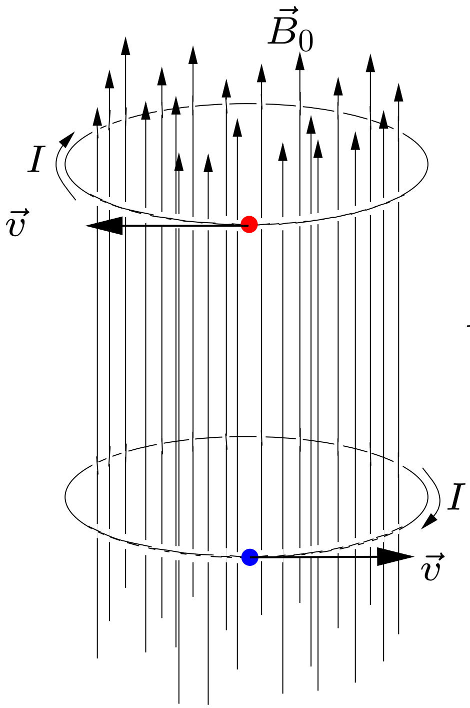
Klausur und Vorlesungsbeginn Januar 2010

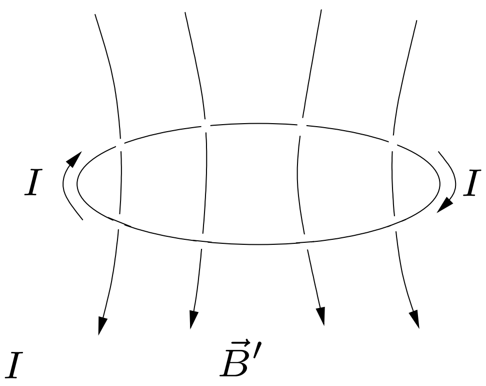
Die Klausur findet am 12.2.2010 von 08:15 - 09:15 im Hörsaal 309, Leibnizstr. 11 statt.

Bitte erscheinen Sie ein paar Minuten früher, damit wir pünktlich beginnen können.

Die Vorlesung beginnt im neuen Jahr am Mi. 13.1.2010 um 08:15 hier im Hörsaal.

Materie im Magnetfeld





In der Elektrostatik hat sich die Kapazität von Kondensatoren geändert, wenn wir Dielektrika eingebracht haben. Was passiert nun, wenn wir Materie in ein Magnetfeld einbringen?

Dazu schauen wir uns das Verhalten von Elektronen und Protonen im Magnetfeld an. Sie erzeugen ein dem ursprünglichen Magnetfeld $\vec{B}_0$ entgegengesetztes Feld $\vec{B}'$.

Die magnetische Suszeptibilität

Bringen wir in ein bestehendes Magnetfeld $\vec{B}_a$ Materie ein, so verändert sich das Feld. Wir finden, dass (bei gleichbleibender Querschnittsfläche) sich der **magnetische Fluss**

$$\Phi_m \doteq \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

um einen Faktor μ, die **relative Permeabilität**, verändert hat. Weil ja $\vec{A}$ gleich geblieben ist, muss gelten

$$B_{\text{Materie}} = \mu B_{\text{Vakuum}} = \mu\mu_0 H_{\text{Vakuum}}.$$

Ausgelöst wird diese Feldveränderung durch die magnetische Polarisierung in der Materie. Dabei werden die atomaren magnetischen Momente $\vec{p}_m$, die u. U. schon vorhanden sind oder sonst durch $\vec{B}_a$ erzeugt werden, durch $\vec{B}_a$ ausgerichtet.

Makroskopisch nennt man diesen Effekt **Magnetisierung** $\vec{M}$

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_V \vec{p}_m.$$

Die Einheit von $\vec{M}$

$$[M] = \frac{Am^2}{m^3} = \frac{A}{m},$$

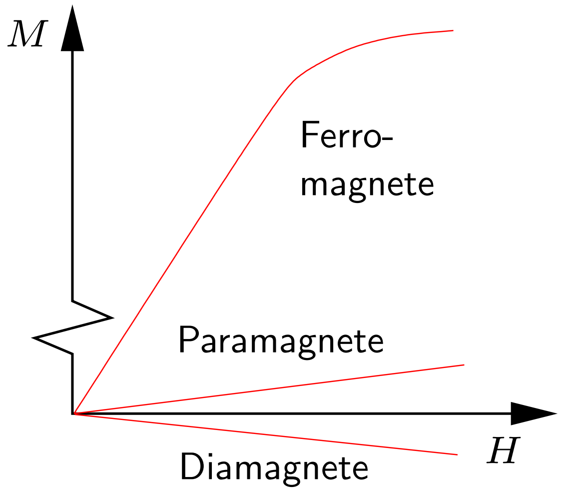
ist dieselbe wie die von $\vec{H}$. Für die Feldstärke $\vec{B}$ erhalten wir nun

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H}_0 + \vec{M} \right).$$

Experimentell stellt man fest, dass $\vec{M}$ bei nicht zu großen Feldstärken proportional zu $\vec{H}$ ist,

$$\vec{M} = \chi \vec{H},$$

wo der Proportionalitätsfaktor χ **magnetische Suszeptibilität** heißt.



Weil

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 (1+\chi) \vec{H},$$
$$\Rightarrow \quad \mu = 1 + \chi.$$

Je nach magnetischer Suszeptibilität heißen Materialien

- Ferromagnete $(\chi \gg 1)$
- Anti-Ferromagnete $(\chi \ll -1)$
- Paramagnete $(O < \chi \ll 1)$
- Diamagnete $(\chi < 0; \; |\chi| \ll 1)$

Das Bohrsche Magneton

Das Elektron oder ein anderes elementares Teilchen der Masse m und Ladung e soll sich mit einer Gechwindigkeit v auf einem Kreis des Radius r bewegen. Es stellt damit einen Kreisstrom dar mit

$$I = q \cdot \nu = \frac{q \cdot v}{2\pi r} \quad \text{, weil} \quad \nu = \frac{v}{2\pi r}$$

und das magnetische Moment lautet

$$\vec{p}_m = I\vec{A} = q\nu\vec{A} = \frac{1}{2}qr^2\vec{\omega} \quad \text{, weil} \quad \omega = 2\pi\nu \quad \text{und} \quad A = \pi r^2,$$

während der Drehimpuls des Teilchens lautet

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = mr^2\vec{\omega}.$$

Damit lautet der Zusammenhang zwischen Drehimpuls und magnetischem Moment

$$\vec{p}_m = \frac{q}{2m}\vec{L}.$$

Ist der Drehimpuls quantisiert, wie dies die Quantentheorie verlangt, so ist $L = l\cdot\hbar$, und folglich lautet das magnetische Moment eines Elektrons

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e}\cdot\vec{L}, \quad \text{bzw.} \quad |\vec{p}_m| = -\frac{el\hbar}{2m_e}.$$

Wir definieren mit $l = 1$ den Absolutbetrag als **Bohrsches Magneton** μ_B,

$$\mu_B \doteq \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,28\cdot 10^{-24}\frac{\text{C J s}}{\text{kg}} = 9,28\cdot 10^{-24}\text{A m}^2.$$

Übung: Magnetismus von Nickel

Die Sättigungsmagnetisierung von Nickel beträgt $4,7 \cdot 10^5$ A/m. Wie groß ist das magnetische Moment des Nickel-Atoms und aus wievielen Bohrschen Magnetonen ist es zusammengesetzt?

Lösung: Sättigungsmagnetisierung bedeutet, dass alle magnetischen Dipole ausgerichtet sind. Also $M_{\mathrm{sat}} = \mu n$, wo n die Anzahl Atome pro Einheitsvolumen und μ das Dipolmoment eines Atoms seien.

$$n = \frac{\rho}{M_{\mathrm{mol}}} \cdot N_A = \frac{8,9\mathrm{g/cm}^3}{58,71\mathrm{g/mol}} 6,02 \cdot 10^{23}\mathrm{mol}^{-1} = 9,13 \cdot 10^{28}/\mathrm{m}^3.$$

Damit haben wir $\mu = M_{\mathrm{sat}}/n$ gefunden:

$$\mu = \frac{M_{\mathrm{sat}}}{n} = \frac{4,7 \cdot 10^5\mathrm{A/m}}{9,13 \cdot 10^{28}/\mathrm{m}^3} = 5,15 \cdot 10^{-24}\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2, \quad \text{etwa} \ \ \frac{1}{2}\mu_B$$

Diamagnetismus

Diamagnetische Stoffe haben kein permanentes magnetisches Dipolmoment. Im Magnetfeld entstehen induzierte Dipole, deren Feld dem äußeren Feld entgegengesetzt ist. Das resultierende Feld ist folglich kleiner als das angelegte Feld. Deshalb ist die Magnetisierung ebenfalls dem angelegten Feld entgegengesetzt und es gilt

$$\chi < 0.$$

Leider können wir wegen unvollendeter Bauarbeiten hier im Institut den Versuch nicht zeigen, in dem gezeigt wird, wie in einem inhomogenen Magnetfeld ein diamagnetischer Stoff aus dem Feld gedrängt wird. Der Grund dafür ist, dass das Dipolmoment eines Diamagneten antiparallel (entgegengerichtet) zu $\vec{B}$ ist.

Paramagnetismus

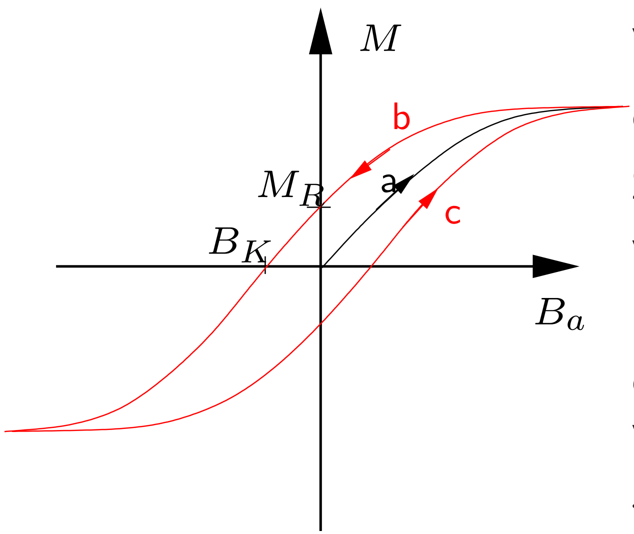
Paramagnetische Stoffe besitzen permanente magnetische Dipole, die aber im Inneren des Körpers völlig ungeordnet sind. Die thermische Energie kT ist größer als die magnetische Energie $-\vec{p}_m \cdot \vec{B}$. Das Verhältnis der beiden gibt den Magnetisierungsgrad an. Für $\vec{p}_m \cdot \vec{B} \ll kT$ gilt mit N Dipolen pro Volumeneinheit

$$\vec{M} = N|\vec{p}_m|\frac{\vec{p}_m \cdot \vec{B}}{3kT} \cdot \frac{\vec{B}}{B}.$$

Damit ist die Suszeptibilität temperaturabhängig:

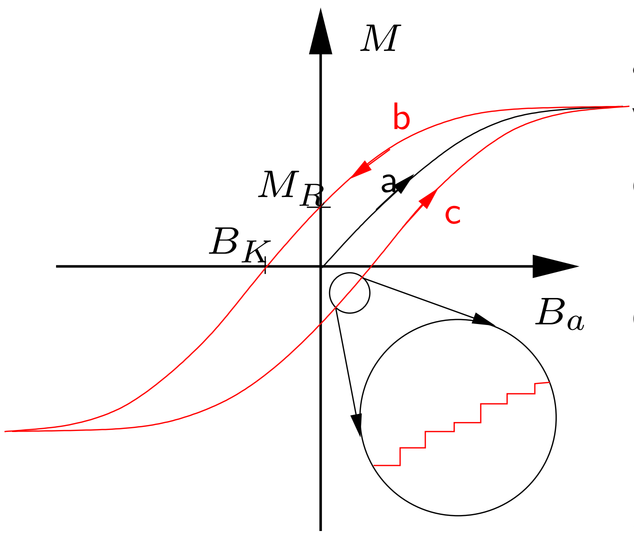
$$\chi = \mu_0 \frac{M}{B} = \frac{\mu_0 N p_m^2}{3kT}.$$

Ferromagnetismus und Hysteresis



Bei Ferromagneten hängt die Magnetisierung von der Vorgeschichte des Materials ab. Ist es vollkommen entmagnetisiert (z. B. durch Ausglühen), so nimmt M zunächst linear mit dem angelegten Feld B_a zu (Kurve a), geht dann aber in Sättigung. Wird nun B_a reduziert, so verschwindet M nicht mehr bei $B_a = 0$, es verbleibt ein **Remanenzfeld** M_R. Um M zum Verschwinden zu bringen, muss ein Feld, die **Koerzitivkraft**, B_K angelegt werden. Die Fläche zwischen den roten Kurven (b und c) gibt die aufzuwendende Energie an, um einen gesamten Magnetisierungszyklus zu durchlaufen .

Weiss'sche Bezirke



Misst man die Magnetisierungskurve eines Ferromagneten sehr genau aus, so findet man, dass sie aus vielen kleinen **Barkhausen-Sprüngen** besteht. Diese erklären sich durch das Umklappen der magnetischen Momente von einzelnen sog. **Weiss'schen Bezirken**, die je zwischen 10^8 und 10^{12} Magnetone enthalten. Man kann dies hörbar machen, indem man einen Ferromagneten mit einer Spule ausliest und das (verstärkte) Signal auf einen Lautsprecher gibt. Beim Umklappen dieser Bezirke steigt die Magnetisierung sprunghaft an. Das führt (siehe Freitag) zu kurze Spitzen in der Induktionsspannung, die im Lautsprecher als Knacken zu hören sind.

Curietemperatur

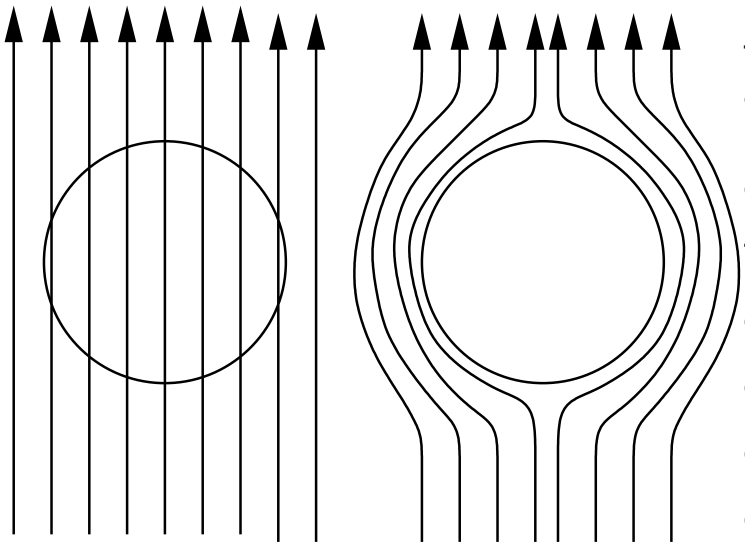
Substanz	T_C [K]	C [K]	θ_C [K]
Co	1395	2,24	1415
Fe	1033	2,22	1100
Ni	627	0,59	650
EuO	70	4,7	78

Erhitzt man einen Ferromagneten auf eine bestimmte Temperatur, so verliert er seine Magnetisierung (Ausglühen). Diese Temperatur heißt **Curie-Temperatur** T_C. Bei Temperaturen oberhalb der Curie-Temperatur beobachtet man, dass die Magnetisierung nicht vollständig verschwindet, sondern dass der Ferromagnet paramagnetisch geworden ist. Oberhalb einer weiteren Temperatur, der sog. **paramagnetischen Curie-Temperatur**, findet man für die Suszeptibilität ein ähnliches Verhalten wie für Paramagneten

$$\chi(T) = \frac{C}{T - \theta_C},$$

wo C eine eine Materialkonstante, die **Curiekonstante** ist.

Magnetismus von Supraleitern



$T > T_c$ $\quad$ $T < T_c$

Supraleiter verhalten sich wie perfekte Diamagnete. Unterhalb einer materialabhängigen kritischen Temperatur T_c wird ein äußeres Magnetfeld aus dem Supraleiter herausgedrängt. Wie ein perfekter Diamagnet wird der supraleitende Körper dabei aus dem Magnetfeld gedrängt, bzw. scheint darin zu schweben - die Gravitationskraft wird durch die entstandene Inhomogenität des Feldes und die daraus folgende "Gradientenkraft" kompensiert.

Allerdings ist die Erklärung für das Verhalten eines Supraleiters nicht dieselbe, wie für einen klassischen Diamagneten. Das Phänomen des **Meißner-Ochsenfeld-Effektes** lässt sich klassisch nicht erklären, es sind dazu Konzepte aus der Quantenphysik erforderlich, auf die wir hier nicht eingehen können.

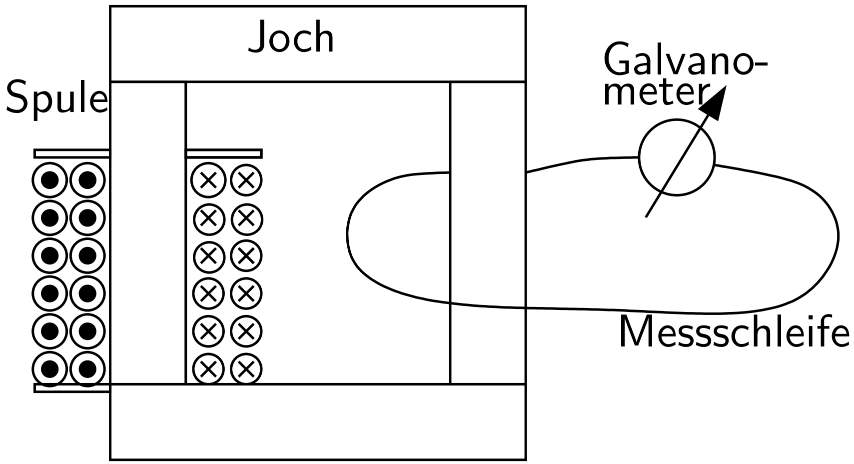
Verknüpfungen zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$

Ein Verständnis für die Verbindung von Elektrizität und Magnetismus kam, wie wir schon festgestellt haben, erst sehr spät. Obwohl eine statische Ladungsverteilung ein elektrisches Feld hervorruft, findet man damit kein magnetisches Feld. Es kam völlig unerwartet, als Oerstedt berichtete, dass der **Strom** ein Magnetfeld hervorruft!

In Analogie zur elektrischen Influenz wurde nun vermutet, dass ein kontinuierlicher Strom in einem Leiter einen zweiten kontinuierlichen Strom in einem parallelen Leiter hervorrufen könnte. Dieser Strom wurde nie gefunden.

Wieder kam es völlig unerwartet, als Faraday am 29. August 1831 entdeckte, dass **veränderliche Magnetfelder** elektrische Ströme hervorrufen können.

Das Faradaysche Induktionsgesetz

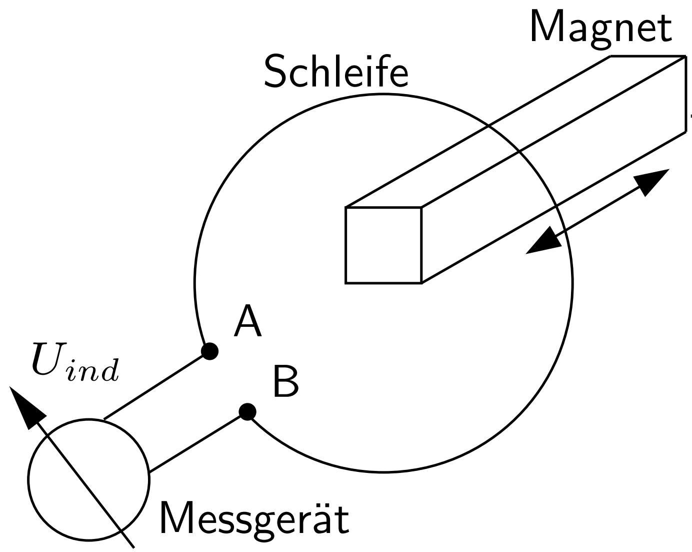


Die Entdeckung von Faraday ist heute eine Selbstverständlichkeit, zu ihrer Zeit muss sie für enormen Wirbel gesorgt haben. Heute ist sie nicht wegzudenken. Dank ihr ist es möglich, durch Bewegung Strom zu erzeugen, also mit Motoren potentielle, fossile, erneuerbare, Wind-, Gezeiten-, etc. Energie in Strom umzuwandeln.

Faraday entdeckte bei seinen Versuchen, dass beim Ein- und Ausschalten des Spulenstroms in der Messschleife ein Strom floss. Heute nennt man diese Anordnung Transformator.

Das Faradaysche Induktionsgesetz II

Heute wissen wir, dass das veränderliche Magnetfeld in einem geschlossenen Leiter einen Strom hervorruft. Dies kann durch (im Nachhinein) sehr einfache Experimente gezeigt werden.

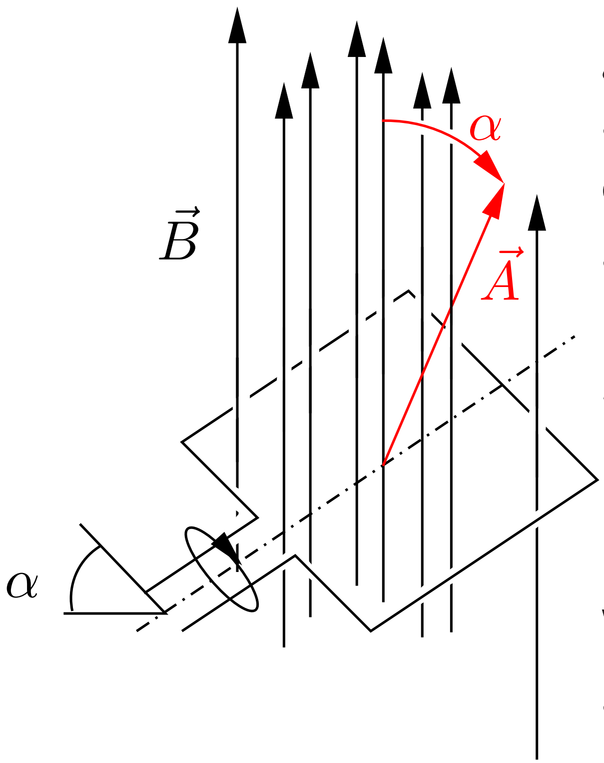


Ein bewegter Magnet ruft in einer Leiterschleife kurzzeitig eine Spannung $U(t)$ hervor, die proportional ist zu:

- $v(t)$ Magnet,
- Anzahl Windungen mal Fläche der Schleife,
- $\cos\alpha$ (zw. Flächennormalen und $\vec{B}$.)

Beim Umdrehen des Magneten wechselt auch das Vorzeichen von $U(t)$.

Das Faradaysche Induktionsgesetz III



Wir können auch eine Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld bewegen und finden, dass dabei auch eine Spannung induziert wird. Es scheint also auf die Relativbewegung zwischen Magnetfeld und Schleife anzukommen. Drehen wir die Schleife rund um sich herum, so finden wir, dass sich das Vorzeichen der Spannung verändert, es entsteht eine **Wechselspannung**.

Dies können wir auch verstehen, der Kosinus des Winkels α zwischen Schleifenfläche und Magnetfeld ändert sich ja!

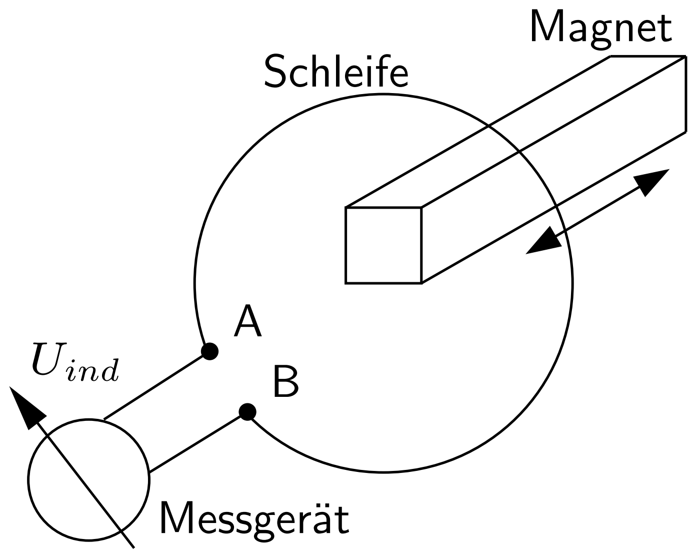
Das Faradaysche Induktionsgesetz IV

Wir stellen fest, dass die induzierte Spannung gerade gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ ist, aber mit dem umgekehrten Vorzeichen. Je stärker sich die Anzahl Feldlinien durch eine Leiterschleife pro Zeiteinheit ändert, desto größer ist die induzierte Spannung. Diese Gesetzmäßigkeit heißt **Faradaysches Induktionsgesetz**

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{ind}} &= -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}, \text{ wo } \Phi_m \text{ der \textbf{magnetische Fluss} ist,} \\ \Phi_m &= \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = B \cdot N \cdot A \cdot \cos(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Der magnetische Feldfluss kann aufgefasst werden als die Anzahl Feldlinien, die eine gegebene Fläche durchstechen.

Induzierte Spannung – na und?



Wir haben gesehen, dass sich in der Konfiguration links zwischen den Punkten A und B eine Spannung U_{ind} aufbaut.

$$U_{\mathrm{ind}} = - \int \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A}.$$

Von früher wissen wir aber, dass eine Spannung auf ein elektrisches Feld zurückgeführt werden kann,

$$U = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{und wegen} \quad U_{\mathrm{ind}} = U \quad \text{folgt} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A} \neq 0.$$

Die Lenzsche Regel

Was bedeutet das negative Vorzeichen im Faradayschen Induktionsgesetz $U_{\mathrm{ind}} = -\dot{\Phi}_m$?

- Die induzierte Spannung U_{ind} führt zu einem Strom, der seinerseits wieder ein Magnetfeld erzeugt.

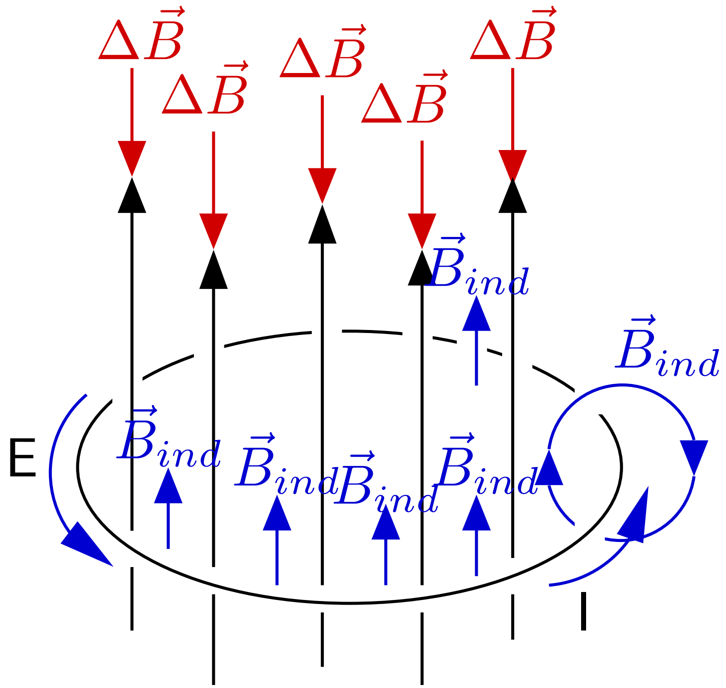
- U_{ind} ist positiv (negativ) für negative (positive) Magnetfeldänderungen.

- Die induzierten Ströme $I_{\mathrm{ind}} = U_{\mathrm{ind}}/R$ auch .

- Das induzierte Magnetfeld $\vec{B}_{\mathrm{ind}}$ muss nach der rechte-Hand-Regel in die umgekehrte Richtung der Feldänderung zeigen.

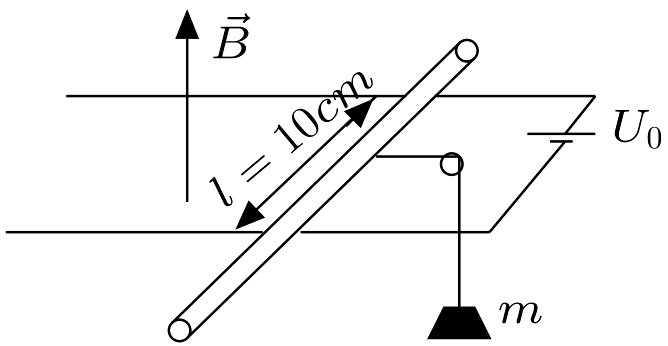
Die induzierten Größen behindern den induzierenden Vorgang.

Lenzsche Regel II



Die Richtung des induzierten Stroms I, der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und des induzierten Magnetfeldes $\vec{B}_{\mathrm{ind}}$ wirken der Änderung des Magnetfeldes $\Delta\vec{B}$ entgegen. Sind die roten Pfeile umgekehrt (nimmt $\vec{B}$ zu), so zeigen I, $\vec{E}$ und $\vec{B}_{\mathrm{ind}}$ in die andere Richtung. Zeigt $\Delta\vec{B}$ in die andere Richtung ($\vec{B}$ nimmt zu), so drehen sich alle Vorzeichen um (nach Induktionsgesetz) und damit auch $\vec{E}$, I und $\vec{B}_{\mathrm{ind}}$. Das ist der Inhalt der Lenzschen Regel.

Übungsaufgabe: Linearmotor



Ein leitender Stab ($R = 0,1\ \Omega$) liege auf zwei leitenden, parallelen Schienen ($R \simeq 0$) mit 10 cm Abstand, an welchen eine Spannung $U_0 = 15$ V liegt. Der Stab ist über ein Seil mit einer Masse $m = 1,2$ kg verbunden. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_0 des Stabs, mit welcher er sich stationär bewegt, wenn ein homogenes Magnetfeld $B_0 = 10$ kGauß senkrecht durch die Schienenebene tritt. [$v_0 = 32,3$ m/s]

Lösung

Induzierte Spannung $U_{\mathrm{ind}} = -\mathrm{d}\Phi_m/\mathrm{d}t = -B\mathrm{d}A/dt = -Bl\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Bewegung $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ führt zu Lorentzkraft auf Ladungsträger, $\vec{F}_{el} = I \int \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I \cdot l \cdot B$. Im stationären Zustand ist $\dot{v} = 0$, d. h. $F_{el} = F_G$, also

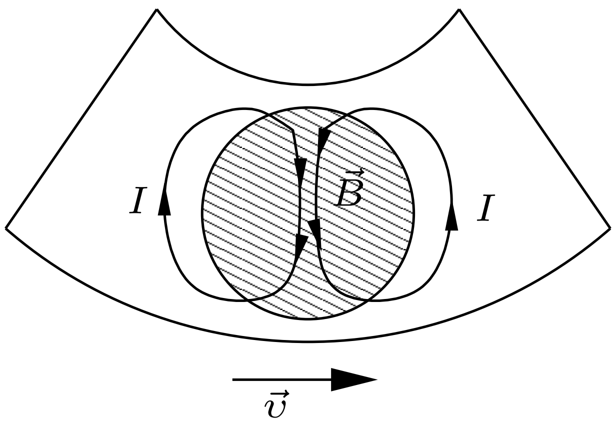
$$I \cdot l \cdot B = m \cdot g$$

$$\text{Strom: } I = \frac{U_0 + U_{\mathrm{ind}}}{R} = \frac{U_0 - B \cdot l \cdot v}{R} = \frac{m \cdot g}{l \cdot B}$$

und folglich

$$v = \frac{1}{l \cdot B}\left(U_0 - \frac{m \cdot g \cdot R}{l \cdot B}\right).$$

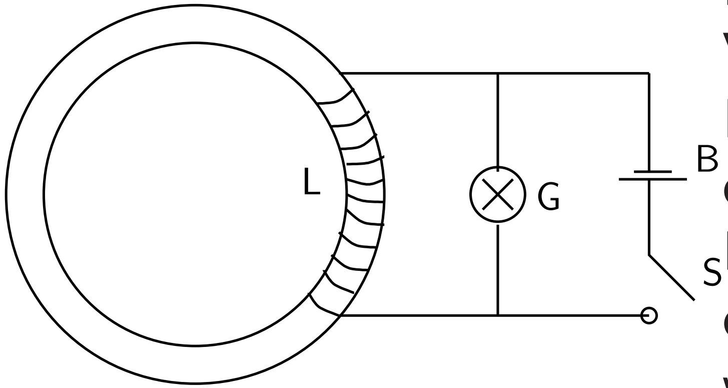
Wirbelströme



Die in ausgedehnten Leitern induzierten Ströme nennt man **Wirbelströme**. Sie fließen, wie wir jetzt gesehen haben, immer entgegengesetzt zu den induzierenden Größen. Damit kann man Wirbelströme sehr gut als Bremse verwenden. Die Ströme entstehen durch die auf die Leiterelektronen wirkende Lorentzkraft. Die entstehende Joulsche Wärme entzieht der Bewegung Energie.

Eine Abbremsung lässt sich genau so schön auch mit einem Permanentmagneten und einem Rohr aus leitendem Material nachweisen. Lässt man den Magneten z. B. durch ein Aluminiumrohr fallen, so fällt er wesentlich langsamer, als eine nicht-magnetische Testmasse. Die Erwärmung aufgrund der Wirbelströme ist allerdings sehr klein, wie man leicht abschätzen kann.

Selbstinduktion

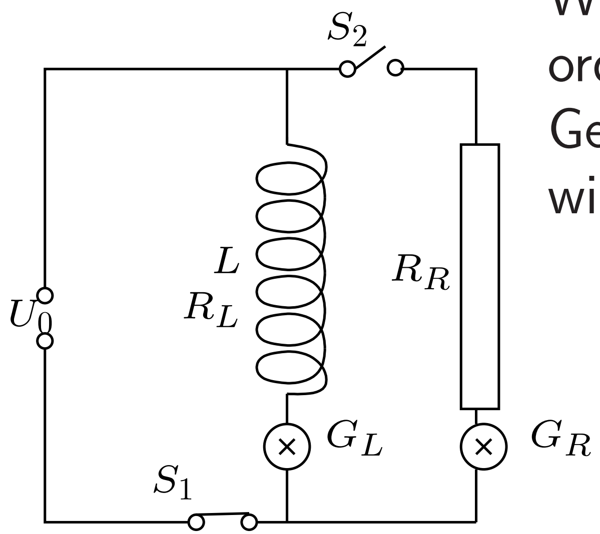


Fließt durch eine Spule ein Strom, so liegt die Vermutung nahe, dass das dadurch entstehende Magnetfeld bei Veränderung eine Spannung induzieren könnte. Diese Spannung ist nach der Lenzschen Regel entgegengesetzt zur Änderung in der angelegten Spannung. In der Anordnung links wird die Glühbirne G kurz aufleuchten, wenn der Stromkreis unterbrochen wird (Schalter S geöffnet). Die Proportionalitätskonstante L im Ausdruck

$$U_{\mathrm{ind}} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

heißt einleuchtend **Selbstinduktionskoeffizient** oder **Induktivität**.

Ein- und Ausschalten eines Schaltkreises mit Spule

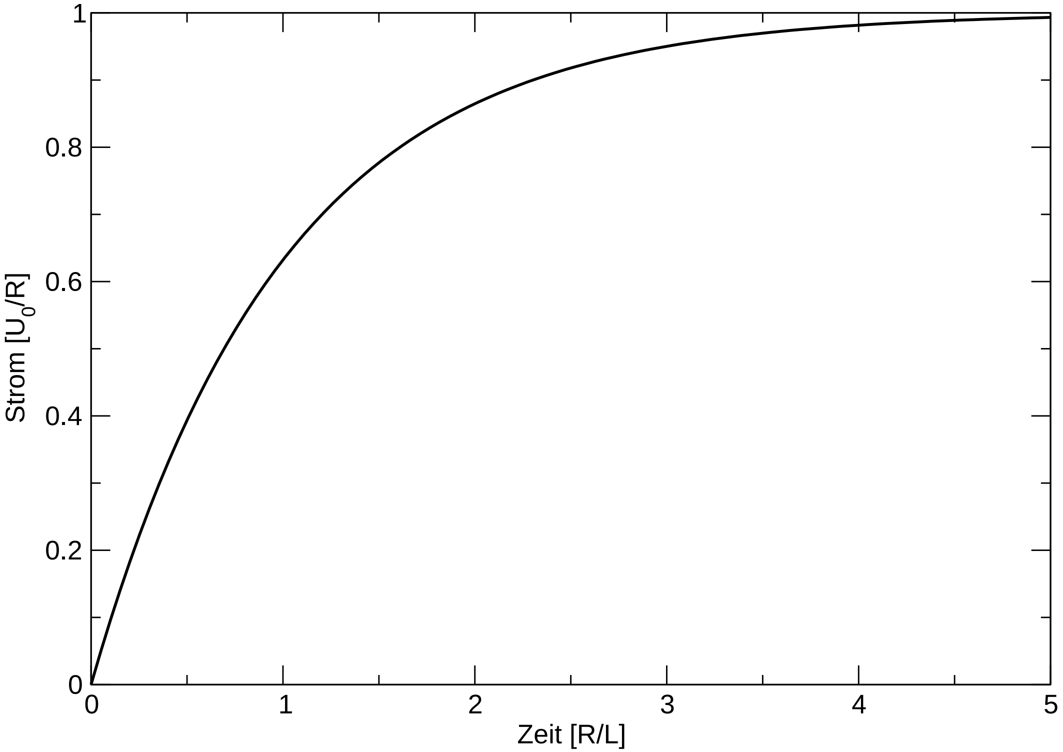


Wir betrachten nun den Einschaltvorgang bei der Anordnung links, S_1 wird geschlossen, S_2 bleibt je nach Geschmack offen oder geschlossen. Nach Kirchhoff haben wir

$$\begin{aligned} U_0 &= I \cdot R - U_{\text{ind}} = I \cdot R + L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \\ \frac{U_0}{R} &= I + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

wo $1/R = 1/R_L + 1/R_R$ gilt, wobei R_L der Ohmsche Widerstand der Spule und R_R derjenige des Widerstands ist (für geschlossenen Schalter S_2).

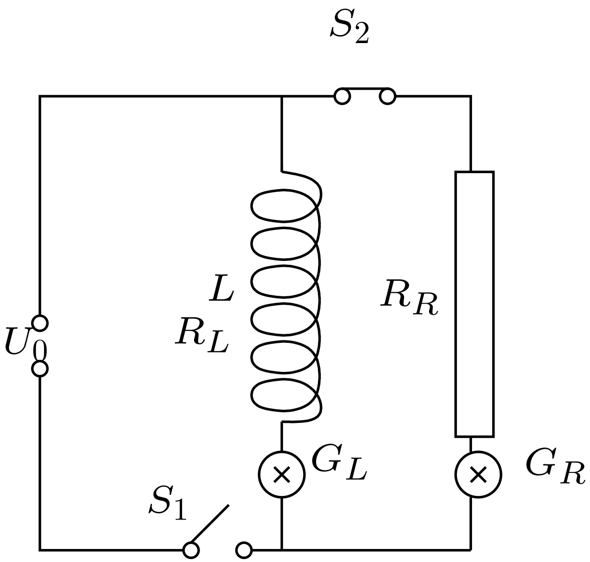
Die Lösung dieser linearen, inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung ist $I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$.



Der Strom steigt rasch an und schmiegt sich asymptotisch an den Wert U_0/R. Die Zeitverzögerung gegenüber der rein ohmschen Situation kann qualitativ sichtbar gemacht werden, indem zu Beginn auch der Schalter S_2 geschlossen wird. Dann leuchtet Glühbirne G_L erst nach G_R auf. Über die Spule fließt der Strom $I_L = U_0/R_L$, über den Widerstand $I_R = U_0/R_R$.

Nach genügend langer Zeit fließt durch die Spule derselbe Strom wie durch den Widerstand, beide Widerstände sind gleich und beide Glühbirnen leuchten gleich hell.

Ausschalten des Schaltkreises



Nun wird der Schalter S_1 geöffnet, d. h. $U_0(t=0) = 0$ und $I_L(t=0) = I_L(t<0) = I_0$. Dann gilt nach der Maschenregel und Lenzschen Regel

$$I_L(t)\cdot(R_R+R_L) - U_{\mathrm{ind}} = I_L(t)\cdot(R_R+R_L) + L\frac{\mathrm{d}I_L(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Der Strom sinkt langsam (asymptotisch) auf Null ab mit der Zeitkonstante $\tau = L/R$, wo $R = R_R + R_L$. Wegen des sich ändernden Stroms entsteht über der Spule eine Induktionsspannung welche wesentlich größer sein kann als U_0. Jetzt kann durch die Glühbirne G_R ein größerer Strom $I_R = -I_L$ als vor dem Ausschalten in umgekehrter Richtung fließen. Dieser Effekt wird zum Zünden von Leuchtstoffröhren verwendet.

Induktivität einer zylindrischen Spule

Das Magnetfeld im Innern einer mit einem Strom I durchflossenen Spule der Länge l mit n Windungen pro Meter und Querschnittsfläche A ist $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$ und folglich $\Phi_m = B \cdot A = \mu_0 \cdot n \cdot A \cdot I$.

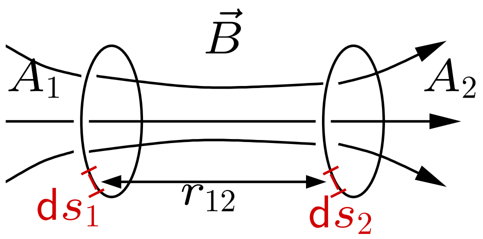
Ändert sich der Strom dI/dt, so ändert sich auch Φ_m, und es wird eine Spannung zwischen den beiden Enden der Spule induziert.

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{ind}} &= -n \cdot l \frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}, \text{ weil } n \cdot l \text{ Windungen} \\ &= -\mu_0 \cdot n^2 \cdot l \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Induktivität der Spule mit Volumen $V = A \cdot l$

$$L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot V.$$

Gegenseitige Induktion



Wie beeinflussen sich zwei Stromkreise gegenseitig? Nach Biot-Savart erzeugt der stromdurchflossene Stromkreis 1 im Punkt $P_{(r_{12})}$ ein Magnetfeld welches einen magnetischen Fluss durch die durch die Leiterschleife s_2 aufgespannte Fläche A_2 bewirkt

$$\Phi_{m2} = L_{12} I_1.$$

Der Proportionalitätsfaktor L_{12} heißt **gegenseitige Induktivität** und ist in der Regel schwierig auszurechnen. Umgekehrt wird auch der Strom in Stromkreis 2 im Stromkreis 1 einen magnetischen Fluss bewirken,

$$\Phi_{m_1} = L_{21} I_2.$$

Die Energie des magnetischen Feldes

Beim Ausschalten der Spannung über Spule und Widerstand stand die Glühbirne noch eine Weile unter Spannung und leuchtete zunächst noch wesentlich heller als vorher. Die dazu erforderliche Energie muss im Magnetfeld der Spule gesteckt haben, wo denn sonst? Damit muss die Energie des Magnetfeldes gegeben sein durch

$$W_{\mathrm{mag}} = \int_0^\infty U \cdot I \cdot \mathrm{d}t = \int_0^\infty R \cdot I^2 \cdot \mathrm{d}t.$$

Setzen wir den Ausdruck für den Strom $I(t)$ ein,

$$W_{\mathrm{mag}} = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-(2R/L)\cdot t} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2} L I_0^2.$$

Setzen wir noch den Ausdruck $L = \mu_0 n^2 \cdot V$ für die Induktivität einer Spule ein, so erhalten wir für die Energiedichte des magnetischen Feldes

$$w_{\mathrm{mag}} = \frac{W_{\mathrm{mag}}}{V} = \frac{1}{2}\mu_0 \cdot n^2 \cdot I_0^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

denn das Feld einer Spule ist ja bekanntlich $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$. Zusammenfassend gilt für elektrische und magnetische Felder

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{el}} &= \frac{1}{2}CU^2 \qquad & W_{\mathrm{mag}} &= \frac{1}{2}LI^2 \\ w_{\mathrm{el}} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad & w_{\mathrm{mag}} &= \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = 1/c^2$ erhalten wir einen Ausdruck für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes:

$$w_{\mathrm{elm}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(E^2 + c^2 B^2\right) .$$

Vergleich elektrischer und magnetischer Größen

	elektr. Feld			magn. Feld	
Kraft	$\vec{F} = q\vec{E}$	N		$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$	N
Dipolmoment	$\vec{p} = q\vec{l}$	Asm		$\vec{m} = \Phi\vec{l}$	Vsm
rel. Permit.	ϵ_r	1	Permeab.	μ_r	1
Kapazität	$C = Q/U$	F	Induktivität	$L = U/(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$	H
Energiedichte	$w_e = \frac{1}{2}\epsilon\vec{E}^2$	J/m^3		$w_m = \frac{1}{2\mu}\vec{B}^2$	J/m^3
Energie Kond.	$W_e = \frac{1}{2}CU^2$	J	Spule	$W_m = \frac{1}{2}LI^2$	J