

Statistische Thermodynamik/Mechanik

Avogadro: 1 mol entspricht ungefähr 6×10^{23} Teilchen.

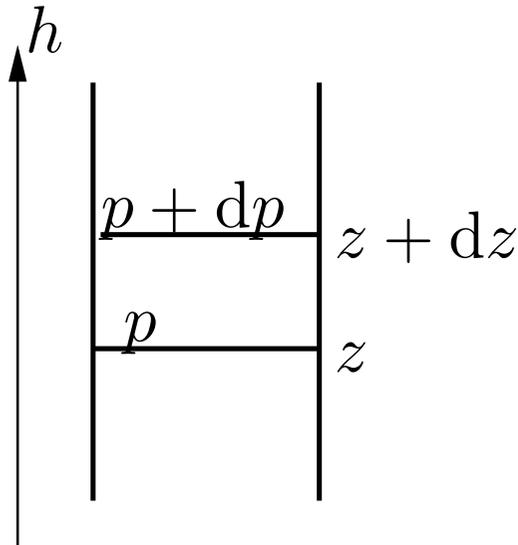
Jedes Teilchen i bewegt sich entsprechend den Gleichungen der klassischen Mechanik:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_J \vec{F}_{Ji} + \vec{F}_i.$$

Dazu kommt eine Erhaltungsgleichung für die Energie und drei für den Impuls des Gesamtsystems, was angesichts der $3 \times 6 \times 10^{23}$ Gleichungen kaum hilfreich ist. Offensichtlich muss ein anderer Zugang zu einem solchen System gefunden werden!

—→ statistische Mechanik, statistische Thermodynamik

Ideales Gas im externen (Gravitations-) Feld



Wir untersuchen nun das Verhalten eines isothermen¹ Gases in einem externen Gravitationsfeld. Im Gleichgewicht herrscht eine Druckdifferenz $dp = -ndU$, wo dU die Energie sei, die ein Teilchen haben muss, um eine Höhendifferenz dz zu überwinden². Für ein ideales Gas gilt $p \cdot V = NkT$, also $p = nkT$, wo $n = N/V$ die Teilchendichte ist. Deshalb ist $dp = dnkT + nk dT = dnkT$, wegen Isothermie. Also gilt

$$-ndU = kTdn, \quad \text{bzw.} \quad \frac{dn}{n} = -\frac{dU}{kT}.$$

¹Das ist eine gewagte Annahme!

²Druck ist eine Energiedichte - versuchen Sie die Dimensionsanalyse!

Dies kann man leicht integrieren und erhält

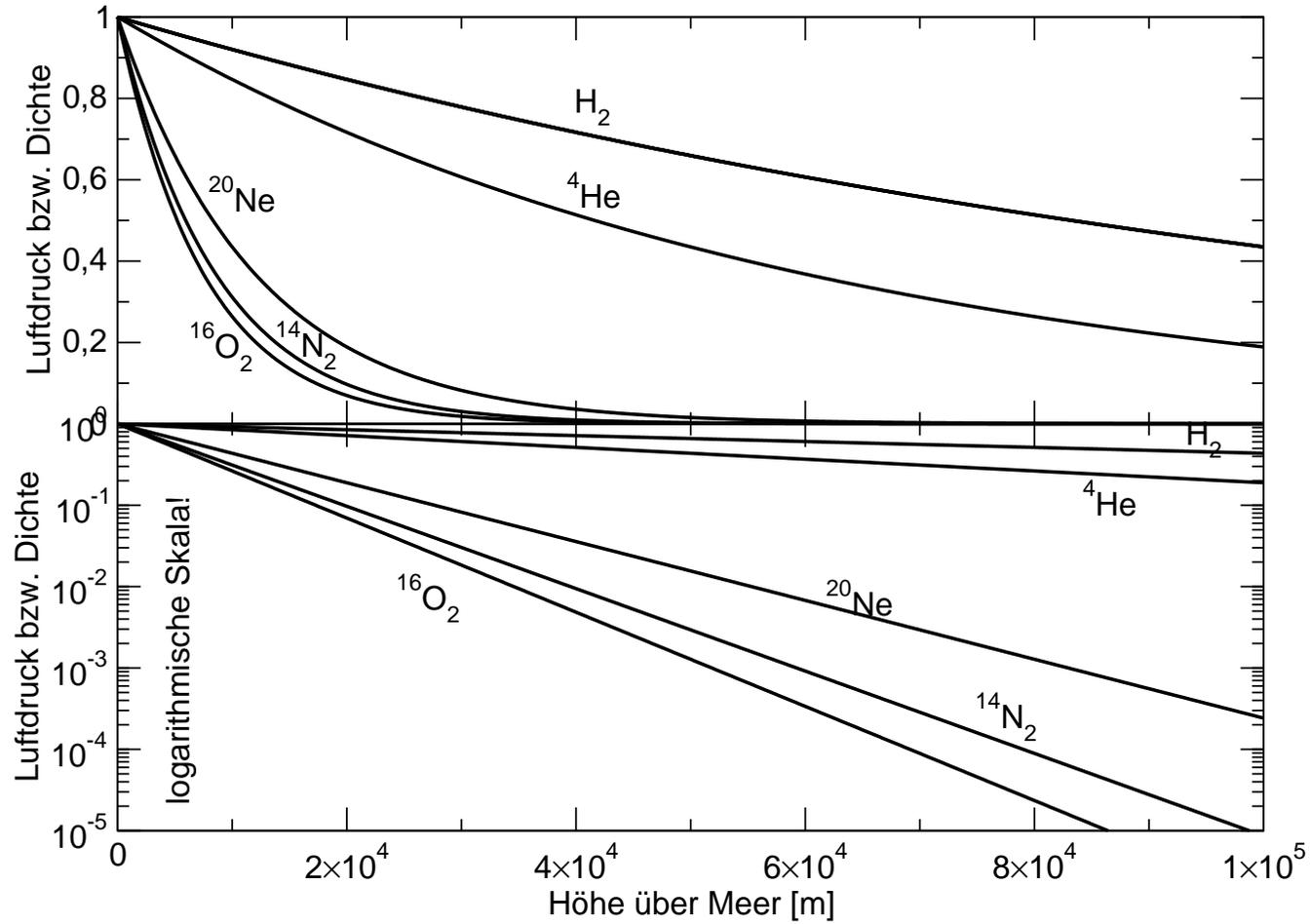
$$\ln n = -\frac{U}{kT} \quad \text{also} \quad n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}.$$

Diese Verteilung heißt **Boltzmannverteilung** und kommt in der Natur vielfach vor. Weil ja $p = nkT$ gilt, gilt auch

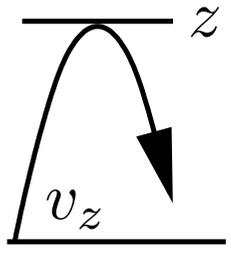
$$p = p_0 e^{-U/kT} \quad \text{und wegen} \quad U = mgh \quad \text{gilt auch} \quad \underline{p = p_0 e^{-(mgh)/(kT)}}.$$

Diese Formel heißt **barometrische Höhenformel** und gibt in guter Näherung den Druckverlauf in der Atmosphäre an. Wir vernachlässigen dabei, dass die Atmosphäre nicht isotherm ist. Die Temperatur nimmt mit zunehmender Höhe ab (um ca. 0.6 Grad pro 100 m). Weil die Masse m des Gases im Exponenten vorkommt, erwarten wir für verschiedene Atome/Moleküle verschiedene **Skalenhöhen**, die aber durch großskalige Konvektion vermischt werden.

Barometrische Höhenformel



Die Maxwell-Boltzmann Verteilung



Wir können aus der barometrischen Höhenformel eine grundlegende und sehr allgemeine “Verteilung” herleiten, die sog. **Maxwell-Boltzmann Verteilung**. Dazu fragen wir uns welcher Bruchteil aller Teilchen in der Atmosphäre Geschwindigkeiten im Bereich $v_z, v_z + dv_z$ hat. Die Antwort ist leichter aufgeschrieben als verstanden: $f(v_z)dv_z$.

Dabei heißt $f(v_z)$ Geschwindigkeits**verteilungsfunktion**. Die Anzahl Teilchen ergibt sich aus $n f(v_z)dv_z$.

Um diese herzuleiten fragen wir uns zunächst, wieviele Teilchen eine genügend große kinetische Energie haben, um genau die Höhe z zu erreichen. Mit $(1/2)mv^2 = mgz$ ist die Zahl der Teilchen, die genau z erreichen gerade $dn_+ = n(z=0)f(v_z)dv_z$. Nun fragen wir uns, was passiert, wenn wir diese Teilchen in Ruhe aus der Höhe z fallen lassen. Sie erreichen dann $z=0$ mit einer Geschwindigkeit v_z und ihre Anzahl ist $dn_- = n(z)f(v_z=0)dv_z$. Im Gleichgewicht müssen gleich viele Teilchen nach unten fallen, wie nach oben fliegen.

Deshalb muss gelten, dass

$$dn_- = dn_+, \quad \text{also } n(z)f(v=0) = n(0)f(v_z).$$

Dabei kennen wir aber $n(z)$ bereits aus der barometrischen Höhenformel. Folglich gilt

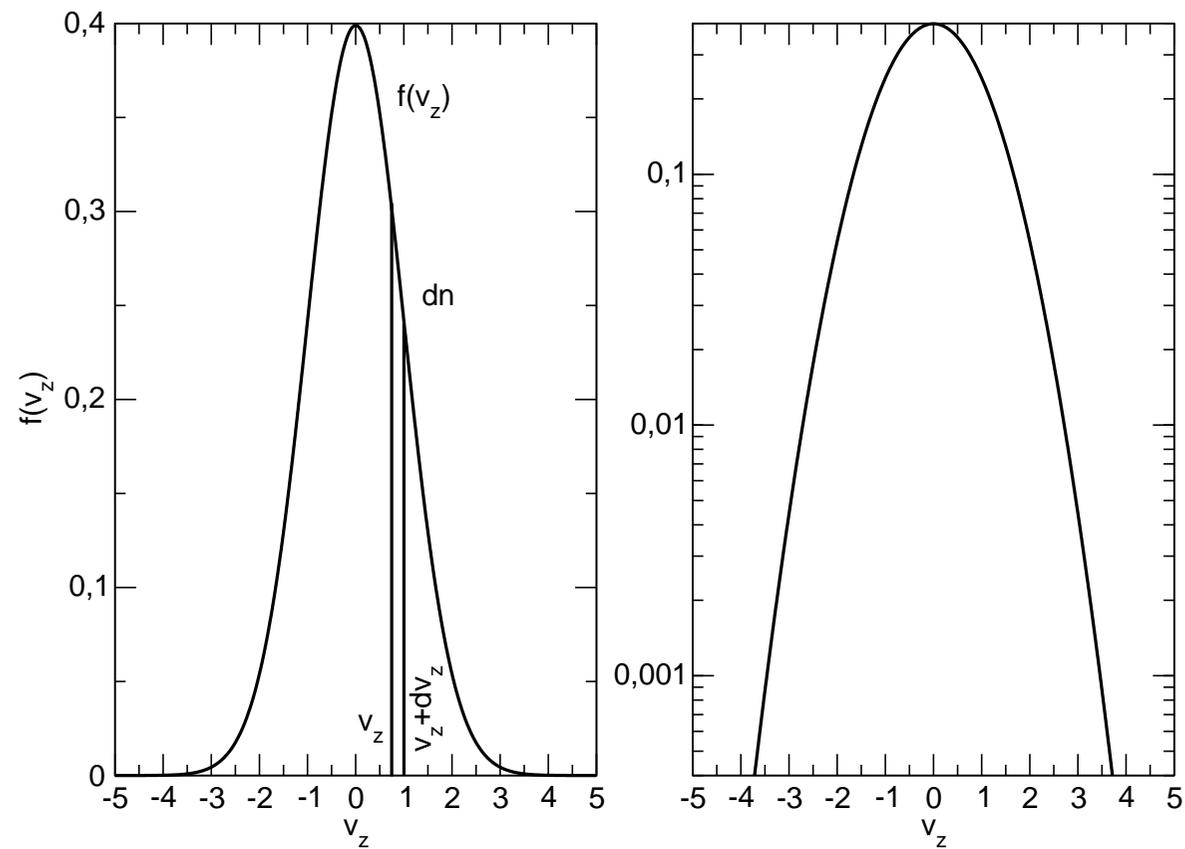
$$f(v_z) = f(v_z=0) \frac{n(z)}{n(0)} = f(v_z=0) e^{-mgz/kT}.$$

Folglich lautet die (eindimensionale) **Maxwell-Boltzmann-Verteilungsfunktion**

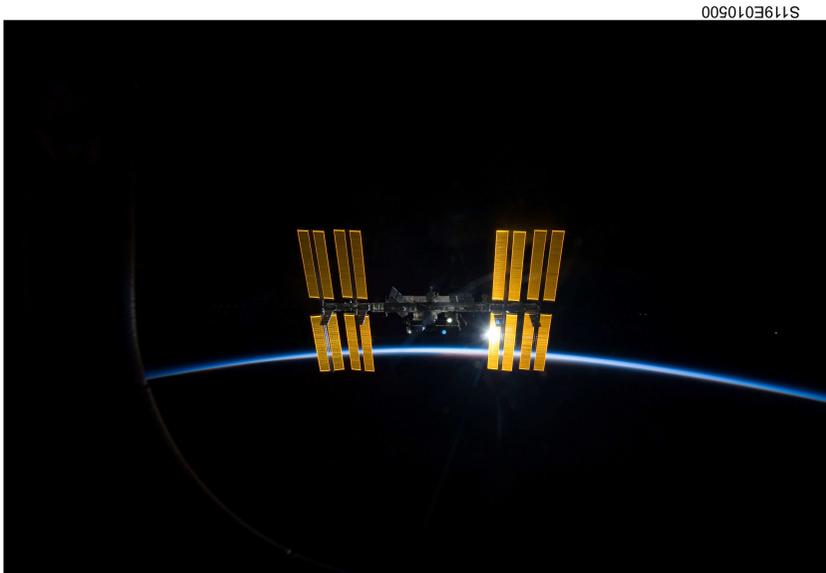
$$f(v_z) = C e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.$$

Formal ist das eine Normal- oder Gaußverteilung der Geschwindigkeit mit einer Breite (Standardabweichung) von $\sigma = \sqrt{kT}$.

Die eindimensionale Maxwell-Boltzmann-Verteilung



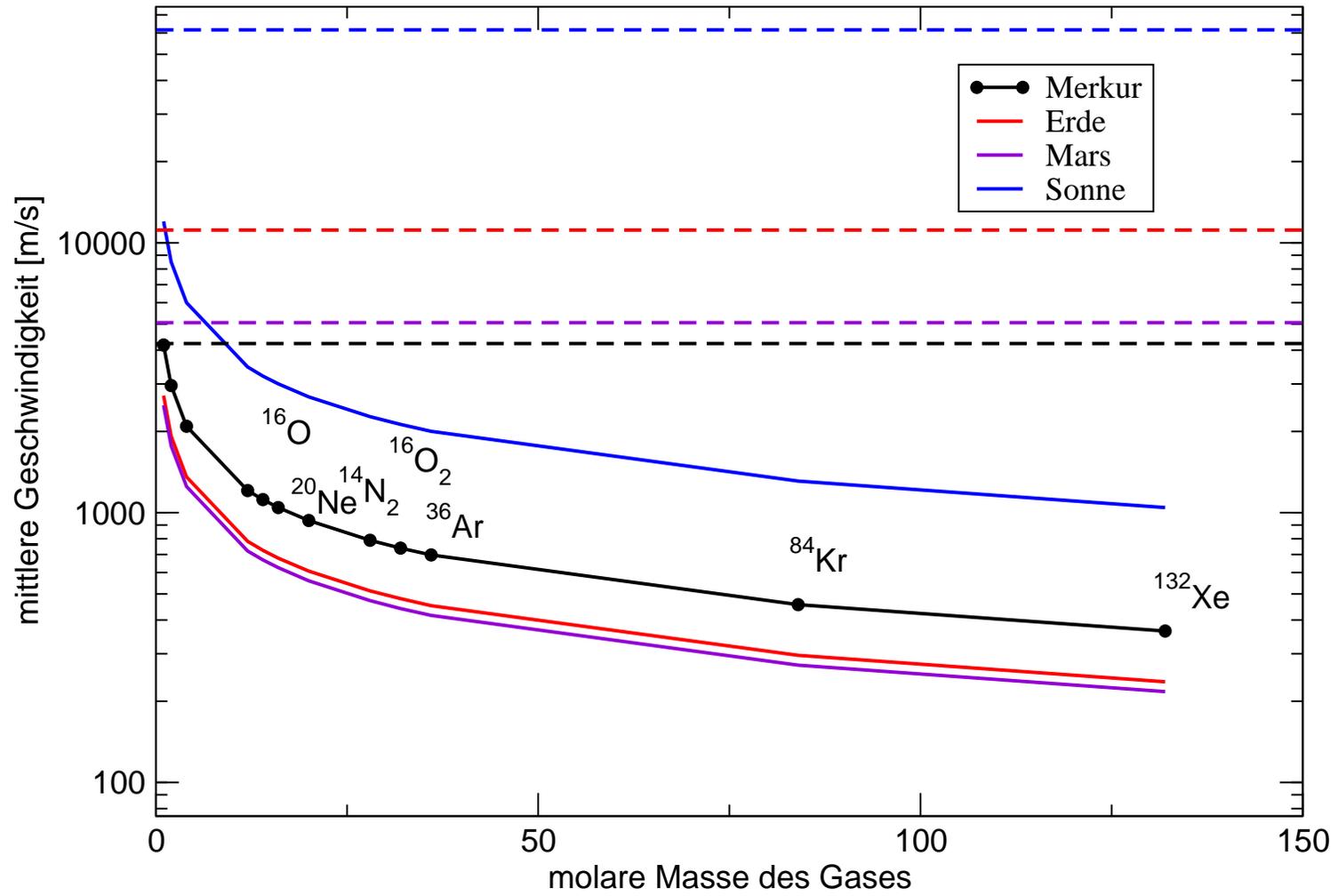
Bedeutung für die Erde, Mars, und andere Himmelskörper



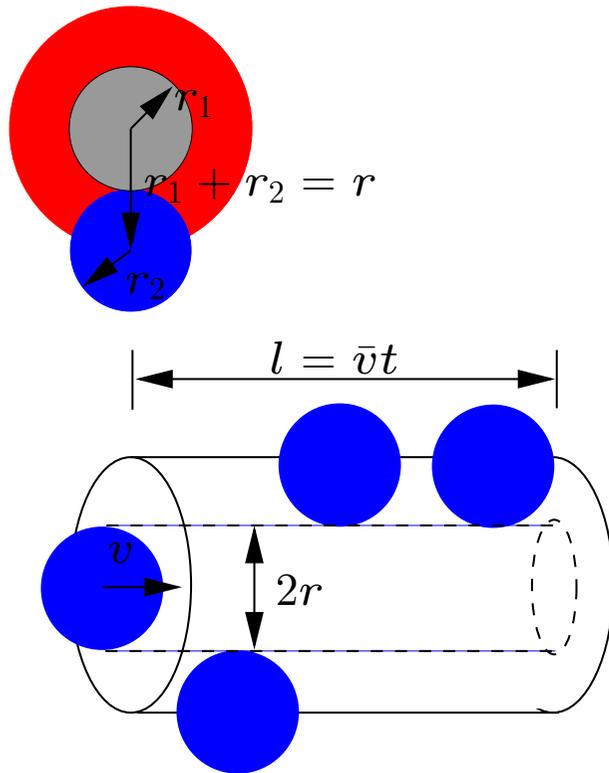
Damit ein Molekül das Schwerefeld eines Himmelskörpers nicht verlässt, muss seine Geschwindigkeit kleiner als die Fluchtgeschwindigkeit sein. Damit auch kein Molekül aus dem “Schwanz” der Verteilung den Planeten verlässt, dividieren wir diese noch durch 10.

$$\frac{3kT[\text{K}]}{m} \approx 25'000 \frac{T}{m[\text{amu}]} \leq \frac{2GM}{100R}$$

Wir können dies z. B. für die Erde nach der minimalen Masse m auflösen, die ein Molekül haben muss, damit es die Erde nicht verlässt. Mit $T \approx 295$ K erhalten wir $m \approx 10^{-26}$ kg, also das Sechsfache der Protonenmasse. Damit hat die Erde ihr “natürliches” Helium verloren!



Mittlere Zeit zwischen Stößen



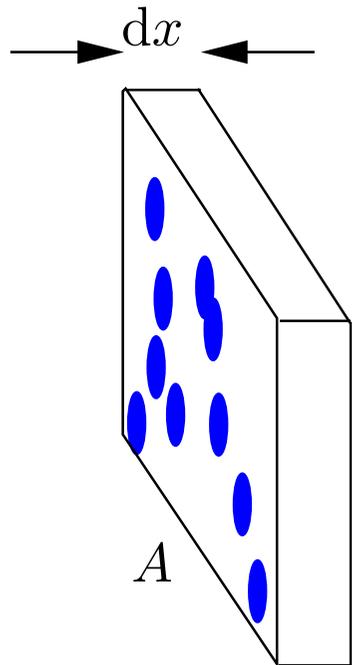
Ein Teilchen fliege mit einer Geschwindigkeit \bar{v} durch ein Gas der Dichte n mit Teilchenradien r . Dann ist der sog. Wirkungsquerschnitt für die Teilchen im Gas gerade

$$\sigma = 4\pi r^2.$$

In einer Zeit t erleide das Teilchen N Stöße. Dann ist die mittlere Zeit zwischen Stößen gerade $\tau = t/N$. Die Anzahl Teilchen N , die nach einer Zeit t **keinen** Stoß erfahren haben, nimmt mit der Zeit exponentiell ab,

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}.$$

Mittlere freie Weglänge



Prozesse wie Streuung oder Absorption werden durch eine mittlere freie Weglänge charakterisiert. Im Volumenelement $V = Adx$ befinden sich nV Teilchen. Vom sich relativ dazu bewegenden Teilchen aus gesehen, ist der bedeckte Anteil der Fläche A gerade

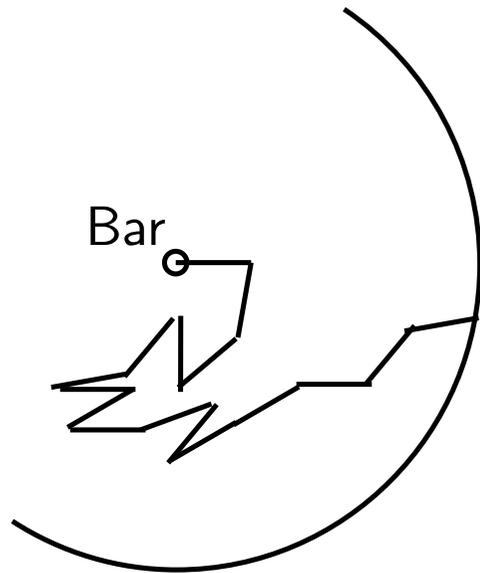
$$\frac{nV\sigma}{A} = \frac{nAdx\sigma}{A} = ndx\sigma.$$

Nach einer Schichtdicke dx haben also $dN = -n\sigma N$ Teilchen einen Stoß erlitten. Nach einer Strecke x bleiben noch

$$N(x) = N_0 e^{-n\sigma x} = N_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

ungestrene Teilchen übrig. Die Abkürzung $\lambda = 1/n\sigma$ heißt **mittlere freie Weglänge**.

Diffusion - Random Walk - der betrunkene Matrose



Ein betrunkenener Matrose wird aus der Bar geworfen und versucht zur nächsten zu gelangen. Er kann seine Schritte nur noch in eine zufällige Richtung lenken. Wie weit ist er nach 16 Schritten von der ursprünglichen Bar entfernt?

Nach N Schritten ist er am Ort $\vec{r}_N = \vec{r}_{N-1} + \vec{l}$. Um abzuschätzen, wie weit er gekommen ist, bestimmen wir r^2 .

$$\vec{r}_N \cdot \vec{r}_N = \vec{r}_{N-1} \cdot \vec{r}_{N-1} + 2\vec{r}_{N-1} \cdot \vec{l} + \vec{l} \cdot \vec{l}.$$

Weil die Schritte immer in eine zufällige Richtung zeigen, verschwindet im Mittel (über viele Matrosen und viele Schritte) der Kreuzterm, $\vec{r}_{N-1} \cdot \vec{l}$, also gilt $\vec{r}_N^2 = \vec{r}_{N-1}^2 + l^2$.

Bewegt sich der Matrose mit konstanter Geschwindigkeit ($|v|$, beliebige Richtung),

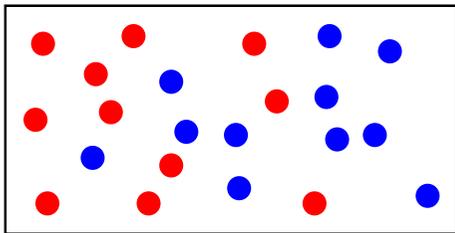
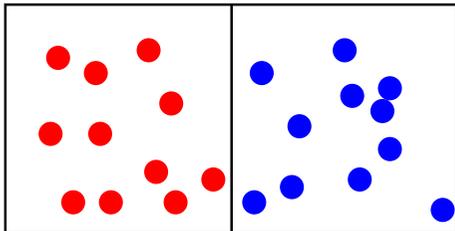
so ist N proportional zur Zeit t , $N = \alpha t$. Durch Induktion folgt somit

$$\vec{r}_N^2 = Nl^2 = \alpha t l^2, \quad \text{womit offensichtlich} \quad |\vec{r}_N| \propto \sqrt{t}.$$

Nach 16 Schritten ist der Matrose im Mittel (z. B. über viele Barbesuche) erst 4 Schritte von der ersten Bar entfernt!

Man nennt eine solche Bewegung **Diffusion**. Sie spielt in sehr vielen Bereichen der Natur eine wichtige Rolle: Wärmetransport, Verbreitung von Nährstoffen (oder Schadstoffen) in biologischen Systemen, Ausbreitung von Seuchen, Ausbreitung von Rauch, Vermischung von Gasen und Flüssigkeiten, . . . können mit Diffusion oder ähnlichen Ansätzen beschrieben werden.

Transportprozesse: Bsp. Diffusion, Wärmeleitung

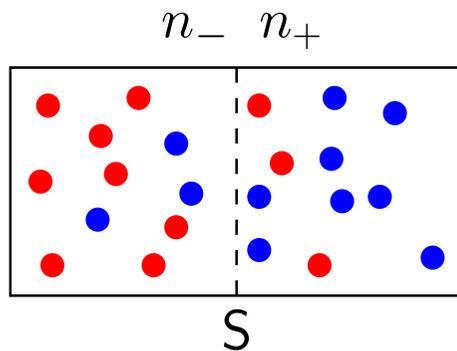


Dieser Prozess des random walk ist in der Brownschen Bewegung sichtbar. In anderen sog. **Transportprozessen** ist dies nicht so klar sichtbar, dennoch spielt genau dieser Prozess eine wichtige Rolle, wie wir später sehen werden.

Betrachten wir einen Behälter mit zwei verschiedenen Gasen, die durch eine Wand getrennt seien, aber denselben Druck und dieselbe Temperatur aufweisen sollen. Nun wird die Wand sorgfältig entfernt, so dass keine Turbulenz entsteht.

Die Gase vermischen sich. Jedes Molekül eines Gases bewegt sich zwischen zwei Stößen geradlinig, bei jedem Stoß wird die neue Richtung völlig unabhängig von der vorherigen sein. Ja, wir können sogar über mehrere Millionen Stöße mitteln, dann ist diese Annahme sicher gerechtfertigt.

Diffusion



Denken wir uns nun an einer Stelle im Gefäß eine imaginäre Ebene der Fläche S , an der wir alle Teilchen zählen, die sich innerhalb einer Zeit Δt von links nach rechts und umgekehrt bewegen. Von links nach rechts bewegen sich $n_- Sv\Delta t$, von rechts nach links $n_+ Sv\Delta t$, wo n_- und n_+ die Teilchenzahldichte “gerade” links und rechts von der Ebene seien. Der Nettofluss J_x durch S in x -Richtung ist also

$$J_x = \frac{n_- Sv\Delta t - n_+ Sv\Delta t}{S \Delta t} = (n_- - n_+) v.$$

Weil die Orte, an denen n_- und n_+ bestimmt werden, sehr nahe aneinander liegen (z. B. eine mittlere freie Weglänge λ voneinander entfernt um S), schreiben

wir

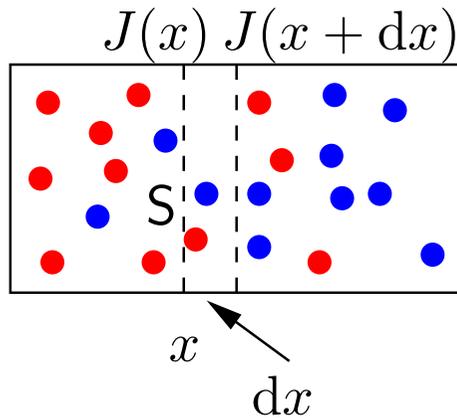
$$(n_- - n_+) \approx -\frac{dn}{dx} \Delta x = -\frac{dn}{dx} \lambda \quad \text{und damit} \quad J_x = -\lambda v \frac{dn}{dx}.$$

Berücksichtigen wir noch, dass ja nicht alle Teilchen von links nach rechts oder umgekehrt fliegen, sondern wild durcheinander, so findet man (nach etwas längerer Rechnung) das sog. **Ficksche Gesetz**

$$J_x = -\frac{1}{3} \lambda v \frac{dn}{dx} = -D \frac{dn}{dx}.$$

$D = \lambda v/3$ heißt **Diffusionskonstante** und hat die gewöhnungsbedürftige Einheit $[D] = \text{m}^2\text{s}^{-1}$.

Die Diffusionsgleichung



Wie schnell ändert sich nun die Teilchenzahldichte der verschiedenen Gase an einem Ort x ? Betrachten wir wieder den eindimensionalen Fluss J_x . Die Veränderung der Anzahl Teilchen im infinitesimalen Volumen Sdx beträgt $Sdx \frac{\partial n}{\partial t}$. Diese Änderung muss durch eine Änderung des Flusses hervorgerufen werden, die sich durch das Gefäß fortpflanzt, und beträgt $S (J_x(x) - J_x(x + dx))$, also

$$Sdx \frac{\partial n}{\partial t} = S (J_x(x) - J_x(x + dx)) \implies \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x}.$$

Wir setzen nun gemäß dem Fickschen Gesetz $J_x = -D \partial n / \partial x$ ein

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial n}{\partial x} \right).$$

Ist D eine vom Ort unabhängige Größe (z. B. in einem homogenen Gas), so

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},$$

die eindimensionale **Diffusionsgleichung**. Die dreidimensionale Diffusionsgleichung kann nun einfach hingeschrieben werden,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right).$$

Sie gilt in dieser Form nur für eine orts- und richtungsunabhängige Diffusionskonstante D .

Wärmeleitung

Betrachten wir statt Stoffmengen Wärmemengen E , so lässt sich auch für diese eine Diffusionsgleichung aufstellen. Die transportierte Wärmemenge E können wir auf die damit verbundenen Moleküle verteilen, dann erhält jedes Molekül eine Menge $\bar{E} = C_p T / N_A$, wo N_A die Avogadro-Zahl ist.

Der Wärmefluss von links nach rechts einer gedachten Fläche S ist dann $q_x = (T_- - T_+) n v C_p / N_A$. Wir verfahren wie bei der Diffusionsgleichung, $T_- - T_+ \approx -\lambda dT/dx$ und erhalten so den Wärmefluss

$$q_x = -\kappa \frac{dT}{dx} \quad \text{wo} \quad \kappa = \frac{1}{3} \frac{n v C_p}{N_A} \quad \text{die } \mathbf{W\ddot{a}rmeleitf\ddot{a}higkeit} \text{ ist.}$$

Interessanterweise leiten Metalle Wärme besser als z. B. Flüssigkeiten. Dies geschieht wegen der sehr hohen Mobilität der Elektronen im Metall. Verschiedene Stoffe haben unterschiedliche Wärmeleitfähigkeiten.

Stoff	Wärmeleitfähigkeit [W / m K]	Temperaturleitfähigkeit [$10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$]
Wasser	0.569 (bei 0°C)	0.14 (bei 4°C)
Wasser	0.604 (bei 20°C)	0.144
Wasser	0.632 (bei 40°C)	0.153
Wasser	0.654 (bei 60°C)	0.159
Wasser	0.670 (bei 80°C)	0.164
Wasser	0.681 (bei 100°C)	0.169
Kupfer	399	117
Aluminium	237	98,8
Stahl	~ 50	~ 14
Beton	2.1	0.54
Sandboden (trocken)	0.27	0.20
Sandboden (feucht)	0.58	0.33
Luft	0.026	20

Nun wollen wir untersuchen, wie sich die Wärme in einem Stab mit Querschnittsfläche S ausbreitet und machen die vereinfachende Annahme, dass $C_p = \text{konst.}$ für alle T . Der Energieinhalt eines kleinen Stückes Stab mit Masse dm ist dann $dU = c_p T dm = c_p T S \rho dx$, wo ρ die (Massen)dichte ist. Die innere Energie ändert sich also mit der Zeit gemäß

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c_p \rho S dx \frac{\partial T}{\partial t} = S (q(x) - q(x + dx)),$$

bzw.

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Setzen wir nun wieder q ein,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c_p \rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

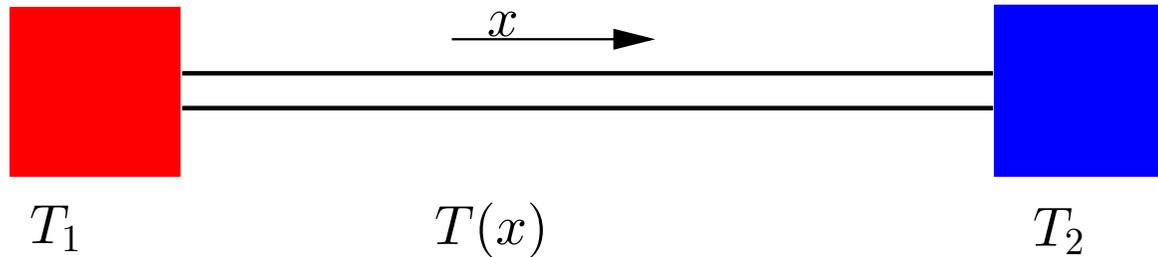
Nehmen wir an, die Wärmeleitfähigkeit sei konstant, so können wir κ vor die partielle Ableitung ziehen. Wir definieren noch die Temperaturleitfähigkeit χ

$$\chi \doteq \frac{\kappa}{c_p \rho} = \frac{1 n v C_p \lambda}{3 N_A c_p \rho} = \frac{1 n v M \lambda}{3 N_A \rho},$$

wo M die Molmasse ist. Die **Wärmeleitungsgleichung** lautet also in einer und in drei Dimensionen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Anwendung: stationäre Wärmeleitung



Im stationären, also zeitlich nicht veränderlichen Fall darf sich die Temperatur nicht mit der Zeit verändern. Folglich muss gelten $\partial T / \partial t = 0$. Dann wird aber die hier betrachtete

eindimensionale Wärmeleitungsgleichung besonders einfach

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

und kann einfach gelöst werden. Dazu integrieren wir zweimal (zweimal die

Umkehrfunktion" der Ableitung),

$$T(x) = \int \left(\int \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) dx = \int \left(\frac{dT}{dx} + B \right) dx = A + Bx.$$

Die Integrationskonstanten A und B werden durch die Randbedingungen $T(x = 0) = T_1$ und $T(x = L) = T_2$ bestimmt:

$$T(x = 0) = T_1 = A; \quad T(x = L) = T_2 = A + B \cdot L, \quad \text{also } A = T_1 \text{ und } B = (T_2 - T_1)/L.$$

Damit haben wir die Lösung für die stationäre Wärmeleitungsgleichung bereits gefunden:

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x.$$

Nach einer kurzen "Einschwingzeit" stellt sich also ein **lineares** Temperaturprofil ein.

Wärmeleitung bei dichten Gasen

Betrachten wir ein stark verdichtetes Gas, so tritt ein interessantes Phänomen auf. In diesem Fall ist die mittlere freie Weglänge λ wesentlich kleiner als die Ausmessung des Systems, Wärme wird also nur durch Stöße unter Molekülen ausgetauscht. Der Wärmetransport ist natürlich immer noch proportional zum Temperaturgradienten:

$$\frac{dW}{dt} = \Lambda \frac{dT}{dx}, \quad \text{wo} \quad \Lambda = \frac{1}{12} f \cdot n \cdot k \cdot \bar{v} \lambda = \frac{fk\bar{v}}{24\sqrt{2}\pi r^2}$$

die Wärmeleitfähigkeit ist. λ ist hängt nur ab von Größen, die ein einzelnes Molekül beschreiben. λ ist also unabhängig von der Dichte oder dem Druck des Gases! Also darf die Wärmeleitfähigkeit nicht von Dichte und Druck abhängen!

Und was hat Random Walk damit zu tun?

Wie schnell breitet sich die Wärme nun aus, wie schnell diffundiert ein Gas im andern? Das hat sicher mit Materialeigenschaften zu tun, wie auch mit der Größe des Systems, nicht aber mit der Konzentration oder Temperatur. Die Umverteilung von Teilchen passiert nicht schneller, nur weil es mehr von einer Sorte hat. Die Materialeigenschaften sind in der Diffusionskonstante D verpackt. Die Größe des Systems sei L . Aus der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad \left[\frac{\partial n}{\partial t} \right] = [D] \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right]$$

sehen wir, dass D die Einheiten Länge im Quadrat durch Zeit hat (m^2s^{-1}). Es gibt nur eine Möglichkeit, aus D und L eine Größe der Einheit Zeit

zusammenzustellen, nämlich

$$\tau \approx \frac{L^2}{D} \text{ bzw. für die Wärmeleitung } \tau \approx \frac{L^2}{\chi}.$$

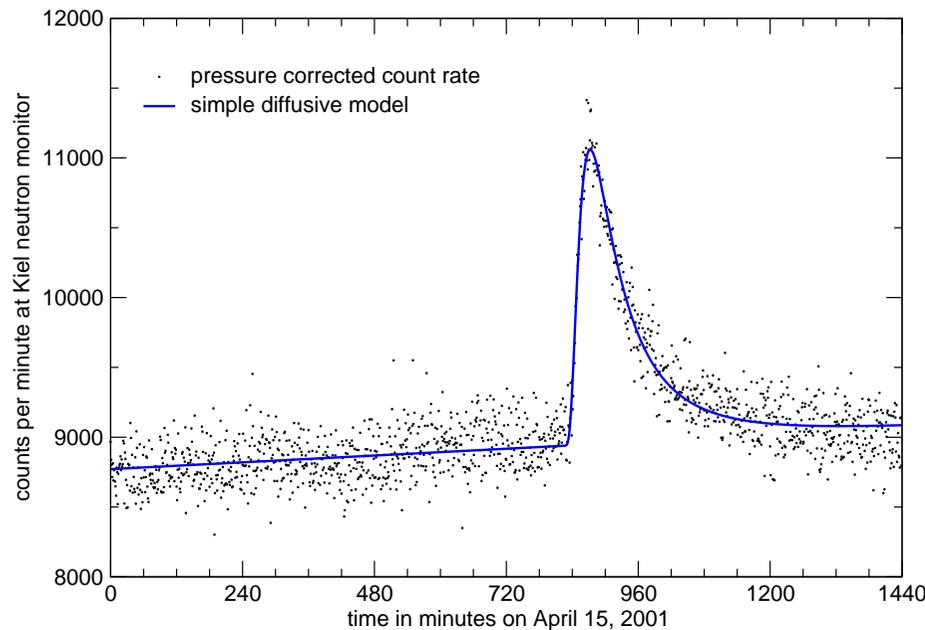
Umgekehrt muss auch für die Distanz, die zurückgelegt wird, gelten

$$L \approx \sqrt{Dt} \text{ bzw. für die Wärmeleitung } L \approx \sqrt{\chi t},$$

wie wir dies im random walk beobachtet hatten.

(P.S. Wir haben hier eine sehr mächtige Anwendung der Dimensionsanalyse verwendet. Allein aus der Dimensionsanalyse folgte (mit Kenntnis der Dimensionen (Einheiten), wie Diffusion sich ausbreiten muss!)

Allgemeine Lösung der Diffusionsgleichung

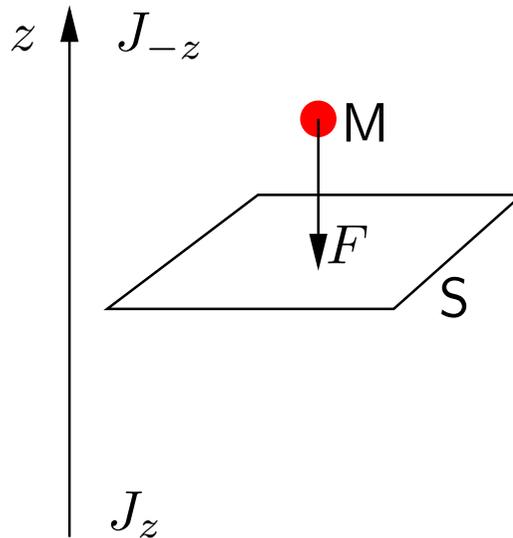


Die allgemeine Lösung der eindimensionalen zeitabhängigen Diffusionsgleichung lautet

$$n(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

und beschreibt sehr viel, u. a. die Ausbreitung von hochenergetischen Teilchen von der Sonne zur Erde nach einem solaren Ereignis, wie das Beispiel links zeigt. Die Daten stammen übrigens vom Kieler Neutronenmonitor (am Otto-Hahn-Platz).

Anwendung: Bestimmung der Avogadro-Zahl N_A



Die bisher angestellten Überlegungen zur Diffusion sind gar nicht so trivial, wie sie erscheinen mögen. Wir können damit z. B. die Avogadro-Zahl bestimmen! Dazu machen wir folgendes (Gedanken-) Experiment.

In einer Flüssigkeit seien Moleküle eines Stoffes suspendiert. Auf ein solches Molekül M wirke eine Kraft F , z. B. die Gravitationskraft nach unten. Die Kraft auf ein spezifisches Volumen $V = m/\rho$ der Flüssigkeit ist dann folglich $N_A F \rho / m$. Weil die Kraft nach unten zeigt, befinden sich dort mehr Moleküle als oben und es stellt sich ein

Druckgradient $\partial p / \partial z = \frac{RT}{m} \frac{\partial \rho}{\partial z} = N_A F \rho / m$ ein und die schwereren Moleküle beginnen sich entsprechend zu bewegen. Auf ein suspendiertes Molekül wirkt aber nach Stokes auch die Reibungskraft $6\pi\eta r v$. Im Kräftegleichgewicht heben sich die beiden Kräfte auf und es stellt sich eine konstante Fließgeschwindigkeit

v nach unten ein. Also strömt ein Fluss von

$$J_{-z} = \frac{F\rho N_A}{m} \frac{1}{6\pi\eta r}$$

nach unten durch S . Dadurch entsteht aber ein *Dichtegradient* (Konzentrationsunterschied pro Meter), der wiederum durch einen Fluss $J_z = DN_A/m \frac{\partial\rho}{\partial z}$ nach oben ausgeglichen wird. Im Gleichgewicht gilt $|J_{-z}| = |J_z|$. Der Dichtegradient $\frac{\partial\rho}{\partial z}$ ist nach den Überlegungen am Anfang gleich $F\rho N_A/m$. Mit $|J_{-z}| = |J_z|$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{F\rho N_A}{6\pi\eta r m} &= D \frac{N_A}{m} \frac{\partial\rho}{\partial z} \\ &= D \frac{N_A}{m} \frac{m}{RT} \frac{F\rho N_A}{m} \\ D &= \frac{RT}{N_A} \frac{1}{6\pi\eta r}. \end{aligned}$$

Nun können wir aber die Diffusion messen:

$$\bar{x}^2(t) = \frac{1}{n} \int dx x^2 n(x, t) = 2Dt = \frac{RT}{N_A} \frac{t}{3\pi\eta r}.$$

Dabei sind R , T , \bar{x}^2 , η und r bekannt, weil messbar, und folglich kann aus dieser Messung die Avogadro-Zahl bestimmt werden. Dies ist der Inhalt von Einsteins Doktorarbeit.

Nur für Liebhaber: Weihnachten beim Regenwurm

Wann spürt der Regenwurm die Weihnachtszeit? Oder, etwas physikalischer ausgedrückt, wie verläuft der saisonal bedingte Temperaturverlauf in einer bestimmten Tiefe unter der Erde? Als Randbedingung wollen wir die Temperatur an der Erdoberfläche ansetzen als $T(x = 0, t) = T_0 + \Delta T_0 \cos(\omega t)$. Weil T_0 konstant ist, können wir die Temperatur umschreiben $\Delta T(x, t) = T(x, t) - T_0$ und die Rechnung nur für $\Delta T(x, t)$ durchführen. Wir machen einen komplexen Ansatz ϕ für die Lösung, die $\Delta T(x, t)$ soll dann der Realteil von ϕ sein, $\Re\phi$. Dabei separieren wir ϕ in einen rein zeitabhängigen und einen rein ortsabhängigen Teil,

$$\phi = f(x)e^{i\omega t}.$$

Einsetzen in die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung liefert

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{i\omega}{\chi} f = 0.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ist leicht gelöst. Wir setzen an

$$\begin{aligned} f(x) &= Ae^{\sqrt{\frac{i\omega}{\chi}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{i\omega}{\chi}}x} \\ &= Ae^{\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}(1+i)x} + Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}(1+i)x}. \end{aligned}$$

Weil die Temperaturunterschiede mit zunehmender Tiefe im Boden immer kleiner werden, muss $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0$ gelten, und folglich $A = 0$. Also haben wir die Lösung

$$\phi(x, t) = Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x} e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x\right)}.$$

Der Realteil $\Re\phi$ beschreibt nach Annahme bzw. Konstruktion die Temperatur-

schwankung ΔT

$$\Delta T(x, t) = \Re\phi(x, t) = \Delta T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x\right).$$

Die saisonale (und auch die tägliche) Temperaturschwankung pflanzt sich also wie eine gedämpfte Welle in den Boden fort. Die Amplitude ist in einer Tiefe $\sqrt{2\chi/\omega}$ auf $1/e$ gedämpft, die Geschwindigkeit der Welle ist $\sqrt{2\chi\omega}$. Die Wärmediffusionskonstante für Boden variiert enorm (z. B. aufgrund des Wassergehalts). Wir verwenden einen typischen Wert von $\chi \approx 0.012 \text{ m}^2/\text{Tag}$. Für diesen Wert von χ ergibt sich in einer Tiefe von 3.7 Metern eine Phasenverschiebung um ein halbes Jahr. Der Regenwurm hat's um Weihnachten am wärmsten!