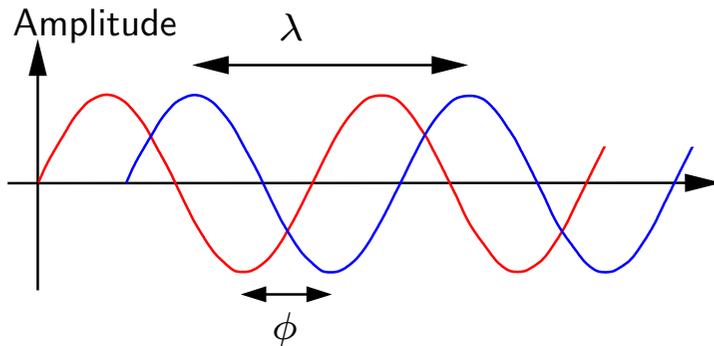


Elektromagnetische Wellen

Eine (elektromagnetische) Welle wird neben der Polarisation durch drei Größen charakterisiert:



Die Amplitude entspricht der Auslenkung eines Pendels, dem Höhenunterschied zwischen Wellenberg und glatter Wasseroberfläche.

Die Wellenlänge wird bestimmt durch die Schwingungsdauer und die Geschwindigkeit der Welle. Manchmal (z. B. in Musikinstrumenten) wird die Wellenlänge durch die geometrische Anordnung (Resonator) bestimmt.

Die Phase bestimmt "wo" die Welle in ihrer Amplitude beginnt und wird in der Regel durch die Anfangsbedingungen des Problems bestimmt.

Der Brechungsindex

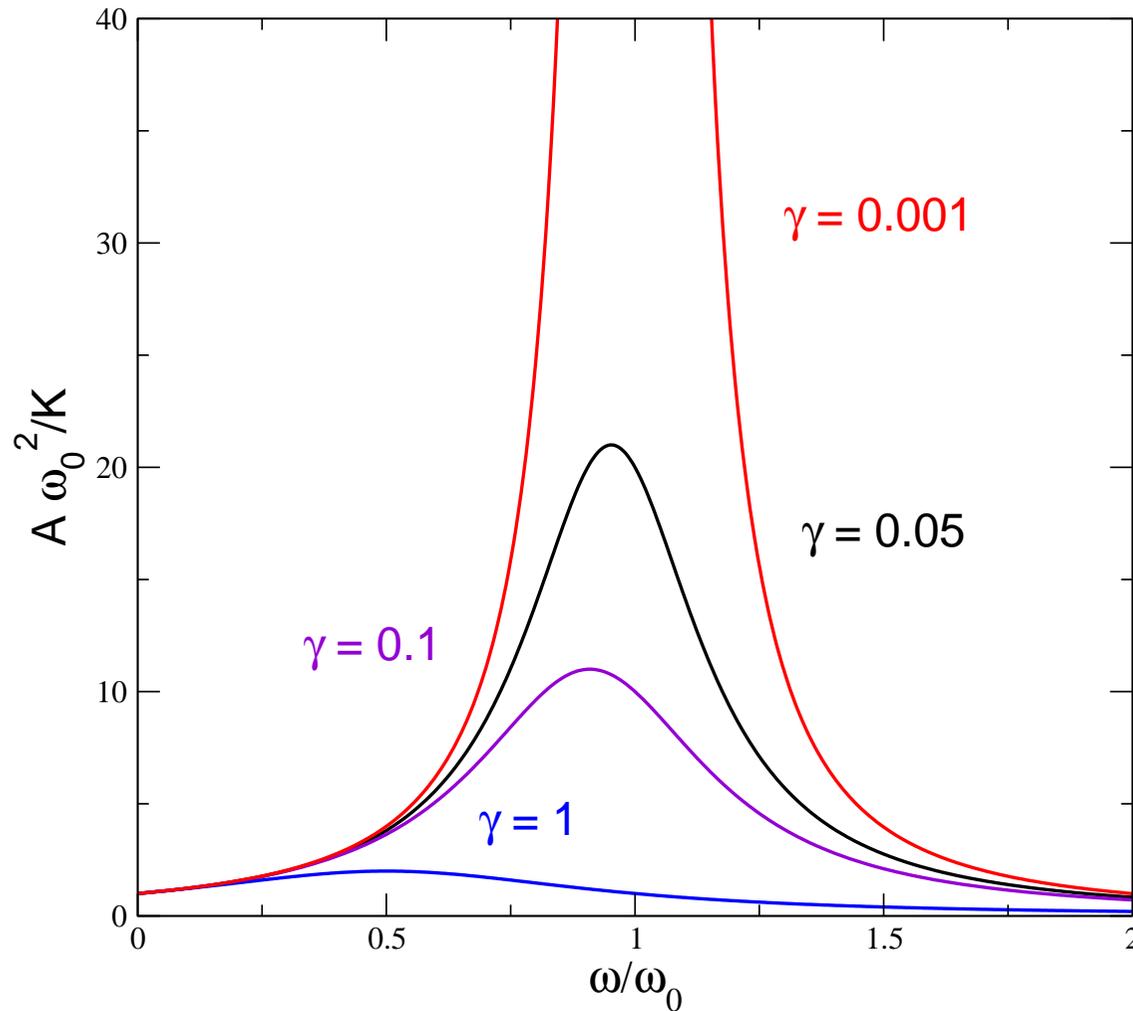
Wir wissen, dass sich Licht im Vakuum mit "Lichtgeschwindigkeit" c bewegt und in Materie nie schneller als c ist. Das legt es nahe, die Lichtgeschwindigkeit im Medium (in Materie) zu schreiben als

$$c' = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{n} = \frac{c}{n}, \text{ wo } n = n(\lambda) \text{ und deshalb } c' = c'(\lambda).$$

$n > 1$ ist der von der Wellenlänge abhängige **Brechungsindex**.

Diese Verminderung der Lichtgeschwindigkeit ist eine Folge der Wechselwirkung der auf das Medium einfallenden elektromagnetischen Welle mit den Ladungsträgern im Medium. Die Elektronen werden zu erzwungenen Schwingungen angeregt und strahlen ihrerseits wie ein Hertzscher Dipol auch in derselben Frequenz wieder ab, allerdings etwas phasenverschoben.

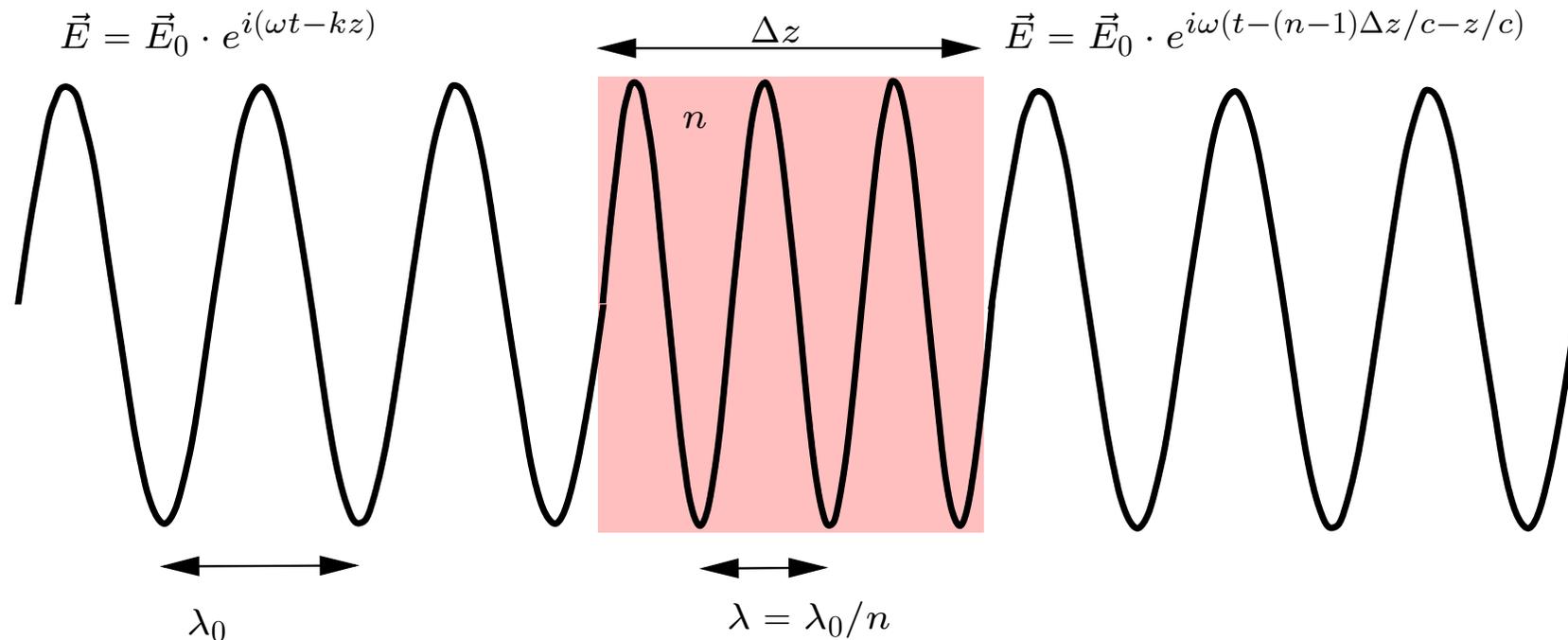
Erzwungene Schwingungen



Die durch das elektrische Feld des Lichtes angeregten Elektronen im Medium beschreiben eine erzwungene Schwingung. Weil die Dämpfung γ sehr klein ist, liegt ihre Resonanzfrequenz bei ihrer Eigenfrequenz, d.h. es schwingen nur Elektronen mit einer Eigenfrequenz mit, die der Frequenz des einfallenden Lichtes entspricht. Diese senden aber wie ein Herz-scher Dipol wieder Licht derselben Frequenz aus.

Durchgang durch ein Medium mit Brechungsindex n

So pflanzt sich Licht im Medium fort, jede Emission ein klein wenig verzögert, was netto zu einer Reduktion der Lichtgeschwindigkeit und einer Phasenverschiebung $\Delta\phi = \omega(n - 1)\Delta z/c$ führt. Wegen $c = \lambda \cdot f$ und f const. gilt $\lambda = \lambda_0/n$.



Brechungsindex II

Diese abgestrahlten elektromagnetischen Wellen überlagern sich in jedem Punkt innerhalb und außerhalb (hinter) des Körpers mit den eingehenden primären Wellen. Die Phasenverschiebung der sekundären Wellen resultiert in einer Verzögerung der gesamten Welle - die Welle kommt ein klein wenig später an, als wenn kein Medium dazwischen wäre, und zwar gerade um

$$\Delta t = (n - 1)\Delta z/c,$$

wo Δz die Dicke (oder Schichtdicke) des Mediums ist.

Man kann nun zeigen, dass der Brechungsindex n eine komplexe Zahl ist,

$$n = n' - i\kappa'.$$

Die Buchstaben n' und κ wie auch das Vorzeichen des Imaginärteils sind “schon fast Konvention”. Die Ausdrücke für n' und κ nennen sich **Dispersionsrelationen**.

Um die Bedeutung von Real- und Imaginärteil zu verstehen, untersuchen wir nochmals das Verhalten von Licht hinter einem Medium. Wir hatten vorhin

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \vec{E}_0 e^{i\omega[t-(n-1)\Delta z/c-z/c]}, \\ &= \vec{E}_0 e^{i\omega(t-z/c)} \cdot e^{i\omega(n-1)\Delta z/c}, \\ &= \vec{E}_0 e^{i\omega(t-z/c)} \cdot e^{-i\omega(n'-1)\Delta z/c} \cdot e^{-\omega\kappa\Delta z/c}.\end{aligned}$$

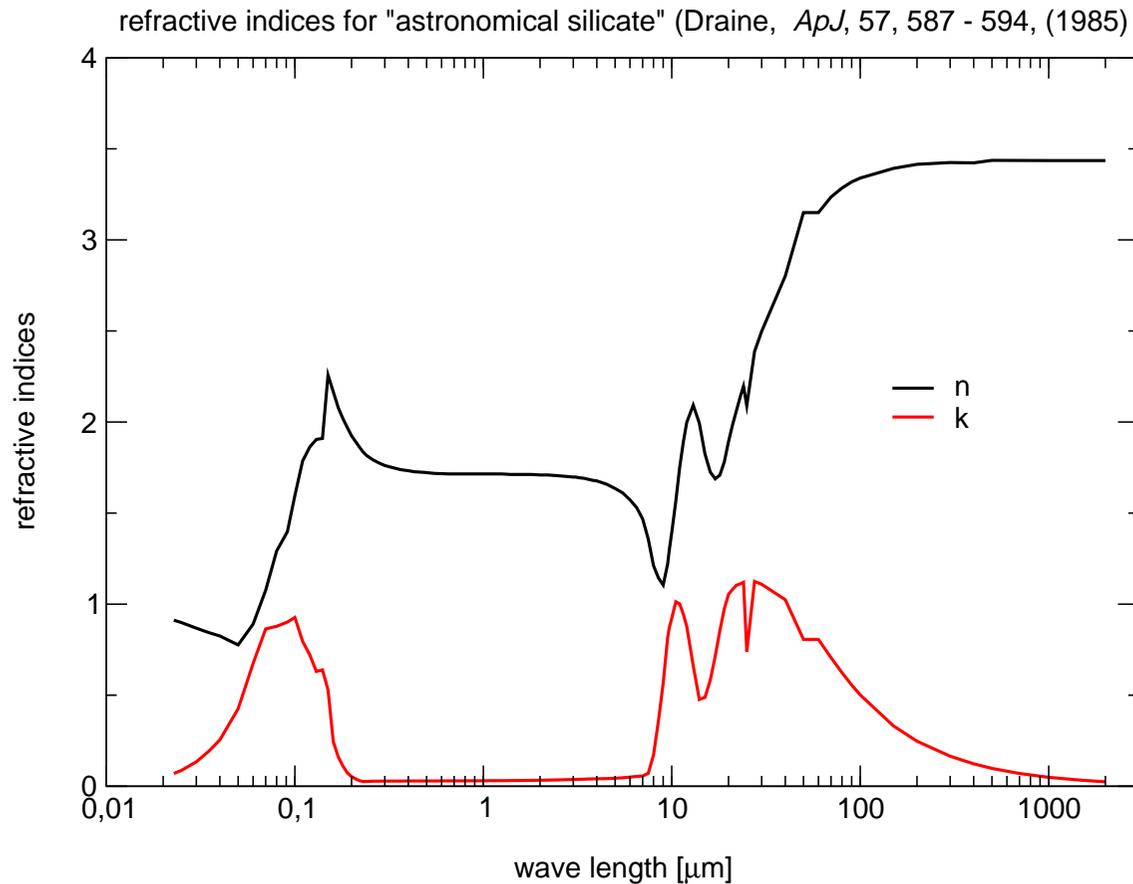
Der Faktor $e^{-\omega\kappa\Delta z/c}$ sagt uns, dass das Licht beim Durchgang durch das Medium abgeschwächt, **absorbiert** wird. Die **Intensität** des Lichtes $I = c\varepsilon_0 E^2$ nimmt also ab:

$$I = I_0 \cdot e^{-2\omega\kappa\Delta z/c} = I_0 \cdot e^{-\alpha\Delta z}, \quad \text{wo} \quad \alpha = \frac{2\omega\kappa}{c} = \frac{4\pi\kappa}{\lambda}$$

der **Absorptionskoeffizient** ist. Er ist proportional zum Imaginärteil des Brechungsindexes.

Der Realteil von n schlägt sich im Faktor $e^{-i\omega(n'-1)\Delta z/c}$ nieder, der die Phasenverschiebung angibt, die das Licht beim Durchgang durch das Medium erfährt, $\Delta\phi = \omega(n' - 1)\Delta z/c = 2\pi(n' - 1)\Delta z/\lambda_0$, wo λ_0 die Wellenlänge im Vakuum bedeutet. Durchläuft Licht nun eine Strecke $\Delta z = \lambda_0$, so erfährt es im Vakuum eine Phasenverschiebung von 2π und im Medium $n'2\pi$.

Beispiel: Astronomisches Silikat



Als Beispiel haben wir links den Brechungsindex für sog. astronomisches Silikat, den Stoff, aus dem viele Staubteilchen im interstellaren Medium bestehen. Im Bereich des sichtbaren Lichtes (ca. 400 nm bis ca. 800 nm) ist n' nahezu konstant, der Absorptionskoeffizient ist sehr klein. Im Ultravioletten und im fernen Infrarot nimmt die Absorption stark zu und n' ändert sich rasch.

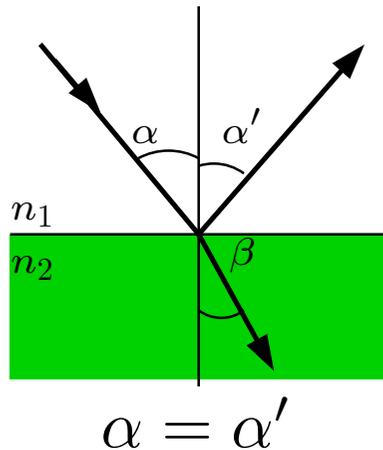
Lichtstreuung

In der Herleitung des Brechungsindex wie auch bei der Behandlung der Absorption und der Dispersion haben wir die Richtungsabhängigkeit der Abstrahlung der angeregten Dipole vernachlässigt bzw. deren Maximalwert $\vartheta = \pi/2$ verwendet. Die durch die linear polarisierte einfallende Welle angeregten Dipole schwingen alle in der Richtung des wechselnden \vec{E} -Feldes. Wir nennen sie x -Richtung. Das abgestrahlte Licht ist natürlich nicht nur parallel zum einfallenden Licht, sondern kann auch einen Winkel dazu aufweisen. Die mittlere abgestrahlte Leistung eines Dipols ist

$$\bar{P} = \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2 \vartheta.$$

Der Prozess, in dem Licht in eine von $\vartheta = \pi/2$ verschiedene Richtung abgestrahlt wird, wird **Streuung** genannt.

Wellen an Grenzflächen, das Brechungsgesetz von Snellius



Tritt ein Lichtstrahl in ein Medium ein, so wird in der Regel ein Teil reflektiert, und ein Teil wird in das Medium hinein gebrochen. Beim Übergang müssen die Komponenten tangential zur Oberfläche erhalten bleiben, deshalb liegen einfallender, reflektierter und gebrochener Strahl in einer Ebene.

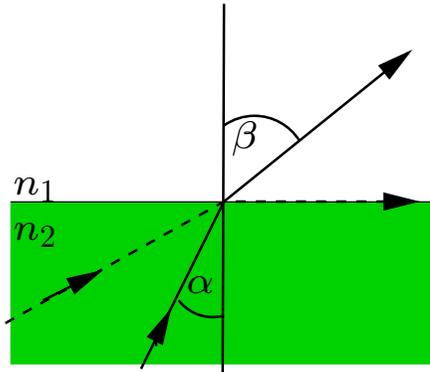
Snellius hat herausgefunden, dass bei einem einfallenden Winkel α der gebrochene Strahl einen Winkel β aufspannt:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

das Brechungsgesetz von Snellius.¹

¹Bei Kalkspat tritt das Phänomen der Doppelbrechung auf weil in Kalzit wegen des nicht-kubischen Kristallbaus in verschiedenen Richtungen und für verschiedene Polarisierungen des Lichts verschiedene Brechungsindizes gelten.

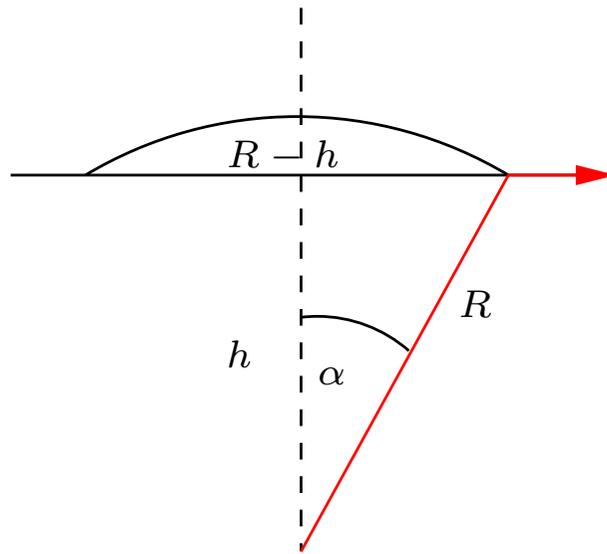
Totalreflexion



An Grenzflächen treten unter bestimmten Bedingungen auch weitere Phänomene auf, z. B. das der Totalreflexion. Tritt Licht aus einem optisch dichteren Medium in ein optisch dünneres aus, so kann der Winkel zur Flächennormalen nicht beliebig groß sein. Für den Übertritt aus Wasser ($n_2 = 1.333$) an Luft ($n_1 = 1$) beträgt der Winkel $48,8^\circ$, für Glas-Luft $41,8^\circ$. Nach dem Brechungsgesetz von Snellius muss $\sin \alpha \leq n_2/n_1$ gelten, damit das Licht ins Medium 2 gelangen kann, denn $\sin \beta$ kann ja höchstens Eins werden. Diese Eigenschaft wird z. B. bei “Katzenaugen” (Retroreflektoren) oder bei der Signalübertragung in Glasfasern ausgenutzt.

Übung: Eine Lampe leuchtet in einer Tiefe h unter Wasser. Wie groß ist der Bruchteil ihrer Lichtleistung, der in die Luft abgegeben wird? (Hinweis: Absorption und partielle Reflexion vernachlässigen.)

Lösung Taucherlampe



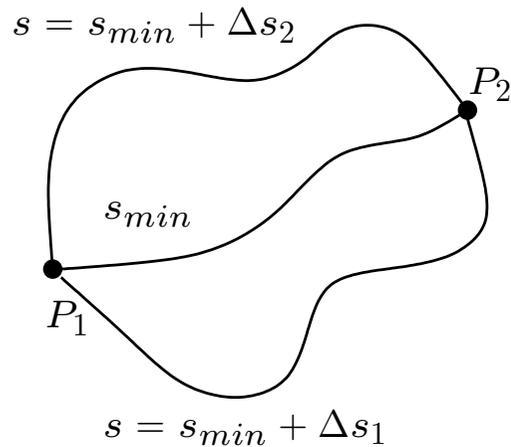
Die Lösung ist nebenan skizziert. Alles Licht innerhalb des durch α aufgespannten Kegels verlässt das Wasser. Um den Bruchteil am gesamten abgestrahlten Licht herauszufinden, bestimmen wir die Fläche der Kalotte und dividieren durch die Gesamtfläche einer Kugel mit Radius R .

$$R = \frac{h}{\cos \alpha}, \quad R-h = h \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right), \quad A_{\text{Kal}} = 2\pi R(R-h).$$

Der Bruchteil ist das Verhältnis $A_{\text{Kal}}/A_{\text{Kugel}}$,

$$\text{Bruchteil} = \frac{A_{\text{Kal}}}{A_{\text{Kugel}}} = \frac{2\pi \frac{h^2}{\cos^2 \alpha} (1 - \cos \alpha)}{4\pi \frac{h^2}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) \text{ unabhängig von } h.$$

Das Fermatsche Prinzip

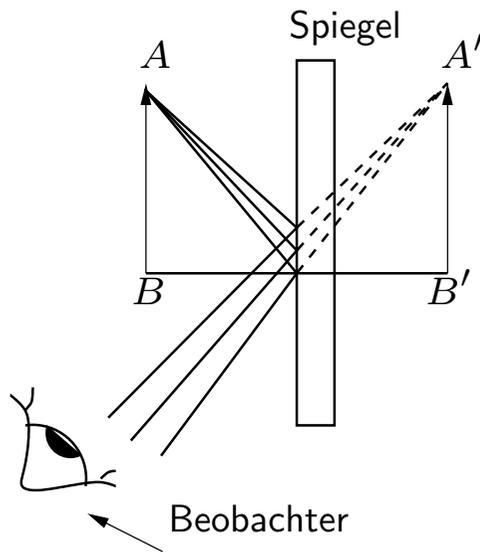


Unsere Beobachtungen haben soweit gezeigt, dass Licht in einem Medium immer auf Geraden verläuft und beim Übergang gemäß dem Brechungsgesetz von Snellius gebrochen wird. Das Prinzip von Fermat besagt nun, dass das Licht von einem Punkt P_1 zum Punkt P_2 immer den Weg wählt, der die kürzeste Zeit braucht. Dieser braucht nicht unbedingt der streckenmäßig kürzeste Weg zu sein.

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{c(s)} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{n(s)ds}{c} = \text{minimal, d. h. } \delta \int_{P_1}^{P_2} n(s)ds = 0,$$

wo das Symbol δ hier eine infinitesimale Variation des optischen Weges gegenüber dem minimalen Weg bedeutet. Aus diesem Prinzip lässt sich das Brechungsgesetz einfach herleiten.

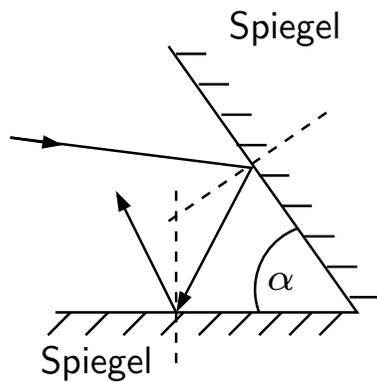
Optische Abbildungen: reelle und virtuelle Punkte



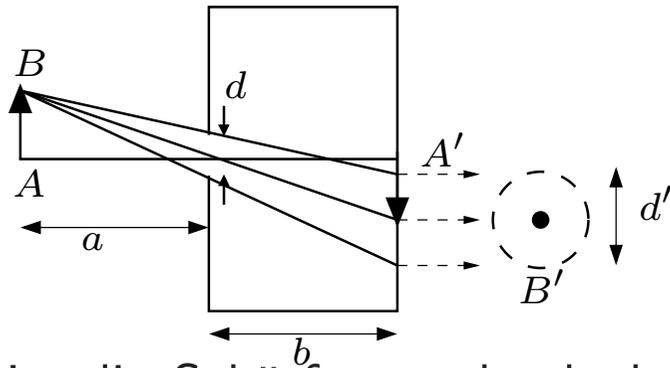
Als einfachste optische Abbildung können wir den ebenen Spiegel betrachten, der einen Gegenstand AB in ein gleich großes Bild $A'B'$ abbildet. Einige Lichtstrahlen, die vom Punkt A emittiert werden, werden am Spiegel reflektiert und erreichen ein Auge (Beobachter). Wir sehen den Gegenstand AB *scheinbar* hinter dem Spiegel. Solche Bilder, die nicht mit einem Schirm bzw. einer Kamera aufgefangen werden können, heißen **virtuelle** (scheinbare) Bilder. Auffangbare Bilder heißen **reelle** Bilder. Die Begriffe “reell” und “virtuell” werden auch für Objekte verwendet, der Punkt A ist ein reeller Objektpunkt, der Punkt A' ist ein virtueller Bildpunkt.

Zwei Spiegel

Übung: Beschreiben Sie den Weg eines Lichtstrahls, der zwischen zwei schräg gestellte Spiegel fällt. Für welchen Winkel α zwischen den Spiegeln werden ein- und austretender Strahl parallel? [90 Grad]



Camera Obscura: Lochkamera



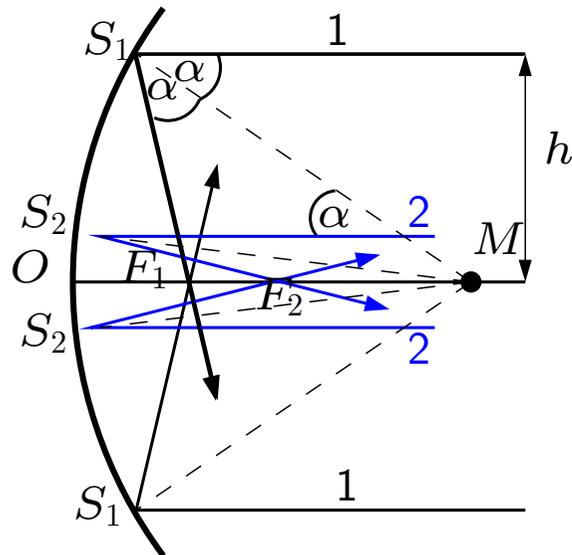
Die nächsteinfachste Abbildung erreicht man mit einer Lochkamera oder z. B. in einem abgedunkelten Zimmer, in das durch ein kleines Loch Licht von außen eindringt (camera obscura). Die Schärfe der Abbildung hängt von der Geometrie ab. Ist der Abstand a des Objektes von der Blende der Kamera groß gegenüber den inneren Dimensionen b , so

ist die Schärfe nur durch den Durchmesser der Eintrittsblende (Loch) gegeben. Nach Strahlensatz haben wir $d' : d = a + b : a$ und damit

$$d' = \frac{(a + b)}{a} \cdot d.$$

Allerdings wird das Bild für sehr kleine Lochblenden wieder unscharf, hier beginnen Effekte der Beugung eine Rolle zu spielen (beugungslimitierte Abbildung).

Hohlspiegel



Als nächstes optisches Element betrachten wir den sphärischen Hohlspiegel mit Mittelpunkt M und Radius R . Zwei achsenparallele Strahlenpaare 1 und 2 werden am Spiegel nach dem Reflexionsgesetz gespiegelt und schneiden sich je in ihren **Brennpunkten** F_1 und F_2 .

Das Dreieck MF_iS_i ist gleichschenkelig (gleiche Winkel α) und folglich gilt $R/2 = \overline{FM} \cos \alpha$ und deshalb

$$\overline{OF} = R \left(1 - \frac{1}{2 \cos \alpha} \right).$$

Für kleine Abstände h des Strahls von der Achse wird α sehr klein und $\cos \alpha \approx 1$,

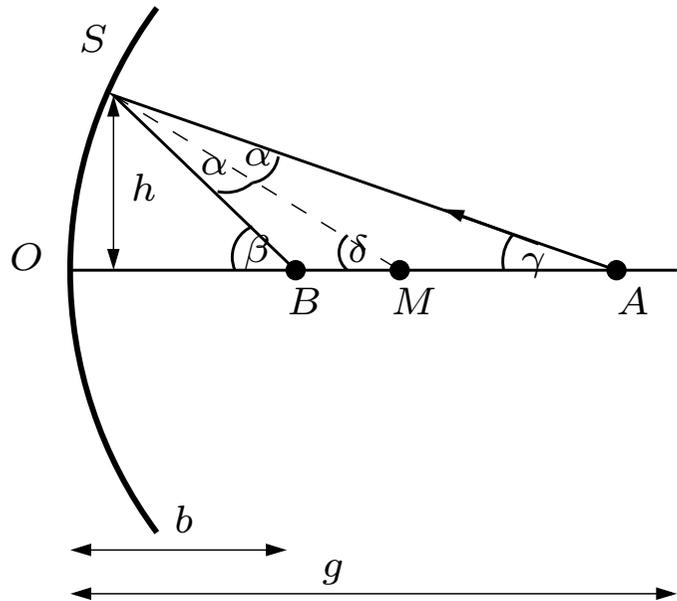
womit

$$\overline{OF} = f = R/2.$$

Allerdings ist zu beachten, dass die **Brennweite** f bei sphärischen Hohlspiegeln vom Abstand des Strahls von der Achse abhängt! Mit $h = R \sin \alpha$ und $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ folgt

$$\begin{aligned} f &= R \left(1 - \frac{1}{2 \cos \alpha} \right), \\ &= R \left(1 - \frac{1}{2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \right), \\ &= R \left(1 - \frac{R}{2 \sqrt{R^2 - h^2}} \right). \end{aligned}$$

Abbildung durch einen sphärischen Hohlspiegel



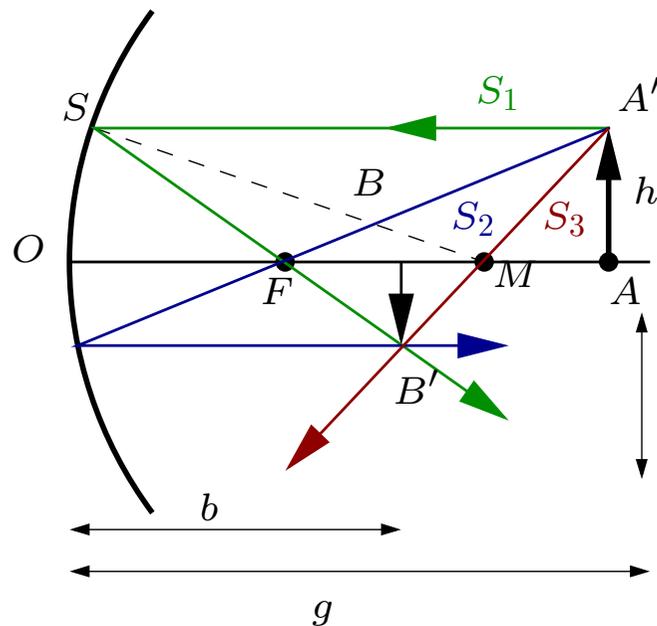
Wir betrachten die Abbildung eines Gegenstands A , der in einer Entfernung (**Gegenstandsweite**) $g = \overline{OA}$ auf der Achse liegt, in einen Bildpunkt B im Abstand (**Bildweite**) $b = \overline{OB}$. Im Dreieck $\triangle MSA$ ist der Winkel $\delta = \alpha + \gamma$, im Dreieck $\triangle BSM$ ist $\beta = \delta + \alpha$. Damit ist $\gamma + \beta = 2\delta$. Für kleine Winkel β und γ , also für achsennahe Strahlen, gilt

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{h}{g}, \quad \beta \approx \tan \beta = \frac{h}{b}, \quad \delta \approx \sin \delta = \frac{h}{R},$$

woraus wir die sog. **Spiegel-** oder **Linsenformel** finden:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} \approx \frac{2}{R} \approx \frac{1}{f}.$$

Konstruktion eines Bildes



Zur Konstruktion des Bildes eines Pfeils $\vec{AA'}$ gehen wir wie folgt vor:

1. Strahl S_1 parallel zur Achse auf Spiegel zeichnen, der Schnittpunkt des reflektierten Strahls mit der Achse \overline{OM} definiert den Brennpunkt F .

2. Strahl S_2 durch den Brennpunkt zeichnen. Der reflektierte Strahl muss parallel zur Achse \overline{OM} sein.

3. Der Schnittpunkt der reflektierten Strahlen ist

der Bildpunkt B' der Pfeilspitze A' .

4. Als Kontrolle Strahl S_3 durch den Mittelpunkt M zeichnen. Er wird in den Mittelpunkt zurückreflektiert und muss auch durch den Bildpunkt B' gehen.

Punkte 2 und 4 können vertauscht werden.

Es entsteht also ein umgekehrtes Bild.

Achtung: Die Konstruktion gilt nur in der paraxialen Näherung (achsennahe Strahlen). Versuchen Sie's mit Zirkel und Lineal!

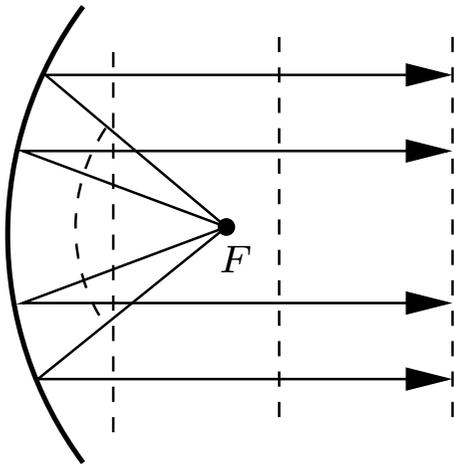
Den Abbildungsmaßstab bestimmt man mit Hilfe des Strahlensatzes. Für paraxiale Strahlen gilt

$$\overline{AA'} : g - R \approx \overline{BB'} : R - b,$$

woraus man mit Hilfe der Spiegelformel findet

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} \longrightarrow R = \frac{2b}{g + b} \text{ in } \frac{g - R}{R - b} \text{ einsetzen ergibt } \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = \frac{g}{b}.$$

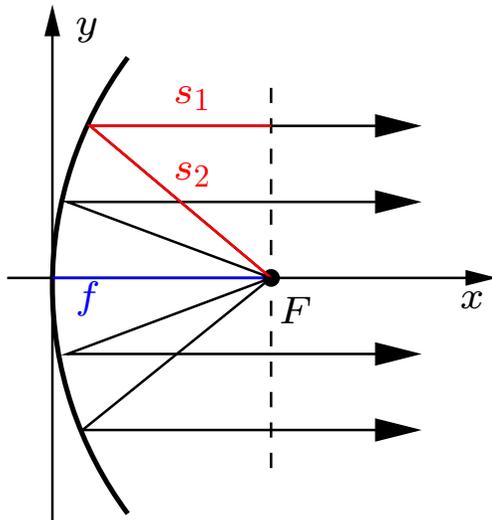
Parabolspiegel



Oft werden statt sphärischer Spiegel sog. Parabolspiegel verwendet. Deren Form ist, wie ihr Name sagt, nicht sphärisch, sondern parabolisch. Sie haben die sehr schöne Eigenschaft, dass achsenparallele Strahlen alle in denselben Brennpunkt fallen. Dies kann einfach gezeigt werden. Eine Phasenfläche (hier gestrichelt gezeichnet), die kugelförmig vom Brennpunkt ausgeht, geht in parallele Ebenen über.

Übung: Tun Sie dies!

Lösung zum Parabolspiegel



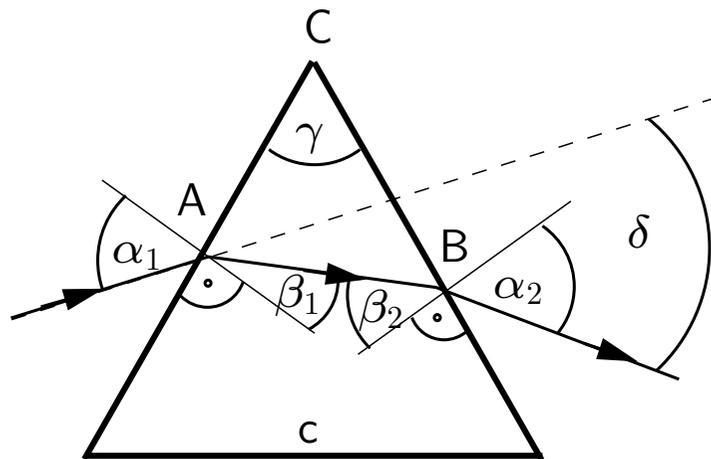
Offensichtlich muss $s = s_1 + s_2$ unabhängig vom Achsenabstand y bzw. über die Parabelgleichung auch unabhängig von x sein.

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ &= f - x + \sqrt{y^2 + (f - x)^2} \\ &= f - x + \sqrt{y^2 + f^2 - 2fx + x^2} \end{aligned}$$

s ist unabhängig von y bzw. x , wenn der Ausdruck unter der Wurzel gerade gleich $(f + x)^2$ ist. Also muss für einen Parabolspiegel

$$y^2 = 4fx \text{ gelten, womit dann } s = f - x + (f + x) = 2f.$$

Prismen



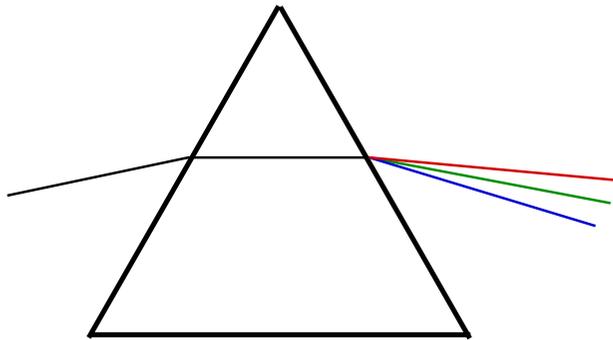
Prismen dienen in der Optik primär zwei Zwecken, der Umlenkung und der spektralen Zerlegung von Licht. Wir betrachten zunächst die erste Anwendung, die Um- und Ablenkung von Licht. Der Abb. links entnehmen wir, dass $\delta = \alpha_1 - \beta_1 + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$.

Oft will man den Austrittswinkel δ als Funktion des Einfallswinkels α_1 und des Prismenwinkels γ schreiben. Die Winkelsumme in ΔABC ist $\gamma + \pi/2 - \beta_1 + \pi/2 - \beta_2$ und folglich $\gamma = \beta_1 + \beta_2$. Damit gilt

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma.$$

Zu erwähnen bleibt lediglich noch, dass die Winkel des Prismas zur Seite c irrelevant sind, solange sich der Lichtstrahl nicht mit dieser Seite kreuzt.

Spektrale Zerlegung und der Regenbogen



Wir haben bereits am Beispiel des astronomischen Silikates (Seite 8) gesehen, dass der Brechungsindex von der Wellenlänge abhängt. Licht mit verschiedenen Wellenlängen wird also verschieden stark gebrochen. Weil blau etwas stärker gebrochen wird² als rot, wird blau eben stärker abgelenkt als rot.

Neben dem Prisma ist der Regenbogen die wohl berühmteste **Dispersions-Erscheinung**. Dabei werden (weiße) Sonnenstrahlen in Wassertröpfchen gebrochen. Um einen Regenbogen sehen zu können, muss der Strahl einmal im Inneren des Tröpfchens reflektiert werden. Dann erscheint immer Violett innen im Regenbogen und Rot außen³. Viele Informationen dazu bei Wikipedia (<http://de.wikipedia.org/wiki/Regenbogen>).

²Darum ist der Himmel blau!

³Beim schwächeren Nebenregenbogen ist die Situation nach zwei internen Reflexionen umgekehrt.

