahmen, dass die Quantentheorie gilt, dass die Lorentz-Invarianz gilt und dass Wechselwirkungen durch Felder vermittelt werden, kann man streng mathematisch zeigen, dass *CPT* in jeder Reaktion erhalten sein muss. Das ist eines der stärksten Resultate der Quantenfeldtheorie. Es gibt keine QFT ohne *CPT*-Invarianz! Experimentell ist *CPT* auf einen Teil in 10^{18} verifiziert.

Weil *CP* verletzt ist, muss also auch *T* verletzt sein, was u. U. die Richtung der Zeit definieren könnte.

Grand Unified Theories



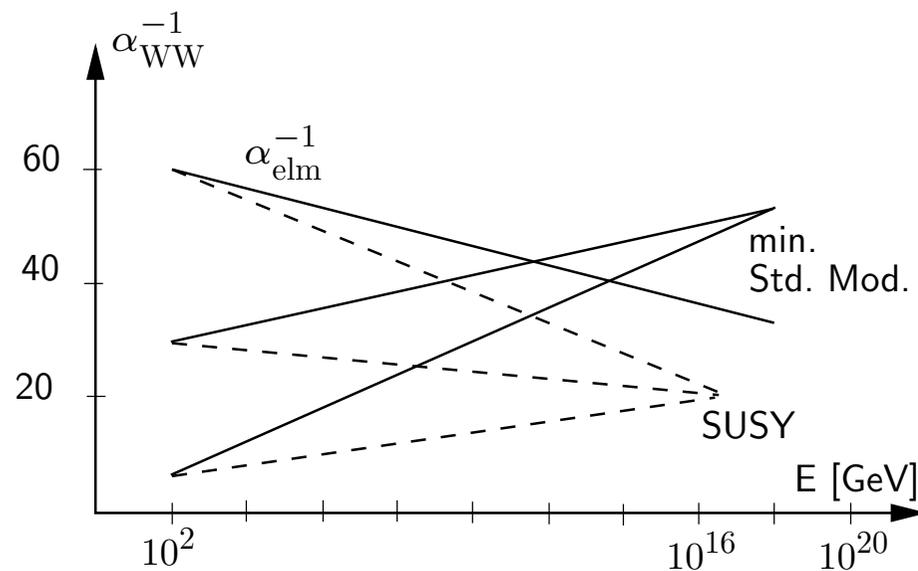
Die Abbildung links zeigt das Konzept der Vereinheitlichung der Theorien. In Klammern unterhalb der WW ist deren jeweilige Stärke⁸ angegeben. Sie nimmt von unten nach oben zu. Die x -Achse gibt eine Energieskala an. Je höher die Energie, desto kleiner ist die räumliche Skala, die mit einem Teilchen

dieser Energie untersucht werden kann.

Die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung können in der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung als eine WW aufgefasst werden. Dass wir

⁸Diese ist überhaupt nicht quantitativ zu verstehen. Die "Stärke" einer WW hängt ja z.B. vom Abstand und der Art der Quelle ab.

sie im normalen Leben als separate WW erleben, ist in diesem Bild eine Folge davon, dass deren Wechselwirkungs-Bosonen⁹ so enorm verschiedene Massen aufweisen. Die Idee ist dann, dass bei Energien, die groß sind im Vergleich zu den Energien der WW-Bosonen, die Kräfte ununterscheidbar werden. Dazu muss die Masse des Z-Bosons von $91.19 \text{ GeV}/c^2$ überwunden werden.



Der nächste Schritt wäre dann die Vereinheitlichung der starken mit der elektroschwachen WW. Weil die Kopplungskonstante der starken WW mit zunehmender Energie (abnehmendem Abstand) abnimmt, die der schwachen WW ebenso, und die der elektromagnetischen zunimmt, darf man hoffen, dass sie bei einer bestimmten Energie denselben Wert

⁹Das Photon für die elektromagnetische WW und die W^\pm - und Z-Bosonen für die schwache WW.

erreichen. Dann gäbe es nur noch eine Kopplungskonstante! Dazu sind nach Grafik links aber enorm viel höhere Energien erforderlich, als heute erreichbar sind. Die durchgezogenen Linien zeigen die Erwartungen für das sog. **minimale Standardmodell**, gestrichelte Linien für **supersymmetrische Theorien**.

Eine Konsequenz der GUTs ist, dass das Proton nicht stabil ist. Weitere Voraussetzungen betreffen die Symmetrie zwischen Quarks und Leptonen, den Ursprung der Ladungsquantisierung, etc. Diese Theorien verwenden tiefliegende Symmetrien und komplizierte gruppentheoretische Konzepte der Mathematik.