Bewegung in Systemen mit mehreren Massenpunkten

Wir betrachten ein System mit mehreren Massenpunkten. Für jeden Massenpunkt i einzeln gilt nach Newton 2:

$$F_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p_i}}{\mathrm{d}t}.$$

Für n Massenpunkte muss also ein System von n Bewegungsgleichungen gelöst werden. Vereinfachend beginnen wir mit $n = 2$.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{21} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t},$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{12} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t},$$

wobei $\vec{F}_{21}$ die Kraft darstellt, welche Massenpunkt 2 auf Massenpunkt 1 ausübt. $\vec{F}_1$ stellt die Kraft dar, welche von außen auf Massenpunkt 1 wirkt. Die Kräfte können z. B. vom Ort oder der Geschwindigkeit abhängen. Nach Newton 3 ist $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Damit fallen die "inneren" Kräfte beim Bilden der Summe der Bewegungsgleichungen heraus:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Ist $\vec{F} = 0$, so ist

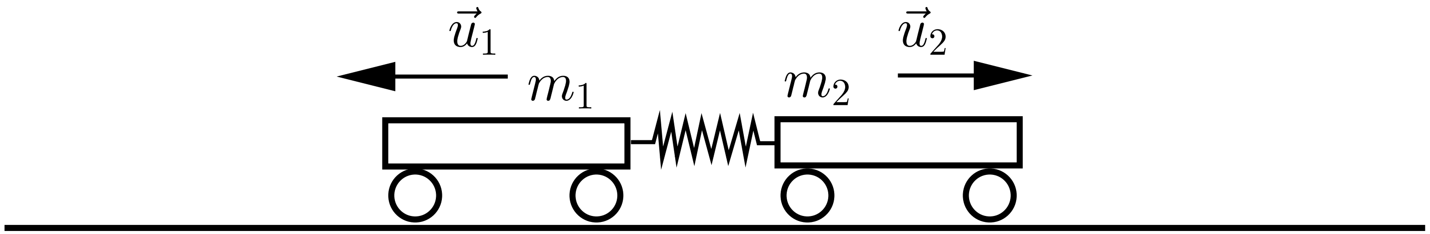
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{bzw. } \vec{p} = \text{const.},$$

analog zum zweiten Newtonschen Gesetz.

Ohne Einwirkung äußerer Kräfte ($\vec{F} = 0$) bleibt in einem System von n Massenpunkten der Gesamtimpuls erhalten ($\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0$).

Impulse und Impulserhaltung

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$$



Danach muss gelten

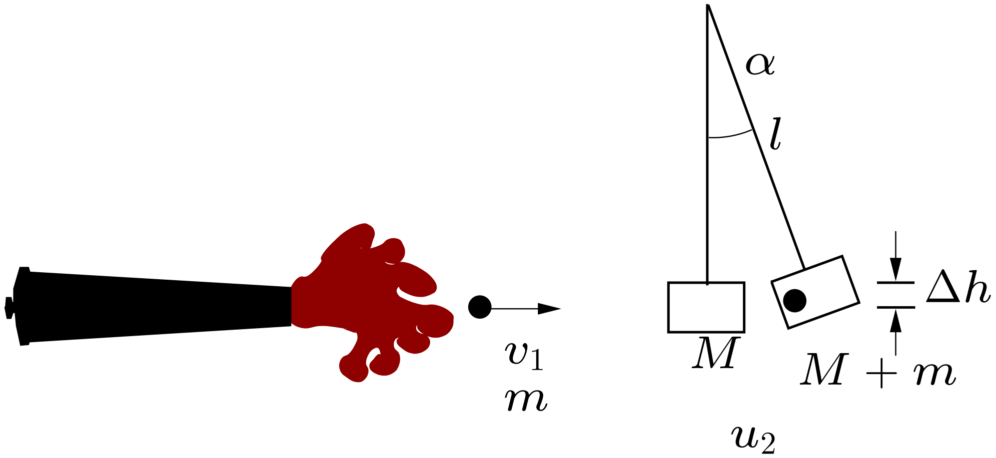
$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0,$$

woraus sofort folgt, dass

$$u_2 = -\frac{m_1}{m_2} u_1.$$

Beispiel: Rakete, hier verändert sich allerdings m mit der Zeit. . .

Anwendung: Ballistisches Pendel



$$u_2 = \sqrt{2g\Delta h}$$
$$mv_1 = (m + M)u_2$$
$$v_1 = \ldots \text{ Übung!}$$

Frage: Wie groß ist der Anteil der Energie, der in Wärme und Deformation umgewandelt wird?

Stöße

Man unterscheidet verschiedene Sorten von Stößen:

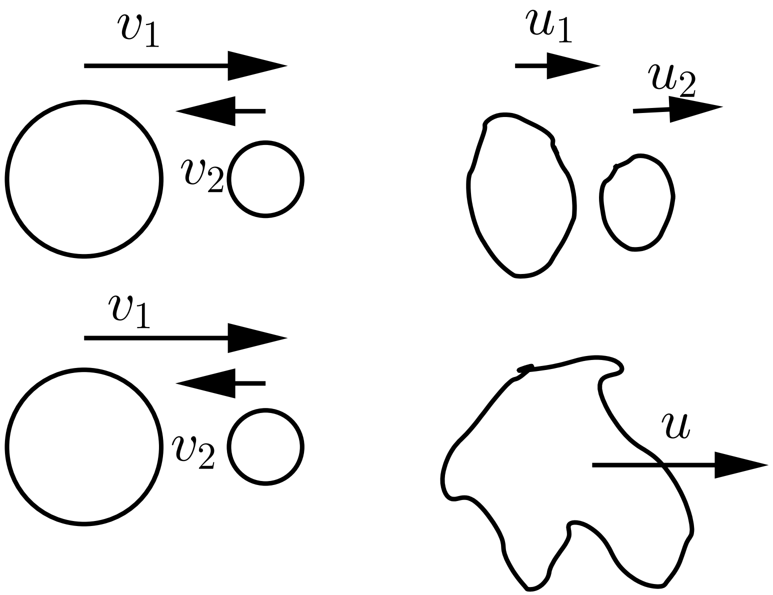
- inelastischer Stoß: endotherm, Umwandlung kinetischer Energie in innere Energie (z. B. Wärme)

- elastischer Stoß: Energieerhaltung

- schiefer Stoß: Geometrieeffekte

- (exothermer Stoß: Umwandlung innerer Energie in kinetische Energie (z. B. $e^- - e^+ \longrightarrow 2\gamma$))

Inelastische Stöße



teilweise inelastisch

vollständig inelastisch

Inelastische Stöße II

Vollständig inelastischer Stoß:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u, \quad \text{also} \quad u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}.$$

Vorzeichen von v_1 und v_2 beachten! Für $m_1 = m_2$ gilt offensichtlich

$$u = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Aus den Geschwindigkeiten lässt sich die in innere Energie verwandelte kinetische Energie berechnen (Übung!).

Elastische Stöße

Zusätzlich bleibt kinetische Energie erhalten!

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2, \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1u_1 + m_2u_2. \end{aligned}$$

Zwei Unbekannte, zwei Gleichungen! Sortiere nach Körpern 1 und 2:

$$\frac{1}{2}m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right) = \frac{1}{2}m_2\left(u_2^2 - v_2^2\right), \tag{1}$$

$$m_1\left(v_1 - u_1\right) = m_2\left(u_2 - v_2\right). \tag{2}$$

Dividiere Gleichung 1 durch Gleichung 2 und löse nach u_1 und u_2 auf.

Elastische Stöße

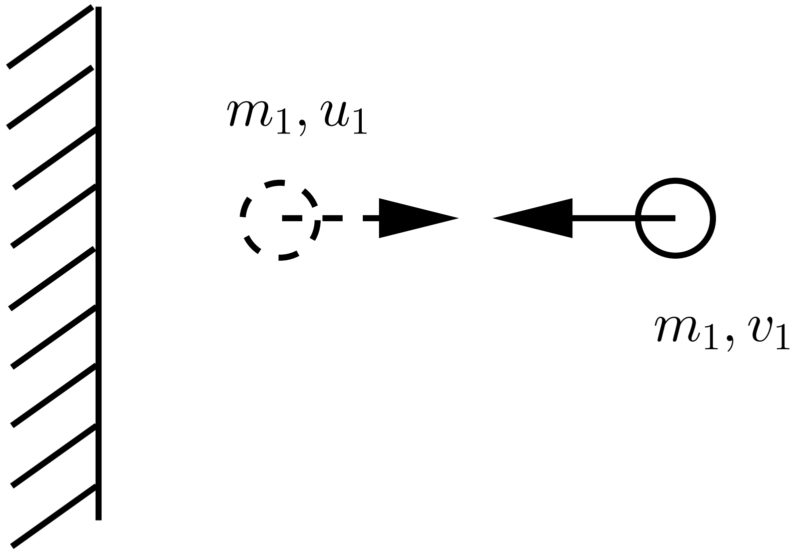
$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \tag{3}$$

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \tag{4}$$

Spezialfälle:

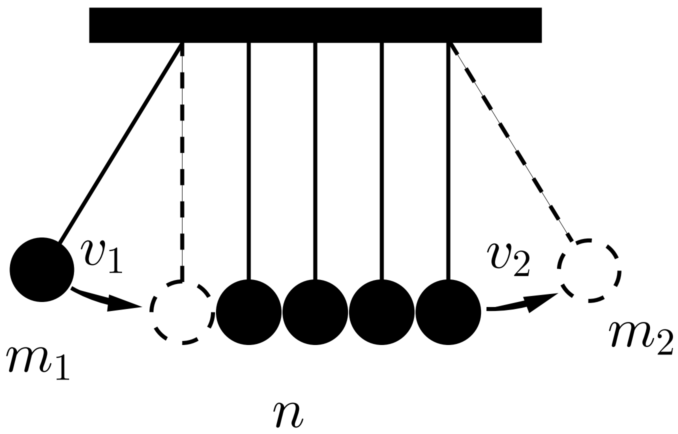
- $m_1 = m_2 \Longrightarrow u_1 = v_2$ und $u_2 = v_1$
- $m_1 \gg m_2 \Longrightarrow u_1 \approx v_1$ und $u_2 \approx 2v_1 - v_2$

Stoß mit einer unbeweglichen Wand



$$m_2 = \infty$$
$$v_2 = 0$$
$$u_2 = 0$$

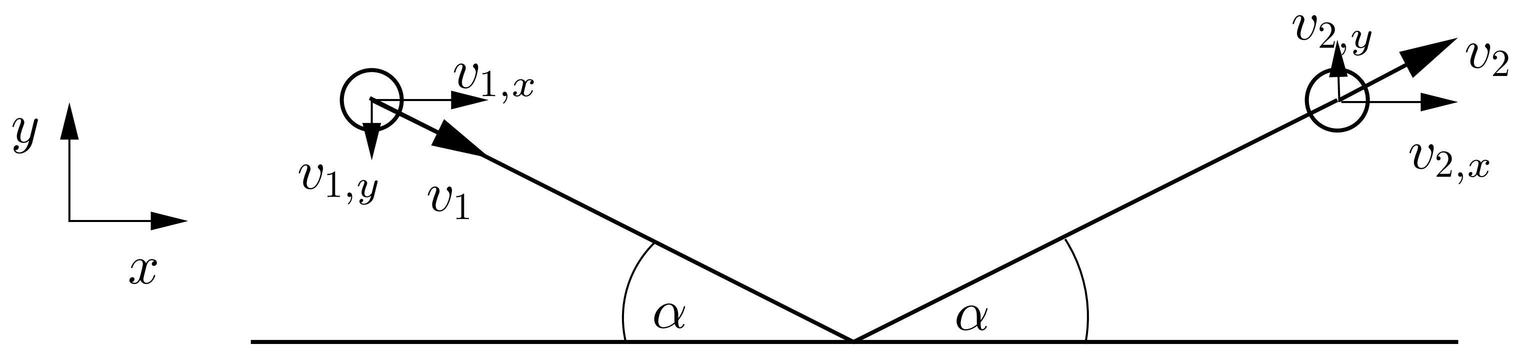
Mehrere Körper auf einer Linie



$$n_1 m_1 v_1 = n_2 m_2 v_2 \quad \text{(Impulssatz)}; \qquad \frac{n_1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{n_2}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{(Energiesatz)}.$$

$$m_1 = m_2 \Longrightarrow n_1 = n_2$$

Bewegung in der Ebene



Überlagerung einer Bewegung entlang von x mit einer Reflexion an einer Wand.

$$v_{2,x} = v_{1,x}; \quad v_{2,y} = -v_{1,y}$$

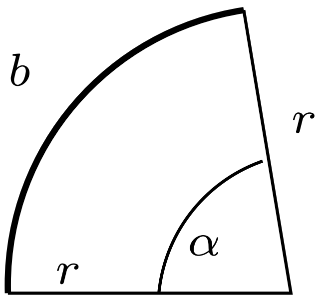
$m_2 \neq \infty$

Wie soll nun ein Stoß in der Ebene behandelt werden, wenn $m_2 \neq \infty$? Aus der Impuls- und Energieerhaltung

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 \end{aligned}$$

ergeben sich nur drei Bedingungen an die vier Unbekannten $u_{1,x}, u_{1,y}, u_{2,x}$ und $u_{2,y}$. Offensichtlich wird die Situation in drei Dimensionen noch schlimmer, 6 Unbekannten stehen nur vier Gleichungen gegenüber. Diese prinzipielle Schwierigkeit lässt sich nur duch eine zusätzliche Erhaltungsgröße beheben, dem Drehimpuls, den wir bald einführen werden.

Intermezzo: Winkel im Kreis und Winkel allgemein



Winkel werden im Bogenmaß bzw. in **radian** gemessen. Ein Winkel ist definiert als die Länge des Kreisbogens b dividiert durch den Radius r. Der Kreisumfang ist gerade

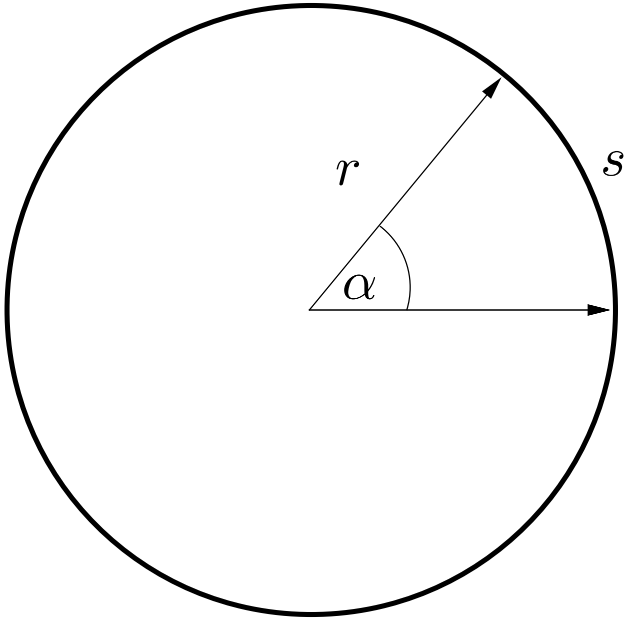
$$U = 2\pi r, \quad \text{also entsprechen} \quad 360^\circ \ \text{gerade} \ 2\pi.$$

Ähnlich entsprechen 180° einem Bogenmaß von π. Die Einheit eines Winkels ist

$$\left[\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}\right] = 1, \quad \text{ein Winkel ist einheitslos!}$$

Trotzdem gibt man einem Winkel eine “Einheit” und nennt diese **Radian**.
<u>Übung:</u> Wieviele Radian entsprechen einem Winkel von 90 Grad (etwa 1.57)? Wieviele Grad entsprechen einem Winkel von 1 radian (etwa 57°)?

Bewegungen im Kreis



Wie schnell dreht sich ein Punkt um eine Scheibe? Aus der Definition der Geschwindigkeit nehmen wir

$$v \doteq \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$$

In einer Zeit $\mathrm{d}t$ hat sich also ein Körper um einen Winkel $\alpha = b/r$ gedreht. Diese "Drehgeschwindigkeit" nennt man **Winkelgeschwindigkeit** ω.

$$\omega \doteq \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$$

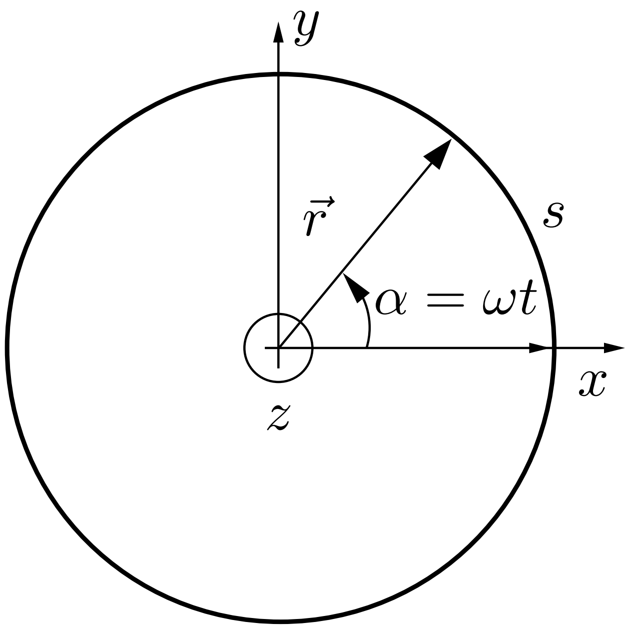
Übung: Mit welcher Winkelgeschwindigkeit rotiert die Erde?

Lösung: Die Erde dreht sich pro Tag einmal um sich selbst, also um 2π. Folglich $\omega = 2\pi/86400$ Sekunden, d. h. $\omega = 2\pi/86400 \approx 7.27 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$. Die **Winkelgeschwindigkeit** beträgt damit $\omega \approx 7.27 \times 10^{-5}\mathrm{s}^{-}1$.

Im Unterschied dazu wird auch die **Frequenz** f oder auch ν benutzt. Diese gibt an, wie oft sich der Kreis in einer Zeiteinheit $\mathrm{d}t$ um sich selber herum dreht,

$$\nu = f \doteq \frac{\omega}{2\pi}.$$

In Vektorschreibweise



Die Kreisbewegung läßt sich auch in Vektorschreibweise ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\dot{\vec{r}}(t) &= \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r}
\end{aligned}$$

$\vec{\omega}$: entlang Rotationsachse, "Rechte-Hand-Regel": $\vec{\omega}$: Daumen, Finger: Rotation

ω ist ein sog. axialer Vektor, d. h. er ändert seine Richtung unter einer Inversion am Nullpunkt nicht.

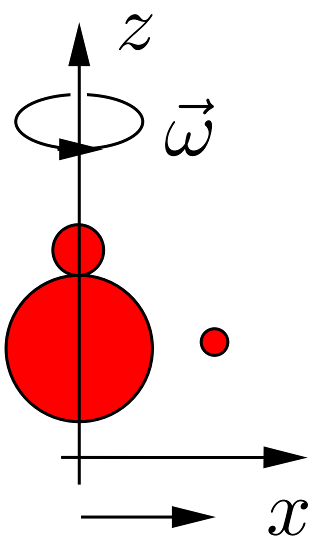
Die Winkelbeschleunigung $\vec{a}(t)$ lässt sich ähnlich ausdrücken:

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$\vec{a}(t)$ heißt Zentripetalbeschleunigung. Sie zeigt zum Drehzentrum hin, gegen die Richtug des Radius! Für eine Kreisbewegung gilt

$$\vec{a}_z = -\omega^2 \vec{r} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{a}_z| = a_z = \frac{v^2}{r}.$$

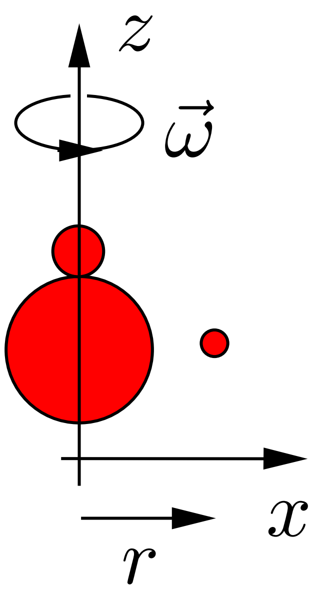
Übung: Hammerwurf



Ein (vereinfachter) Hammerwerfer dreht sich um die z-Achse, die durch den Schwerpunkt des Systems Hammerwerfer + Kugel (Hammer) geht und senkrecht auf dem Boden steht. Während der Drehung wirkt auf den Hammer die Zentripetalbeschleunigung oder -Kraft, denn sonst müsste der Hammer nach Newton I ja geradeaus fliegen. Lässt der Hammerwerfer den Hammer los, fliegt dieser gemäß den bereits untersuchten Gesetzen des schiefen Wurfes weg. Die größte Wurfweite von 86,74m wurde 1986 von Juriy Sedych (Russland) erreicht.

Frage: Wie groß ist v_0? Wie groß ist die Kraft mit der der Hammerwerfer die Kugel auf der Kreisbahn halten muss? Wann muss er sie loslassen damit sie genau in x-Richtung fliegt?

Lösung Hammerwurf I



Wir vernachläßigen die Abflughöhe und nehmen als Abflugwinkel $\alpha = 45° = \pi/4$ an. Mit $\sin 45° = \cos 45° = \sqrt{2}/2$ haben wir

$$s = v_0 \cos\alpha \cdot t, \tag{5}$$

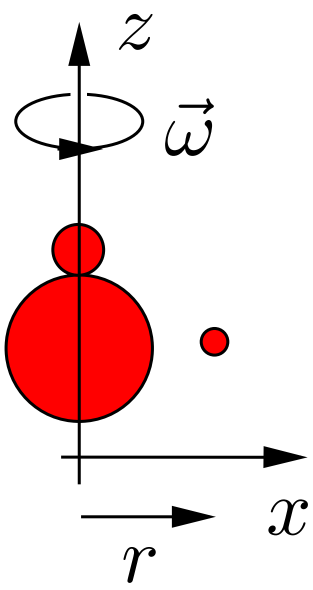
$$0 = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \longrightarrow \quad t = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{t} \tag{6}$$

Wir setzen das Resultat von Glg. 6 in Glg. 5 ein und erhalten

$$s = v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha \frac{2}{g}, \quad \text{also} \quad v_0^2 = gs \quad \longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{gs}.$$

Eingesetzt ergibt $v_0 \approx 29$ m/s.

Lösung Hammerwurf II



Der Hammerwerfer dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um sich selbst. Die Abwurfgeschwindigkeit ist gerade

$$v_0 = \omega r.$$

Die Zentripetalkraft, die auf die Kugel (und nach Newton III auch auf den Hammerwerfer) wirkt ist dann

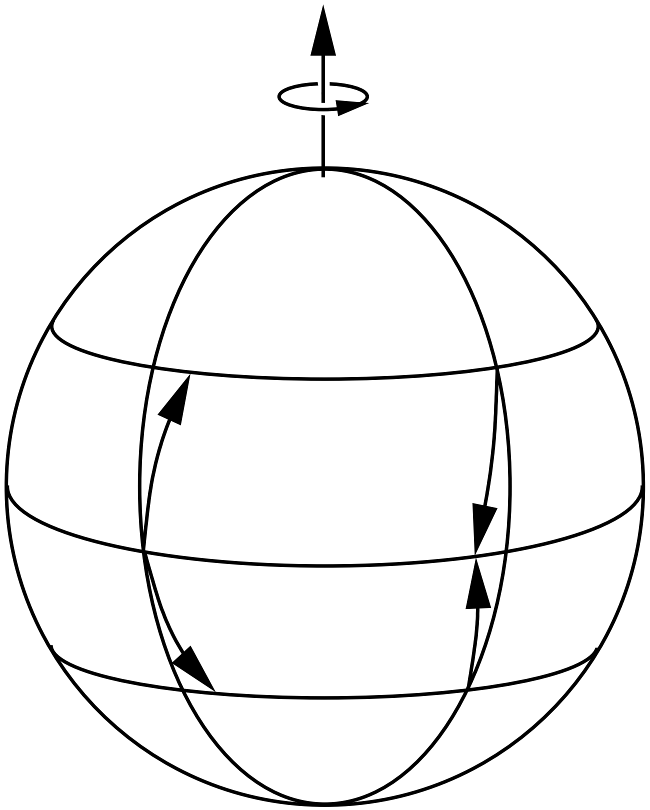
$$F_z = m_{\text{Kugel}} \cdot a_Z = m_{\text{Kugel}} \cdot \omega^2 r = m_{\text{Kugel}} \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Das Drahtseil hat eine Länge von 1.219m (4 engl. Fuss), die Kugel eine Masse von 7.257 kg (16 engl. Pfund). Mit einer Armlänge von 0.9m erhalten wir $r = 2.1$m und folglich

$$F_z = 7.257 \cdot \frac{29^2}{2.1} = 2900\text{N}.$$

Das ist ein Mehrfaches der Gewichtskraft der Kugel und auch des Hammerwerfers. Deshalb ist auch die Reibungskraft (Schuhe - Boden) eine wesentliche Beschränkung. Der Hammerwerfer muss die Kugel in dem Moment loslassen, in welchem ihr Geschwindigkeitsvektor genau in die x-Richtung zeigt

Rotierende Bezugssysteme: Die Corioliskraft

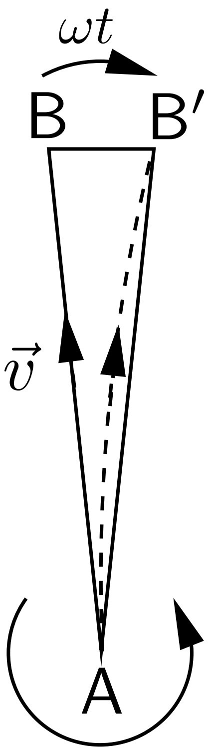


In der Nordhalbkugel wird
nach rechts abgelenkt;
in der Südhalbkugel wird
nach links abgelenkt.

Corioliskraft

Ursprung von Zyklonen und
Antizyklonen.
Abnutzung von Bahngeleisen.

Corioliskraft II



Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer rotierenden Scheibe von A aus mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ nach B hin. Infolge der Rotation erreicht er aber nach einer Zeit t den Punkt B′. Für mitrotierende Beobachter scheint der Massenpunkt also einer Kraft ausgesetzt, die während der Zeit t gewirkt hat.

$AB = vt$, ferner $BAB' = \omega t$
$BAB' = BB'/AB$ also $BB' = \omega v t^2$
Mit $s = \frac{1}{2} a_v t^2$ ist also $BB' = \omega v t^2 = \frac{1}{2} a_v t^2$,
also $a_v = 2\omega v$.

Bewegungen in rotierenden Bezugssystemen

Betrachte zwei Bezugssysteme K und K', deren Ursprung zusammenfällt, K' aber gegen K rotiert, also kein Inertialsystem sei. Wie wir bereits gesehen haben, lässt sich jede Bewegung eines starren Körpers, also insbesondere eines als starr vorausgesetzten Bezugssystems, als Überlagerung einer Translation und einer Rotation darstellen. Also lautet der Zusammenhang zwischen zwei Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und $\vec{v}'$ gemessen in K bzw. K'

$$\vec{v} = \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r})\,, \tag{7}$$

wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit ist, die in K' gemessen wird, wenn man die Rotation nicht berücksichtigt. Die Beschleunigung $\vec{a}$ erhalten wir durch Ableitung nach der Zeit

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \left(\vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right),$$

weil ja $\vec{\omega} = \text{const}$. Wir bestimmen nun $\mathrm{d}\vec{v}'/\mathrm{d}t$ im Koordinatensystem K, aber in Koordinaten von K' ausgedrückt. Dabei muss berücksichtigt werden, dass sich nicht nur die Geschwindigkeit ändert, sondern auch die das Bezugssystem aufspannenden Einheitsvektoren $\vec{\hat{e}}'_x, \vec{\hat{e}}'_y, \vec{\hat{e}}'_z$. Also

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{\hat{e}}'_x \frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t} + \vec{\hat{e}}'_y \frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t} + \vec{\hat{e}}'_z \frac{\mathrm{d}v'_z}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_x}{\mathrm{d}t} v'_x + \frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_y}{\mathrm{d}t} v'_y + \frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_z}{\mathrm{d}t} v'_z\right) = \vec{a}' + (\omega \times \vec{v}')\,.$$

Einsetzen liefert

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + (\vec{\omega} \times \vec{v})\,.$$

Nun setzen wir den allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ein, Glg. 7,

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\,(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,.$$

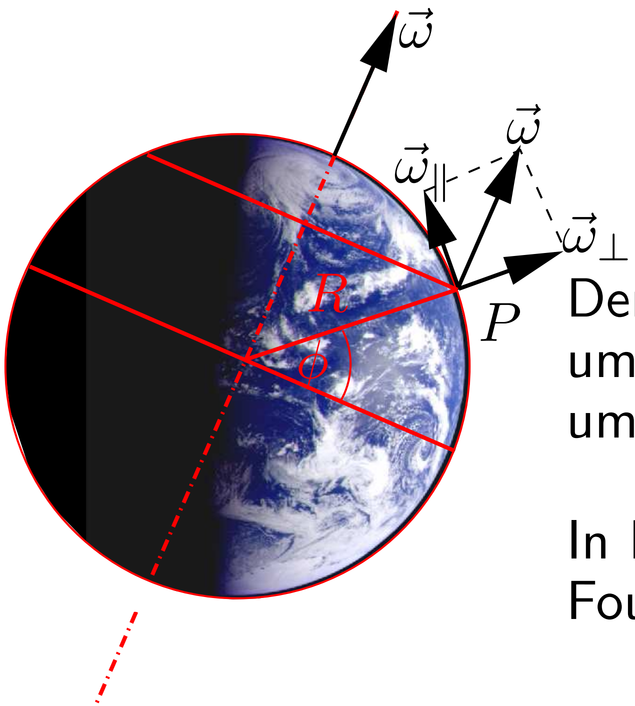
Diesen Ausdruck können wir nun endlich auflösen nach der Beschleunigung $\vec{a}'$, welche im rotierenden Bezugssystem K' gemessen wird

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{a} + 2\,(\vec{v}' \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) \\ &= \vec{a} + \vec{a}_C + \vec{a}_Z \end{aligned}$$

Coriolisbeschleunigung	$\vec{a}_C = 2\,(\vec{v}' \times \vec{\omega})$
Zentrifugalbeschleunigung	$\vec{a}_Z = \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$

Im beschleunigten Bezugssystem wirken zwei Scheinkräfte, die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft!

Nachweis der Erdrotation - Das Foucault'sche Pendel



Die Rotation der Erde macht sich in einem Punkt P bemerkbar als eine Überlagerung einer Rotation der Ebene um $\vec{\omega}_{\perp}$ und eine weitere Rotation um $\vec{\omega}_{\|}$.

Der Erdboden im Punkt P rotiert mit $\vec{\omega}_{\perp} = \omega \sin\phi$ um eine Achse senkrecht zum Erdboden und mit $\vec{\omega}_{\|} = \omega \cos\phi$ um eine Achse parallel zu $\vec{\omega}_{\|}$.

In Kiel ($\phi \approx 54^\circ$) dreht sich die Erde mit ca. 12° unter einem Foucault'schen Pendel weg.

Beispiele

- Eisenbahn: Auf der Nordhalbkugel nutzen sich die rechte Schiene und die rechten Räder schneller ab.

- Zyklone und Antizyklone auf den beiden Hemisphären drehen sich im gegenläufigen Sinne

- Passatwinde

- Flussläufe auf der Nordhalbkugel sollen rechts höhere Ufer aufweisen als links. Umgekehrt auf der Südhalbkugel.

- Der Wirbel in der Badewanne wird allerdings durch andere Effekte wesentlich stärker beeinflusst, weshalb hier die Voraussage nicht erfüllt wird.