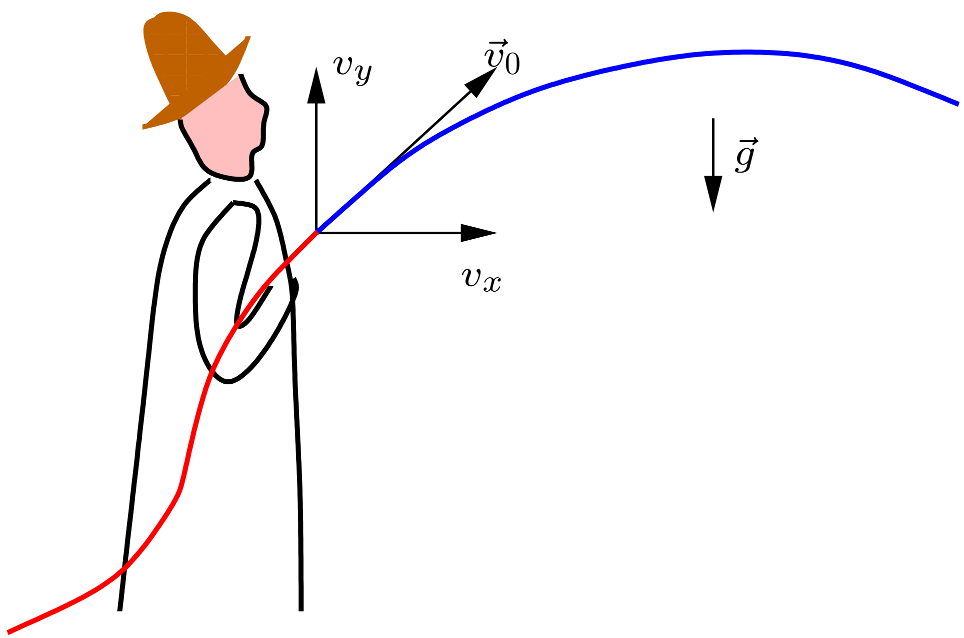
Schiefer Wurf



Gärtner X sinniert über die Form des Wasserbogens? Wer kann ihm helfen?

Dazu müssen wir die Höhe y als Funktion des Abstands x ausdrücken. Wir wissen bereits, dass

$$y(t) = y_0 + v_y \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t \quad \Longrightarrow t = \frac{x(t) - x_0}{v_x}$$

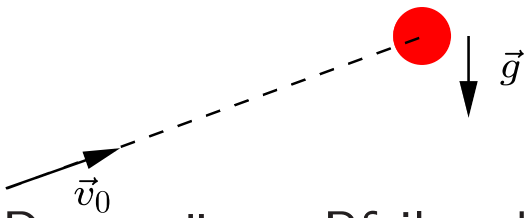
Die Bewegung in x-Richtung ist linear in t (nicht beschleunigt) und wir können den Abstand x als ein (lineares) Maß für die Zeit verwenden.

Einsetzen von $t(x(t))$ in $y(t)$ liefert

$$
\begin{aligned}
y(x(t)) \quad &= \quad y_0 + v_y \cdot \left(\frac{x(t) - x_0}{v_x}\right) - \frac{1}{2}\, g \cdot \left(\frac{x(t) - x_0}{v_x}\right)^2, \\
&= \quad y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0 - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_0}{v_x}\right) \\
&\quad\quad + \frac{v_y}{v_x} x(t) + g \frac{x_0}{v_x^2} x(t) \\
&\quad\quad - \frac{1}{2} g \frac{x(t)^2}{v_x}.
\end{aligned}
$$

Das ist eine Parabel der Form $y(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$. Ein Wasserstrahl beschreibt also eine Parabel, die Bahn eines geworfenen Steines auch.

Freier Fall



Wilhelm Tell für Fortgeschrittene. Wilhelm Tell zielt exakt auf den Apfel. In dem Moment, in dem er abdrückt, fällt der Apfel vom Baum[1]. Trifft er ihn?

Dazu müssen Pfeil und Apfel dieselbe Höhe y haben, wenn der Pfeil den Abstand x zwischen Wilhelm Tell und Apfel zurückgelegt hat, also auf den Apfel trifft.

Ohne Erdanziehung hätte der Pfeil den Apfel getroffen. Sobald Pfeil und Apfel frei sind (also fallen), spüren sie diese aber und zwar gleich lange.

$$y(t)_{\mathrm{P}} = y_{0,\mathrm{P}} + v_{y,0,\mathrm{P}} \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad \text{und} \quad y(t)_{\mathrm{A}} = y_{0,\mathrm{A}} - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Weil aber $y_{0,\mathrm{A}} = y_{0,\mathrm{P}} + v_{y,0,\mathrm{P}} \cdot t$, wo $t = x/v_x$, trifft der Pfeil genau in den Apfel.

[1] Redigierte und für den Hörsaal geeignete Fassung.

Trägheit: Das erste Newtonsche Gesetz I

Gleichförmige Bewegung $\rightarrow$ in mitbewegtes Bezugssystem transformieren und der Körper ist in Ruhe!

Zerlegung von Bewegungen (Boot im Fluss, Flugzeug mit Seitenwind): Eine gleichförmige, geradlinige Bewegung erscheint in allen sich gleichförmig, geradlinig bewegenden Bezugssystemen gleichförmig und geradlinig.

Newton 1: Ein Körper, auf den keine äußeren Einflüsse wirken, verharrt in Ruhe bzw. einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung.

Das “Bestreben” eines Körpers, in einer gleichförmig geradlinigen Bewegung zu verharren, nennt man “Trägheit” (Bsp. Passagiere im abrupt bremsenden Bus).

Trägheit: Das erste Newtonsche Gesetz II

Was ist "Trägheit"? "Bestreben"? "Gleichförmig, geradlinig"? Bleibt ein Körper nicht irgendwann mal stehen?

- Gleichförmig, geradlinig: $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$.
- Stehenbleiben: Bei rauhen Unterlagen schon... und bei weniger rauhen Unterlagen dauert's länger, etc., bis der Körper eben nicht mehr stehen bleibt! Ein Effekt der Reibung, die wir bald genauer untersuchen werden.
- Trägheit: Eine Eigenschaft des Körpers und der Bewegung. "Schwere" Körper sind "träger", wie auch "schnelle" Körper. Und dann erst "schnelle", "schwere" Körper! Also: <u>Trägheit $\rightarrow$ Impuls $\vec{p} \doteq m\vec{v} =$ "Impuls".</u>

Trägheit: Das erste Newtonsche Gesetz III

Dabei haben wir einen bisher undefinierten Begriff “Masse” eingeführt, den wir im Folgenden genauer einführen werden. Soweit halten wir fest:

Newton 1, zweite Formulierung: Ein Körper, auf den keine äußeren Einflüsse wirken, behält seinen Impuls bei:

$$\vec{F} = \vec{0}, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}.$$

Die Kraft: Das zweite Newtonsche Gesetz I

Wir definieren Kraft als den äußeren Einfluss $\vec{F}$, der den Impuls $\vec{p}$ eines Körpers verändert.

$$\vec{F} \doteq \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Wir betrachten zunächst Körper konstanter Masse. Verändert sich deren Impuls, so wirkt auf den Körper eine Kraft, welche in diesem Fall eine Geschwindigkeitsänderung, also eine Beschleunigung hervorruft.

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} \quad \text{für konstante Masse } m$$

Die Kraft: Das zweite Newtonsche Gesetz II

<u>Newton 2:</u> Wirkt eine Kraft auf einen Körper, so ändert sich sein Impuls proportional zur und entlang der angreifenden Kraft.

Newton 2 ist das Grundgesetz der Dynamik. In der Form

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

gilt es z. B. sowohl für eine Rakete in, wie auch nach der Brennphase.

Masse

Der soeben eingeführte Begriff der Masse ist nicht unproblematisch. So ist der Ursprung der Masse heute nicht geklärt, nach dem sehr wahrscheinlich zugrunde liegenden Higgs-Boson wird nach wie vor gesucht. Die Problematik äußert sich auch in der Definition der Masse, dem etwas archaisch anmutenden Urkilogramm in Paris! Die Masse ist additiv. Wir definieren sie als den Proportionalitätsfaktor zwischen Kraft und Beschleunigung (sog. träge Masse)

$$m \doteq \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}, \qquad [m] = \mathrm{kg} = \mathrm{Kilogramm.}$$

Folglich

$$[p] = \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}}, \qquad [F] = \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N} = \mathrm{Newton.}$$

Dichte

Mit den bekannten Größen kann nun auch die Dichte ρ definiert werden als das Verhältnis von Masse zum aufgespannten Volumen V eines homogenen Körpers:

$$\text{Dichte } \rho \doteq \frac{m}{V}, \qquad [\rho] = \mathrm{kg/m^3}.$$

Dabei braucht die Dichte nicht konstant zu sein, sondern kann z. B. von der Temperatur oder dem Druck abhängig sein.

Dichte inhomogener Körper

Für inhomogene Körper wird der Körper unterteilt in lauter infinitesimale Volumina ΔV, die Dichte am Ort $\vec{r}$ ist definiert durch das Verhältnis der Masse des infinitesimalen Massenelementes Δm am Ort $\vec{r}$ zum Volumenelement ΔV,

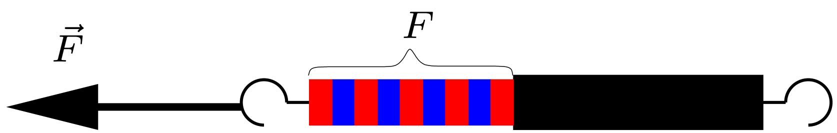
$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \longrightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}.$$

Damit ist die Masse eines solchen Körpers durch ein Volumenintegral gegeben

$$m = \int \mathrm{d}m = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}z\ \rho(\vec{r}) = \int \mathrm{d}V \rho(\vec{r}).$$

Addition von Kräften

Kräfte $\vec{F}_i$ addieren sich also auch nach den Regeln der Vektoraddition. Das besonders einfache Beispiel $\vec{F} + \left(-\vec{F}\right) = \vec{0}$ wird ausgenutzt, um Kräfte zu messen.

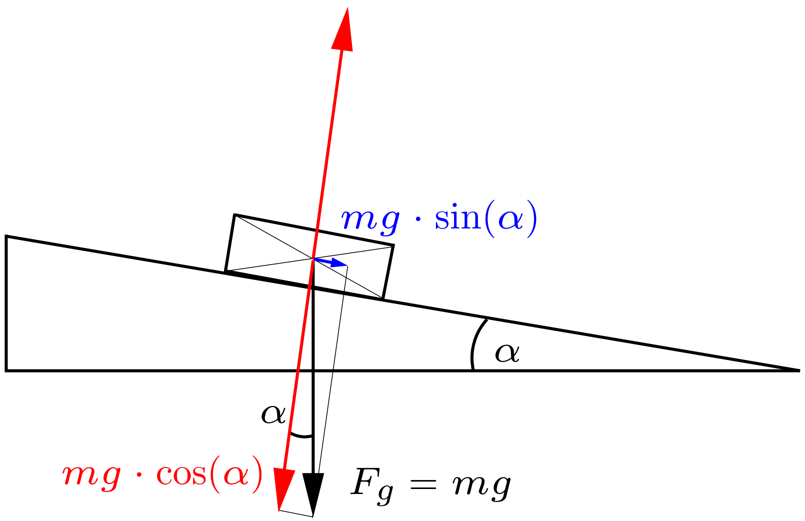


Mehrere auf einen Massenpunkt wirkende Kräfte können durch ihre Vektorsumme ersetzt werden:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i$$

Zerlegung von Kräften

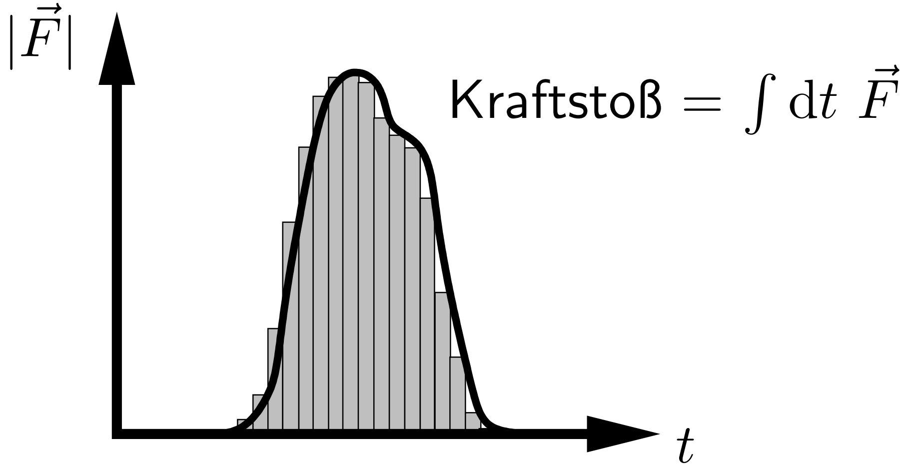
Die Kraft $\vec{F}$ ist ein Vektor und zeigt in dieselbe Richtung wie die Beschleunigung $\vec{a}$, ist aber m Mal größer ($\vec{F} = m\vec{a}$). Nach den Regeln der Vektorrechnung lässt sich $\vec{F}$ nach Komponenten zerlegen oder zusammensetzen, **Vektoraddition!** Beispiel schiefe Ebene:



Der Kraftstoß

Nicht immer kann die Beschleunigung eines Körpers über längere Zeit gemessen werden, z. B. wenn die Kraft nur sehr kurz wirkt (Bsp. Hammerschlag). Trotzdem ändert der Körper seinen Bewegungszustand, seinen Impuls, aufgrund des erfolgten Kraftstoßes $\vec{F} \cdot \tau = m \cdot \vec{a} \cdot \tau$.

$$
\begin{aligned}
\vec{F}\tau &= m\vec{a}\tau \\
\vec{a}\tau &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \\
\vec{F}\tau &= m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \\
\vec{F}\tau &= m\Delta\vec{v} \\
\vec{F}\tau &= \Delta\vec{p}
\end{aligned}
$$



Der Kraftstoß II

Dies kann auch mit Newton 2 verstanden werden:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{F}\mathrm{d}t &= \mathrm{d}\vec{p} \\ \int \mathrm{d}t\,\vec{F} &= \int \mathrm{d}\vec{p}\ .\end{aligned}$$

Ist der Körper in Ruhe gestartet, so bewirkt der Kraftstoß eine Impulsänderung, die gerade gleich seinem Totalimpuls ist.

$$\int_0^t \mathrm{d}t'\,\vec{F}(t') = \int_0^{\vec{p}} \mathrm{d}\vec{p}' = \vec{p}$$

Die vier Grundkräfte, Wechselwirkungen (WW)

Soweit haben wir nur die Gravitation als Grundkraft bekannt gemacht. Es gibt natürlich auch andere Kräfte, die uns aber, ihrer Natur wegen, wesentlich weniger bekannt sind. Eine elektrische Ladung führt zu elektromagnetischen Kräften, eine systematische Ausrichtung der Spinrichtungen in einem Festkörper zu magnetischen Kräften, in Kernen und subatomaren Partikeln wirken weitere, noch weniger bekannte Kräfte. Trotzdem scheint es, als ob die Natur sich durch vier grundlegende Kräfte beschreiben lässt:

Kraft / WW	Stärke	Reichweite	Eichboson	WW-Partner
Gravitation	10^{-38}	∞	Graviton	alle Teilchen
schwache WW	10^{-14}	10^{-18}m	$W^{\pm}$, Z	Leptonen, Hadronen
Elektromagnetismus	10^{-2}	∞	Photon	elektr. Ladung
starke WW	1	10^{-15}m	Gluonen	Farbladung, Quarks

Eine Bewegungsgleichung

Auf einen Körper der Masse m wirke eine Kraft $\vec{F}(\vec{x})$. Dann wird dieser beschleunigt nach der Bewegungsgleichung

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{x}).$$

Diese kann in eine Differentialgleichung umgeformt werden

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}),$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die Bewegungsgleichung für den Körper. Je nach $\vec{F}(\vec{x})$ ergeben sich andere Bewegungen.

Die Federkraft

Die Kraft, die für die Auslenkung l einer Feder notwendig ist, ist proportional zur Auslenkung l,

$$F' \propto l, \quad \text{bzw.} \quad F' = Dl,$$

bzw. bei einer gegebenen Auslenkung wirkt eine rücktreibende Kraft F. Die Proportionalitätskonstante D ist von der Art der Feder abhängig und heißt deshalb Federkonstante. Die Bewegung einer Feder führt zu Schwingungen.

$$F = m\ddot{x} = -Dx$$

bzw.

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x.$$

Bewegungsgleichung für die Auslenkung einer Feder

Wir wollen die Gleichung

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x$$

lösen. Sie beschreibt einen äußerst wichtigen Modellfall der Physik, den sog. harmonischen Oszillator. Sie kann auf zwei äquivalente Arten, mit zwei äquivalenten Ansätzen, gelöst werden.

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$$

oder

$$x(t) = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t}.$$

Weil die Lösung reell sein muss, muss im zweiten Fall B gleich dem Konjugiert-komplexen von A sein, $B = \bar{A}$.

Bewegungsgleichung für die Auslenkung einer Feder II

Die Werte für A und B folgen aus den **Anfangsbedingungen** $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.

$$\begin{aligned} x_0 &= Ae^{i\omega t_0} + Be^{-i\omega t_0} \\ \dot{x}_0 &= Ai\omega e^{i\omega t_0} - Bi\omega e^{-i\omega t_0}. \end{aligned}$$

Löse erste Gleichung nach A auf, setze in zweite Glg. ein und löse nach B auf

$$\begin{aligned} A &= \left(x_0 - Be^{-i\omega t_0}\right) e^{-i\omega t_0} \quad \text{in} \;\; \dot{x}_0 \\ \dot{x}_0 &= i\omega \left(x_0 - Be^{-i\omega t}\right) e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t_0} - i\omega Be^{-i\omega t_0} \end{aligned}$$

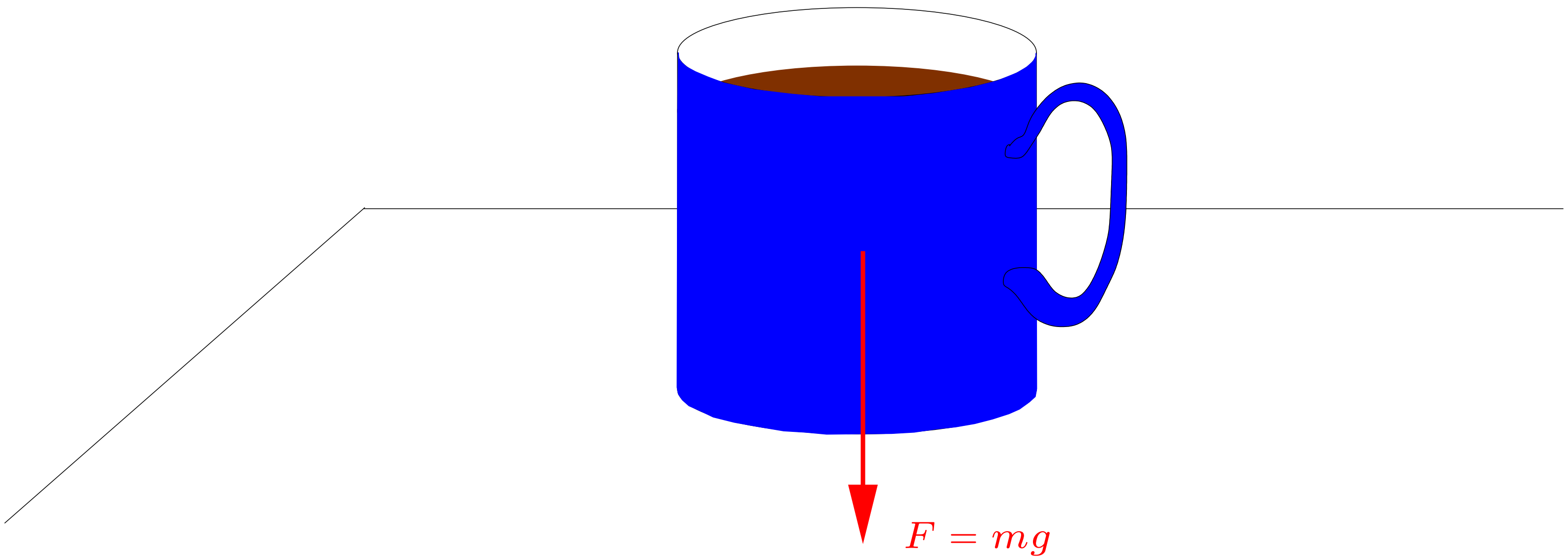
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= i\omega x_0 - 2i\omega B e^{-i\omega t_0} \quad \text{also} \\
B &= \frac{1}{2}\left(\frac{i\dot{x}_0}{\omega} + x_0\right) e^{i\omega t_0}.
\end{aligned}
$$

Dies setzen wir in die Gleichung für A ein

$$
\begin{aligned}
A &= \left(x_0 - B e^{-i\omega t_0}\right) e^{-i\omega t_0} \\
A &= \left(x_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{i\dot{x}_0}{\omega} + x_0\right) e^{i\omega t_0} e^{-i\omega t_0}\right) e^{-i\omega t_0} \\
A &= \left(\frac{x_0}{2} - \frac{i}{2}\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) e^{-i\omega t_0} \quad \text{und} \\
B &= \left(\frac{x_0}{2} + \frac{i}{2}\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) e^{i\omega t_0}.
\end{aligned}
$$

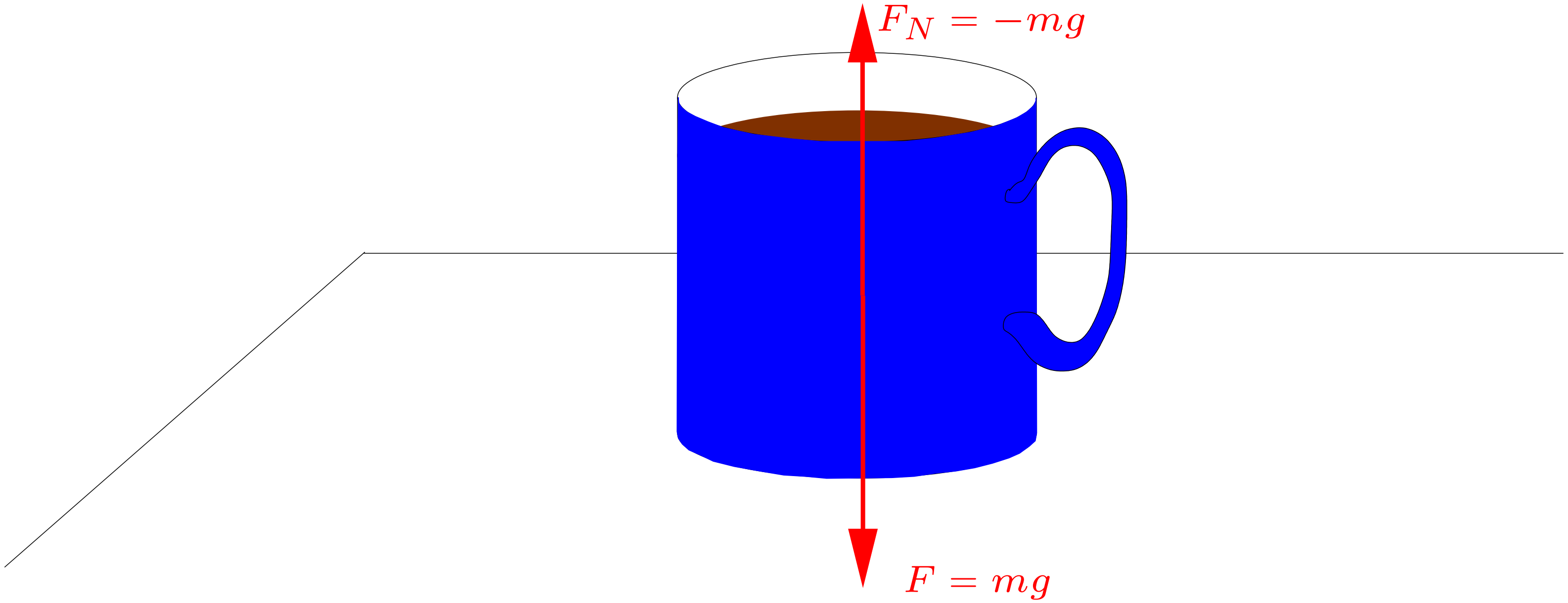
"Actio = Reactio", das dritte Newtonsche Gesetz

Wenn auf die Tasse auf dem Tisch die Erdanziehungskraft wirkt, also eine Kraft, warum bewegt sich die Tasse nicht beschleunigt, wie sie es nach Newton 2 sollte?



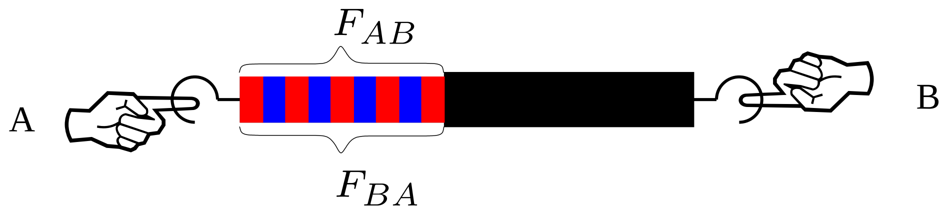
Newton 3 II

Auf die Tasse wirkt eine “Reaktionskraft” $F_N = -mg$, welche die Gewichtskraft kompensiert. Sie heißt **Normalkraft**, weil sie entlang der Oberflächennormalen wirkt. $F + F_N = 0$, womit die Tasse an ihrem Ort zum Trinken bereit bleibt.



Newton 3 III

<u>Newton 3:</u> **Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit einer Kraft F_{AB}, so wirkt umgekehrt der Körper B auf den Körper A mit einer Kraft $F_{BA} = -F_{AB}$. "Actio = Reactio"**



Wer zieht? Wer wird gezogen?

Reibungskräfte

Ein wesentliches Verdienst von Newton war das Erkennen des Einflusses der Reibung auf die Bewegung alltäglicher Körper. Reibungskräfte sind proportional zur Normalkraft F_N. Wir unterscheiden zwischen verschiedenen Reibungsarten:

- Haftreibung
- Gleitreibung
- Rollreibung

Haftreibung

Haftreibungskraft: Größte Kraft, die den Körper gerade noch nicht in Bewegung versetzt.

- unabhängig von der Größe der Berührungsfläche
- proportional zur Normalkraft

$$F_H = \mu_H \cdot F_N$$

- abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit

μ_H heißt Haftreibungskoeffizient.

Gleitreibung

Gleitreibungskraft: Kraft, die den Körper gerade noch in gleichförmiger Bewegung hält.

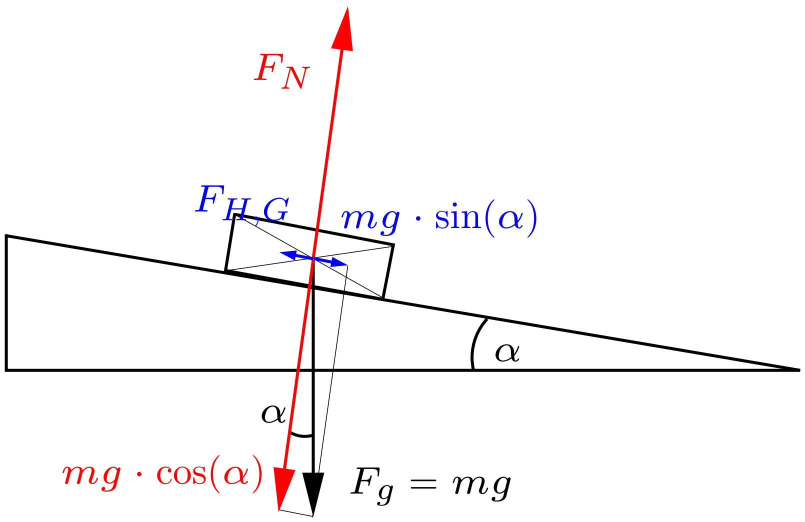
- unabhängig von der Größe der Berührungsfläche
- proportional zur Normalkraft

$$F_G = \mu_G \cdot F_N$$

- abhängig von der Oberflächenbeschaffenheit

$\mu_G < \mu_H$ heißt Haftreibungskoeffizient.

Messung der Haft- und Gleitreibung



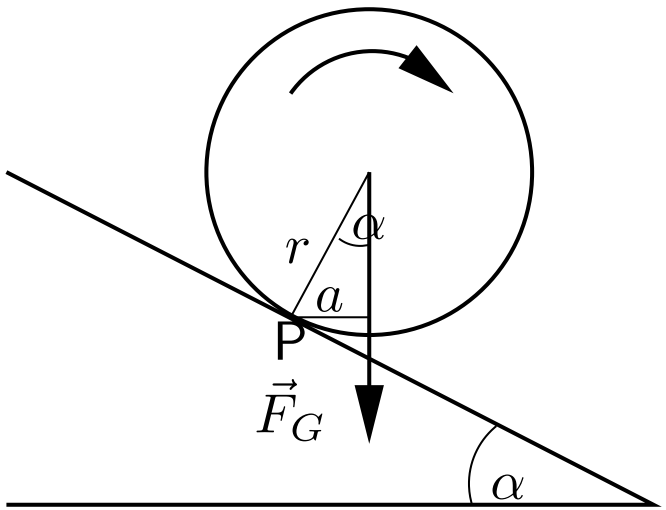
$$\sum \vec{F}_i = mg\cos\alpha_{H,G} + F_N + mg\sin\alpha_{H,G} + F_{H,G} = 0$$
$$\sum F_\perp = mg\cos\alpha_{H,G} + F_N = 0$$
$$\sum F_\parallel = mg\sin\alpha_{H,G} + F_{H,G} = 0$$

α_H: Haftreibungswinkel
α_G: Gleitreibungswinkel

Weil $F_H = \mu_H F_N = m \cdot g \cdot \sin\alpha_H$ bzw. $F_G = \mu_G F_N = m \cdot g \cdot \sin\alpha_G$

$\mu_H = \tan\alpha_H$ bzw. $\mu_G = \tan\alpha_G$

Rollreibung

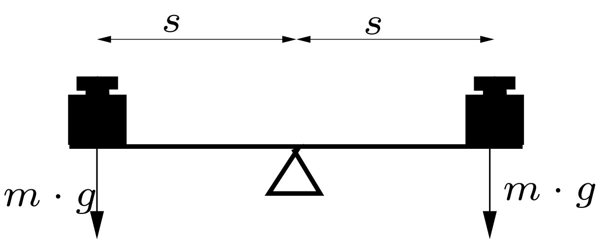


Drehmoment $F_G a = F_G r \sin\alpha$ wird kompensiert durch Drehmoment aufgrund der Reibungskraft

$M_R = \mu_{\text{Roll}} F_G \cos\alpha$

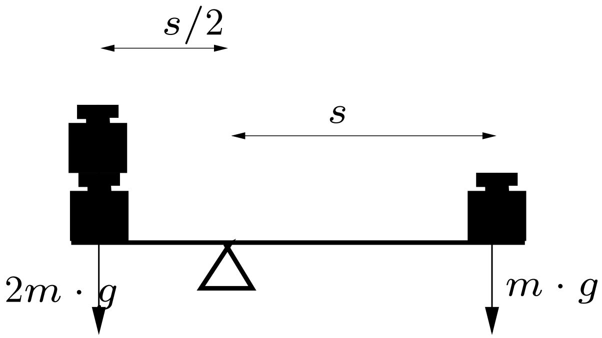
$\mu_{\text{Roll}} = r \tan\alpha$ ist nicht einheitslos!

Arbeit und Leistung



$$\Leftrightarrow \qquad mgs = mgs$$

$$mgs = \text{const.}$$



$$\Leftrightarrow \qquad 2mgs/2 = mgs$$

$$\vdots$$

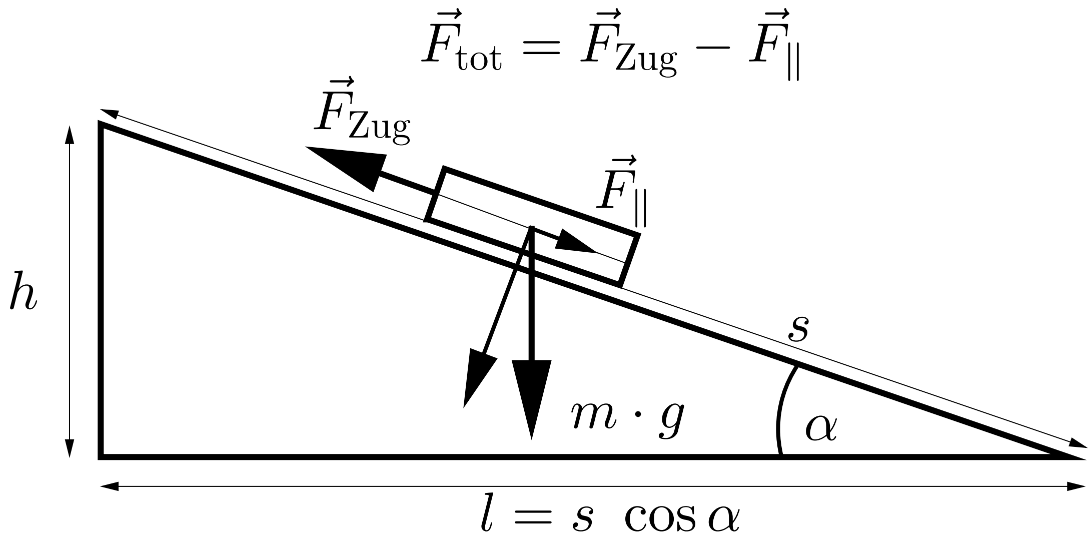
$$\vdots \qquad \Leftrightarrow \qquad nmgs/n = mgs$$

Arbeit und Leistung

Arbeit ist Kraft mal Weg

- Gotthardstraße
- Treppe und Lift
- Feder
- Bergsteiger/Wanderer

Arbeit und Leistung



Gleichmässige Bewegung:

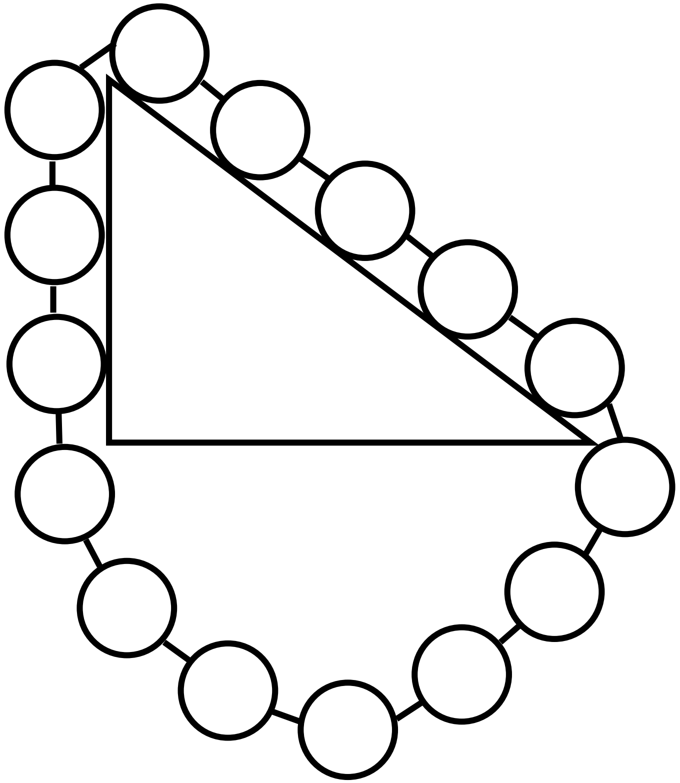
$\vec{F}_{\mathrm{zug}} = -\vec{F}_{\parallel}$

$F_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

$A = F_{\parallel} \cdot s \quad ; \quad s = \frac{h}{\sin\alpha}$

$A = \frac{mg \sin\alpha h}{\sin\alpha} = mgh$

Arbeit und Leistung

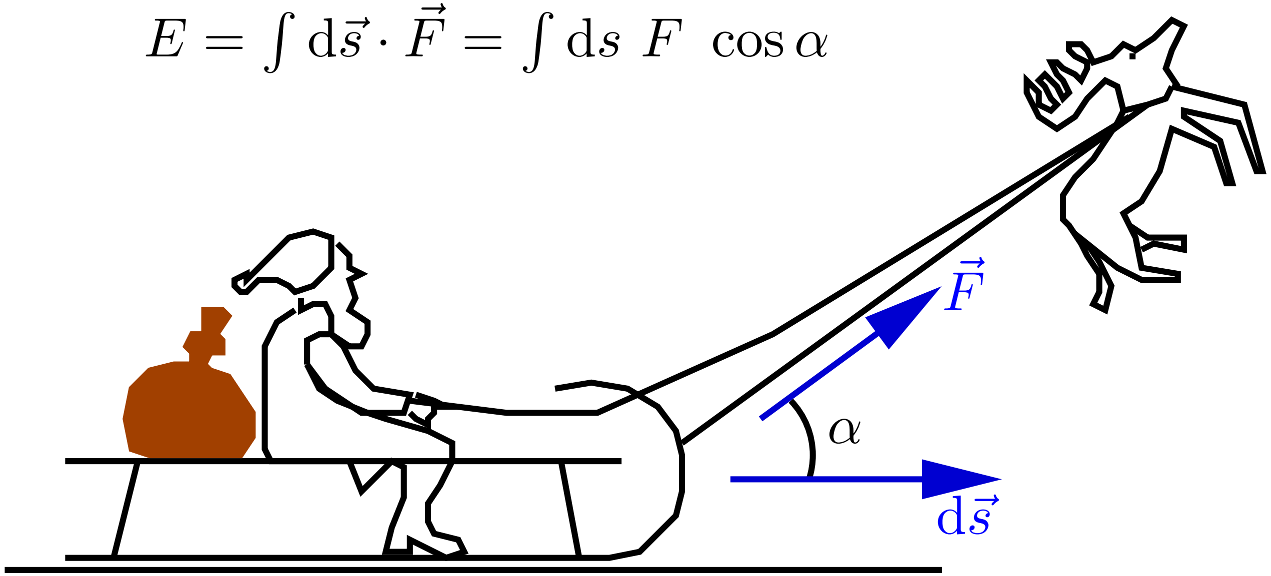


Wunder ist
kein Wunder

Simon Stevin,
um 1600

Arbeit und Leistung

$$E = \int \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{F} = \int \mathrm{d}s \; F \;\; \cos\alpha$$



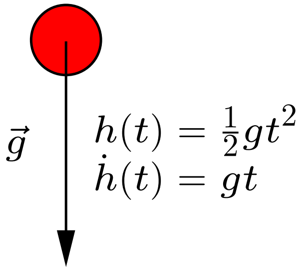
Arbeit und Leistung

$\boxed{\textbf{Arbeit ist Kraft mal Weg}}$ [Arbeit] $=$ N m $=$ J $=$ W s

$\boxed{\textbf{Leistung} = \textbf{Arbeit pro Zeit}}$ [Leistung] $=$ N m/s $=$ J/s $=$ W

Beispiel:
100 kg Backsteine 10 m hochtragen.
$E = mgh = 100 \cdot 9,81 \cdot 10$ kg m^2/s^2 $= 9810$ J $= 2,725$ Wh
dito innerhalb von 10 Minuten: Leistung $P = 9810/600$ J/s $= 16,35$ W.

Potentielle und kinetische Energie



Ein Stein fällt aus seiner ursprünglichen Ruhelage. Dabei wird Energie umgewandelt:

- Energie: gespeicherte, “mögliche” (potentielle) Arbeit
- potentielle Energie: Lageenergie (Wasser im Stausee,. . .)
- kinetische Energie: Bewegungsenergie

Wir wissen bereits, dass die Höhe h und Geschwindigkeit des Steins sich mit der Zeit ändert,

$$h(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2, \text{ also } t = \sqrt{(2h)/g} \text{ in } v(t) = \dot{h}(t) = g\, t, \text{ also } v = g\, \sqrt{(2h)/g} = \sqrt{2gh}.$$

Damit finden wir nun, wie sich potentielle in kinetische Energie umwandelt.

$$E_{\text{pot}} = mgh \longrightarrow v_h = \sqrt{2gh} \longrightarrow h = \frac{v_h^2}{2g} \Longrightarrow mgh = \frac{mgv_h^2}{2g} = \frac{m}{2} v_h^2 = E_{\text{kin}}$$

Energieerhaltung

Energie bleibt erhalten bzw. wird umgewandelt, d. h. $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const.}$
Beispiele:

- Pendel
- Galilei'sches Hemmungspendel

Formal:

$$E = \int \mathrm{d}x \; ma = m \int \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m \int v \; \mathrm{d}v = \frac{m}{2} v^2.$$

Umwandlung von potentieller in kinetische Energie. Oft wird Energie auch in andere Formen umgewandelt, wie Wärme, Schall, Deformation, etc.