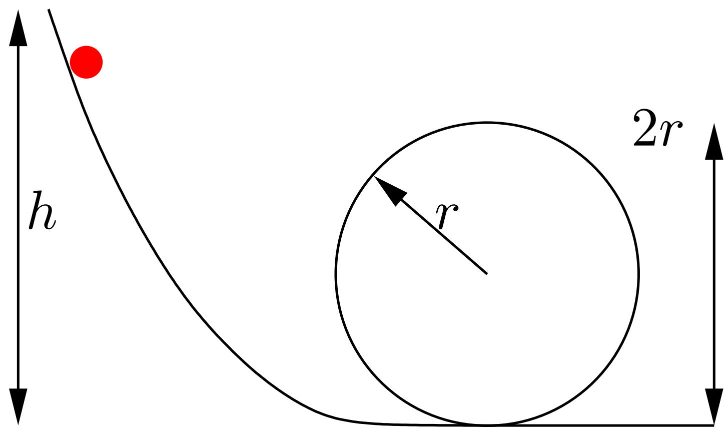
Übung Looping



Ein Ball rollt reibungsfrei die Schiene herunter in einen Looping. Wie hoch muss seine Ausgangshöhe h sein, wenn er in Ruhe startet und sehr klein ist?

Hinweis: Sie können den Ball als einen Massenpunkt annehmen (Idealfall).

Lösung:

Im obersten Punkt (bei Höhe $h' = 2r$) muss die Zentripetalkraft gerade die Erdanziehung kompensieren. Also (betragsmäßig)

$$a_Z = \frac{v_0^2}{r} = g, \quad \text{also gilt} \quad v_0^2 = rg.$$

Um die Geschwindigkeit v_0 im obersten Punkt des Loopings zu berechnen benutzen wir die Energieerhaltung. Für einen Massenpunkt gilt

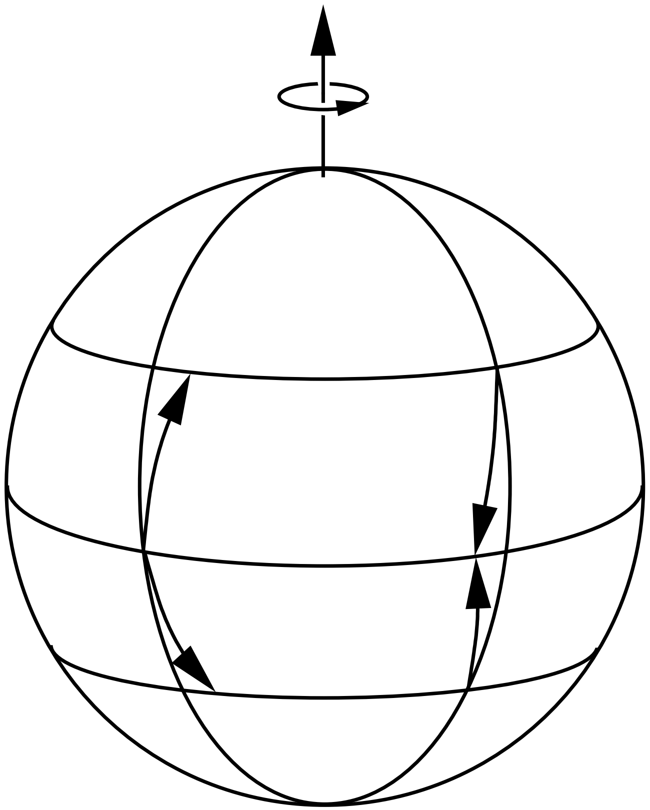
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg(h - 2r).$$

Wie wir vorher gezeigt haben, gilt ja $v_0^2 = rg$, was wir nun einsetzen. Wir kürzen auch noch durch die Masse m des Massenpunktes, welche auf beiden Seiten der Gleichung vorkommt und erhalten

$$\frac{1}{2}rg = g(h - 2r) \quad \longrightarrow \quad \underline{h = 2\frac{1}{2}r}.$$

Der Ball muss mindetens $r/2$ höher starten, als der höchste Punkt des Loopings.

Rotierende Bezugssysteme: Die Corioliskraft

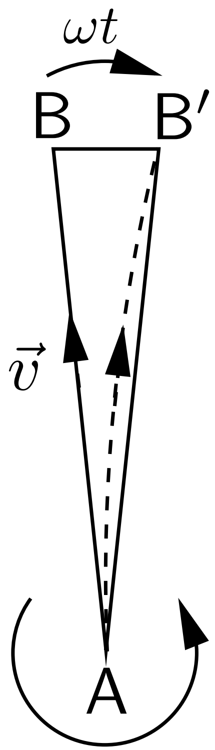


In der Nordhalbkugel wird
nach rechts abgelenkt;
in der Südhalbkugel wird
nach links abgelenkt.

Corioliskraft

Ursprung von Zyklonen und
Antizyklonen.
Abnutzung von Bahngeleisen.

Corioliskraft II



Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer rotierenden Scheibe von A aus mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ nach B hin. Infolge der Rotation erreicht er aber nach einer Zeit t den Punkt B′. Für mitrotierende Beobachter scheint der Massenpunkt also einer Kraft ausgesetzt, die während der Zeit t gewirkt hat.

$AB = vt$, ferner $BAB' = \omega t$
$BAB' = BB'/AB$ also $BB' = \omega v t^2$
Mit $s = \frac{1}{2} a_v t^2$ ist also $BB' = \omega v t^2 = \frac{1}{2} a_v t^2$,
also $a_v = 2\omega v$.

Bewegungen in rotierenden Bezugssystemen

Betrachte zwei Bezugssysteme K und K', deren Ursprung zusammenfällt, K' aber gegen K rotiert, also kein Inertialsystem sei. Wie wir bereits gesehen haben, lässt sich jede Bewegung eines starren Körpers, also insbesondere eines als starr vorausgesetzten Bezugssystems, als Überlagerung einer Translation und einer Rotation darstellen. Also lautet der Zusammenhang zwischen zwei Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und $\vec{v}'$ gemessen in K bzw. K'

$$\vec{v} = \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r})\,, \tag{1}$$

wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit ist, die in K' gemessen wird, wenn man die Rotation nicht berücksichtigt. Die Beschleunigung $\vec{a}$ erhalten wir durch Ableitung nach der Zeit

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \left(\vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right),$$

weil ja $\vec{\omega} = \text{const.}$ Wir bestimmen nun $\mathrm{d}\vec{v}'/\mathrm{d}t$ im Koordinatensystem K, aber in Koordinaten von K' ausgedrückt. Dabei muss berücksichtigt werden, dass sich nicht nur die Geschwindigkeit ändert, sondern auch die das Bezugssystem aufspannenden Einheitsvektoren $\vec{\hat{e}}'_x, \vec{\hat{e}}'_y, \vec{\hat{e}}'_z$. Also

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{\hat{e}}'_x \frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t} + \vec{\hat{e}}'_y \frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t} + \vec{\hat{e}}'_z \frac{\mathrm{d}v'_z}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_x}{\mathrm{d}t} v'_x + \frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_y}{\mathrm{d}t} v'_y + \frac{\mathrm{d}\vec{\hat{e}}'_z}{\mathrm{d}t} v'_z\right) = \vec{a}' + (\omega \times \vec{v}')\,.$$

Einsetzen liefert

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + (\vec{\omega} \times \vec{v})\,.$$

Nun setzen wir den allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ein, Glg. 1,

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\,(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,.$$

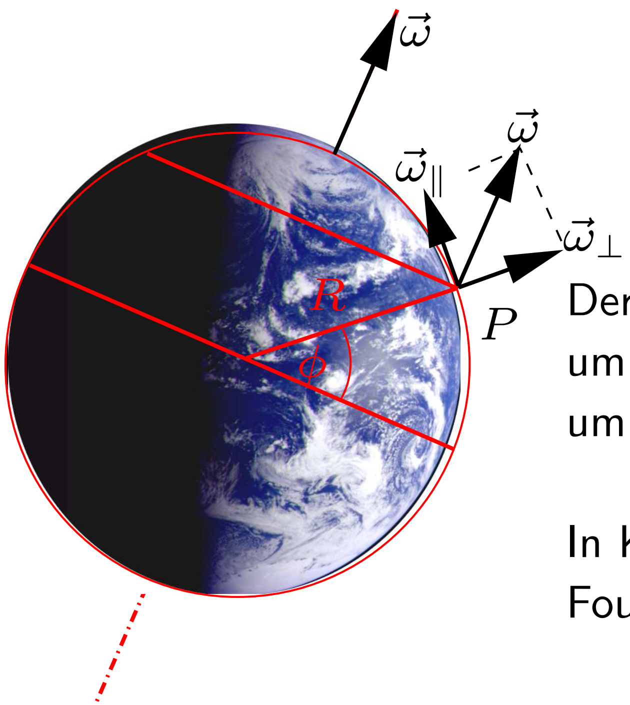
Diesen Ausdruck können wir nun endlich auflösen nach der Beschleunigung $\vec{a}'$, welche im rotierenden Bezugssystem K' gemessen wird

$$
\begin{aligned}
\vec{a}' &= \vec{a} + 2\,(\vec{v}' \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) \\
&= \vec{a} + \vec{a}_C + \vec{a}_Z
\end{aligned}
$$

Coriolisbeschleunigung	$\vec{a}_C = 2\,(\vec{v}' \times \vec{\omega})$
Zentrifugalbeschleunigung	$\vec{a}_Z = \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$

Im beschleunigten Bezugssystem wirken zwei Scheinkräfte, die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft!

Nachweis der Erdrotation - Das Foucault'sche Pendel



Die Rotation der Erde macht sich in einem Punkt P bemerkbar als eine Überlagerung einer Rotation der Ebene um $\vec{\omega}_{\perp}$ und eine weitere Rotation um $\vec{\omega}_{\parallel}$.

Der Erdboden im Punkt P rotiert mit $\vec{\omega}_{\perp} = \omega \sin \phi$ um eine Achse senkrecht zum Erdboden und mit $\vec{\omega}_{\parallel} = \omega \cos \phi$ um eine Achse parallel zu $\vec{\omega}_{\parallel}$.

In Kiel ($\phi \approx 54°$) dreht sich die Erde mit ca. 12°/h unter einem Foucaultschen Pendel weg.

Beispiele

- Eisenbahn: Auf der Nordhalbkugel nutzen sich die rechte Schiene und die rechten Räder schneller ab.
- Zyklone und Antizyklone auf den beiden Hemisphären drehen sich im gegenläufigen Sinne
- Passatwinde
- Flussläufe auf der Nordhalbkugel sollen rechts höhere Ufer aufweisen als links. Umgekehrt auf der Südhalbkugel.
- Der Wirbel in der Badewanne wird allerdings durch andere Effekte wesentlich stärker beeinflusst, weshalb hier die Voraussage nicht erfüllt wird.

Starre Körper

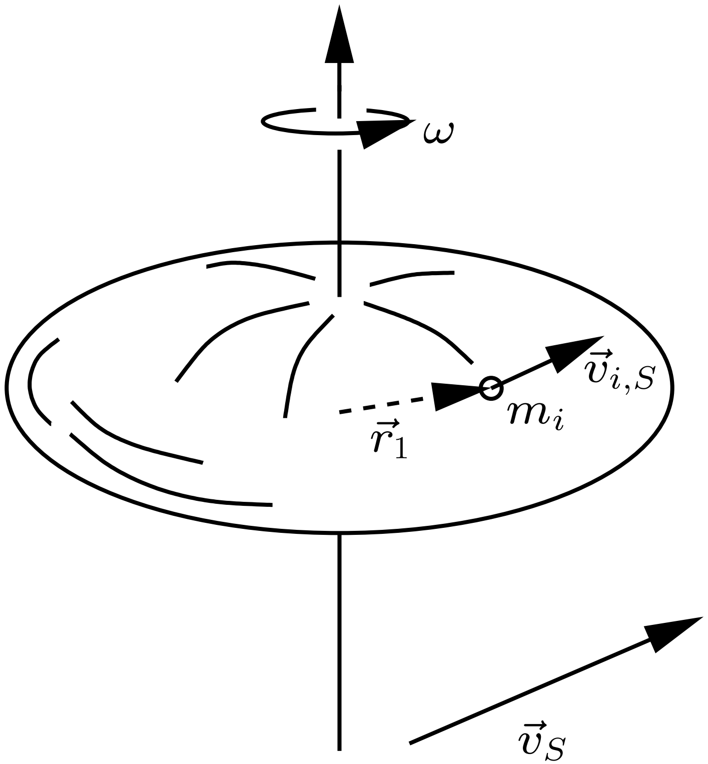
Die Bewegung eines ausgedehnten Körpers ist komplizierter als die eines Massenpunktes. Der Einfachheit halber betrachten wir als Modell einen starren Körper, der sich nicht deformieren lässt.

Starrer Körper: Die gegenseitigen Abstände der konstituierenden Massenpunkte lassen sich nicht verändern.

Freiheitsgrade eines Massenpunktes: 3 (Translation) Freiheitsgrade eines starren Körpers: 6 (Translation, Rotation)

Die Bewegung eines starren Körpers lässt sich beschreiben durch eine Überlagerung einer Translation mit einer Rotation.

Bewegungsenergie eines starren Körpers



$\vec{v}_{i,S} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

Bewegungsenergie E_{kin}:

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{kin}} &= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=1} m_i v_i^2 \\
&= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_i m_i \left(\vec{v}_{i,S} + \vec{v}_S\right)^2 \\
&= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_i m_i \left(v_{i,S}^2 + 2 v_{i,S} v_S + v_S^2\right) \\
&= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_i m_i v_{i,S}^2 + \tfrac{M}{2} v_S^2 \\
&= E_{\mathrm{kin,trans}} + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 \\
&= E_{\mathrm{kin,trans}} + E_{\mathrm{kin,rot}}
\end{aligned}
$$

Die neu auftretende Größe $\sum_i m_i r_i^2$ heißt **Trägheitsmoment** J des starren Körpers bezüglich der gewählten Rotationsachse. Damit gilt $E_{\mathrm{kin,rot}} = J/2\omega^2$.

Trägheitsmoment

Wir definieren also das Trägheitsmoment um eine Rotationsachse als

$$J \doteq \sum m_i r_i^2 > 0,$$

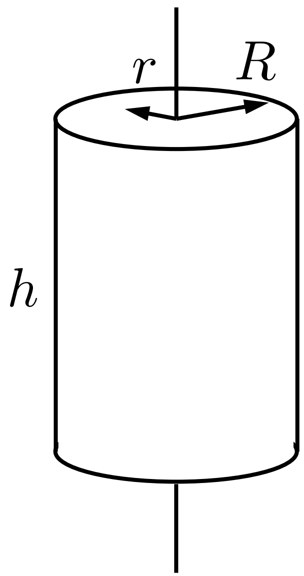
ferner

$$[J] = ML^2 = \mathrm{kg\ m}^2.$$

Das Trägheitsmoment ist weder ein Vektor noch ein Skalar, sondern ein sog. Tensor. Für die Rotationsenergie lässt sich schreiben

$$E_{\mathrm{kin,rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Trägheitsmoment eines Zylinders



$J = \int_0^R \mathrm{d}m r^2$

$\mathrm{d}m = 2\pi r \mathrm{d}r h\rho$

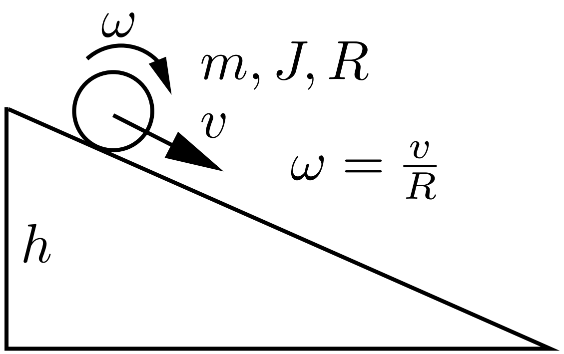
$\mathrm{d}J = \mathrm{d}m r^2 = 2\pi r^3 \mathrm{d}r h\rho$

$J = \int \mathrm{d}J = 2\pi h\rho \int_0^R \mathrm{d}r r^3$

$J = \frac{\pi}{2} h\rho R^4$

Hohlzylinder: $J = \frac{\pi}{2} h\rho \left(R_a^4 - R_i^4\right)$

Bergabrollen von Zylindern: "Bergrennen"



$$E_{\mathrm{pot}} = mgh$$

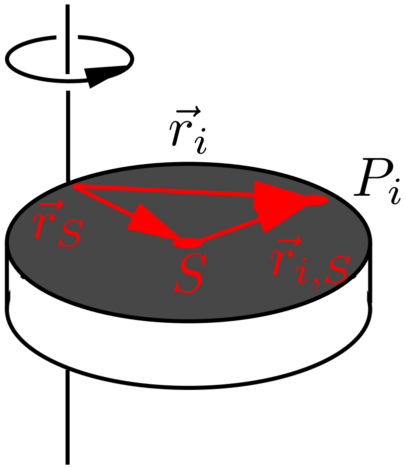
$$E_{\mathrm{tot}} = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{rot}}$$

$$\begin{aligned} mgh &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}J\omega^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(m + \tfrac{J}{R^2}\right)v^2 \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m+J/R^2}}$$

Zylinder mit verschiedenen Trägheitsmomenten sind verschieden schnell!

Satz von Steiner



$$\vec{r}_i = \vec{r}_S + \vec{r}_{i,S}$$

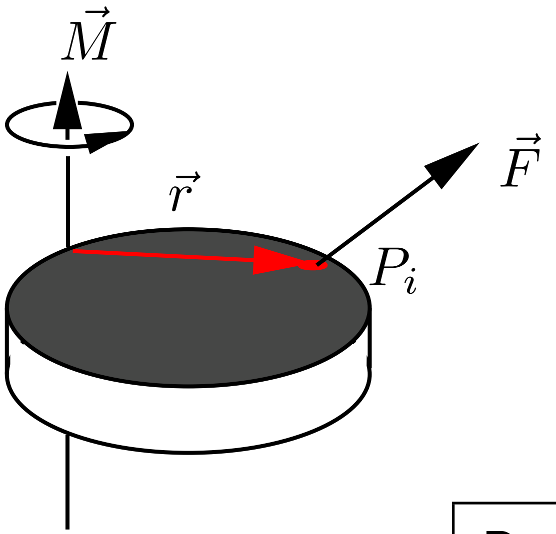
$$\vec{r}_i^{\,2} = r_S^2 + r_{i,S}^2 + 2\vec{r}_S \cdot \vec{r}_{i,S}$$

$$\begin{aligned} \sum m_i \vec{r}_i^{\,2} &= \sum m_i r_S^2 + \sum m_i r_{i,S}^2 + 2\vec{r}_S \cdot \sum m_i \vec{r}_{i,S} \\ &= M r_S^2 + J_S + 2\vec{r}_S \sum m_i \vec{r}_{i,S} \end{aligned}$$

aber $\sum m_i \vec{r}_{i,S} = 0$, nach Definition des Schwerpunktes!

Satz von Steiner: $J = M r_S^2 + J_S$

Drehmoment



Drehmoment $\vec{M}$:

$\vec{M} \doteq \vec{r} \times \vec{F}$

$\left[\vec{M}\right] = \text{Nm}$

Trotzdem: Drehmoment $\neq$ Arbeit!

$\boxed{\text{Das Drehmoment ist ein Vektor, Arbeit ein Skalar!}}$

Drehmoment II

Wir betrachten 2 Massenpunkte m_1 und m_2, auf die, neben der gegenseitigen Wechselwirkung $\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$, zusätzlich eine äußere Kraft $\vec{F}_1$ bzw. $\vec{F}_2$ wirken soll. Die dazugehörigen Drehmomente bzgl. des Nullpunktes $\vec{0}$ sind

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 &= \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{21}), \\ \vec{M}_2 &= \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{12}) \end{aligned}$$

und das Gesamtdrehmoment lautet

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21}.$$

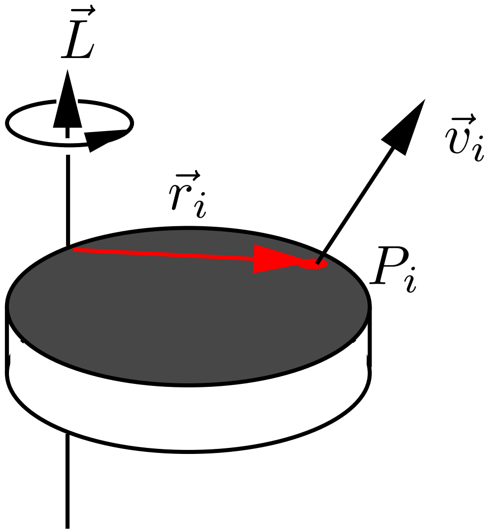
Die inneren Kräfte $\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$ wirken aber entlang von $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und deshalb verschwindet der letzte Term. Somit:

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2),$$

das totale Drehmoment ist gleich der Vektorsumme der einzelnen Drehmomente. Insbesondere gilt:

Wirken keine äußeren Kräfte auf das System, verschwindet auch das Drehmoment auf das System.

Drehimpuls



$$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}$$

Der Impuls $m_i\vec{v}_i$ ändert sich laufend.
Der Drehimpuls $\vec{L}$ ändert sich nicht!

$$\vec{L} \doteq \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$\vec{L} = \sum m_i r^2 \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

Drehimpuls II

$$[L] = ML^2/T = \mathrm{kg\ m^2/s} = \mathrm{J\ s}$$

Der Drehimpuls ist quantisiert! D. h. es gibt einen kleinsten Drehimpuls. Nach Heisenberg gilt

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar,$$

folglich muss jede Änderung des Drehimpulses mindestens $\hbar$ betragen. $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Js ist sehr klein, weshalb man diesen Effekt im alltäglichen Leben auch nicht bemerkt. Elementarteilchen haben aber einen Eigendrehimpuls, ihren sog. Spin, der in Einheiten von $\hbar$ ausgedrückt wird.

F: Neutron: Spin $= 1/2\hbar$, Proton: Spin $= 1/2\hbar$, Elektron: Spin $= 1/2\hbar$,
B: Photon: Spin $= 1\hbar$, W- und Z-Bosonen: Spin $= 1\hbar$, Graviton: Spin $= 2\hbar$.

Erhaltung des Drehimpulses

Der Drehimpuls des Systems ist gegeben durch

$$\vec{L} = (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{p}_2).$$

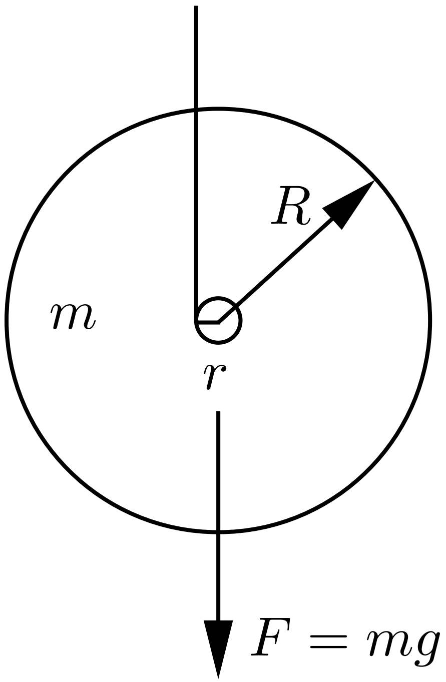
Die zeitliche Änderung erhalten wir durch Ableitung nach der Zeit,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \vec{r}_1 \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} \ + \ \vec{r}_2 \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} \quad \text{weil} \quad \vec{v}_i \parallel \vec{p}_i \\
\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) \ + \ (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) = \vec{M}
\end{aligned}$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses relativ zu einem Punkt ist gleich dem Gesamtdrehmoment relativ zum selben Punkt. Insbesondere gilt:

Wirken keine äußeren Kräfte auf das System, bleibt dessen Drehimpuls konstant.

Maxwell-Rad



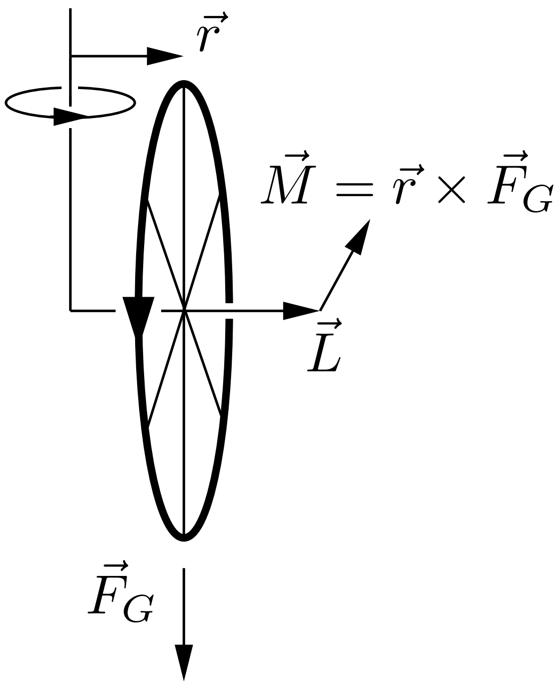
Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$M = |\vec{M}| = rmg$

$a = r\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{rM}{J} = \frac{r^2 mg}{\frac{1}{2}mR^2 + mr^2}$

$a = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}$

Ein angreifendes Drehmoment verändert den Drehimpuls



Ein aufgehängtes und drehendes Rad bewegt sich[1] langsam um die Aufhängung. Diese Bewegung kommt durch das angreifende Drehmoment zustande. Es ändert laufend den Drehimpuls. Weil die Änderung senkrecht auf diesem steht, ändert sich dessen Betrag nicht, sondern nur die Richtung.

Mathematisch ausgedrückt lautet dies $\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$.

Das Drehmoment ändert den Drehimpuls.

[1] Man nennt diese Bewegung Präzession.

Vergleich Translation $\leftrightarrow$ Rotation

Translation	Rotation
Länge L	Winkel ϕ
Masse m	Träheitsmoment J
Geschwindigkeit v	Winkelgeschwindigkeit ω
Impuls $\vec{p}$	Drehimpuls $\vec{L}$
Kraft $\vec{F}$	Drehmoment $\vec{M}$
$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}J\omega^2$
Rückstellkraft $\vec{F} = -D\vec{x}$	Rückstelldrehmoment $\vec{M} = -\vec{D}\phi$
Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{m/D}$	Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{J/D}$

Nachtrag Rotierende Systeme: Winkelbeschleunigung

Die Änderung des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ durch ein angreifendes Drehmoment $\vec{M}$,

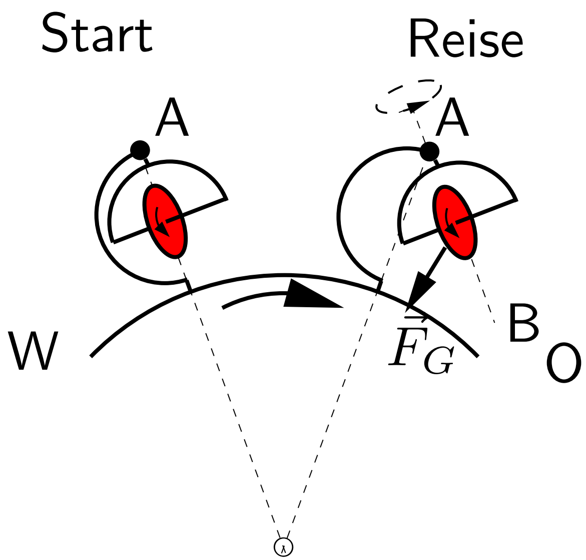
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

führt zu einer Änderung der Rotationsgeschwindigkeit bzw. Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Systems. Diese kann als Winkelbeschleunigung aufgefasst werden:

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

Der Kreiselkompass

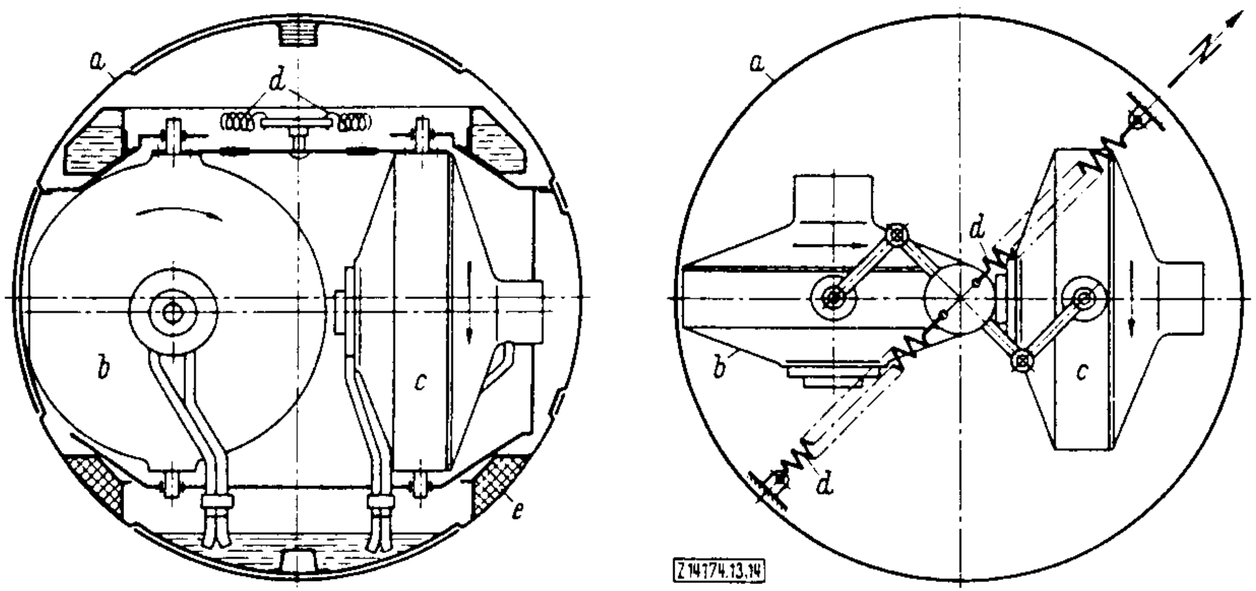
Der Kreiselkompass soll immer die Nordrichtung angeben. Dazu kann die Erdanziehung ausgenutzt werden, die immer zum Erdmittelpunkt zeigt. Patent: Anschütz Kiel.



Die Erdanziehung $\vec{F}_G$ zeigt immer zum Erdmittelpunkt. Dadurch erfährt der Kreisel ein Drehmoment, welches die Kreiselrichtung um genau den Winkel verdreht, der notwendig ist, um den Kompass wieder nach Norden zeigen zu lassen.

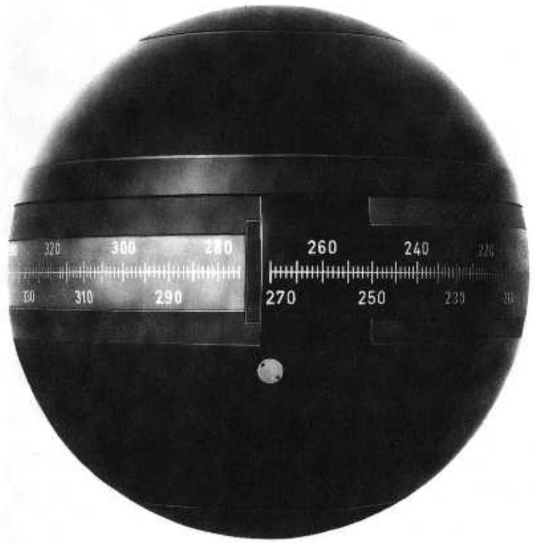
Der Kreiselkompass von Anschütz

Auf Schiffen ist die Halterung/Lagerung ein Problem. Dieses wurde hier in Kiel durch Anschütz gelöst.



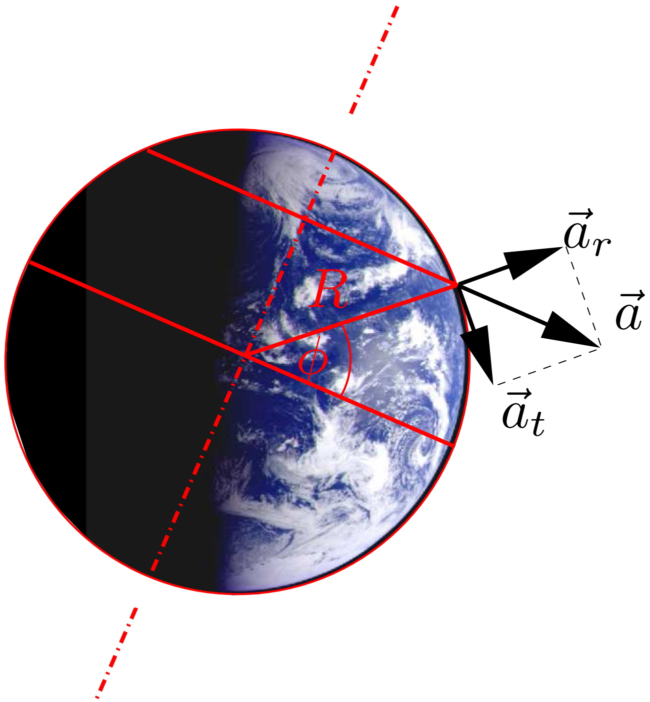
Der Kreiselkompass von Anschütz II

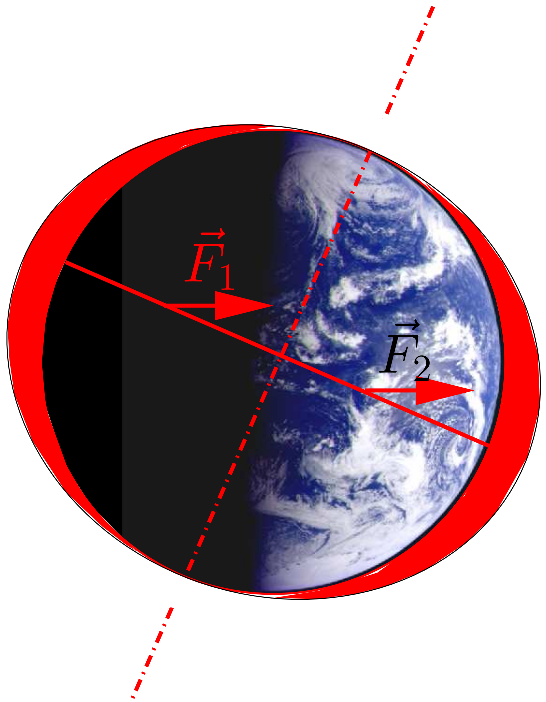
Auch berühmte Leute waren mit von der Partie. . . A. Einstein war am Patent beteiligt und besuchte deswegen mehrmals Anschütz in Kiel.



Präzession der Erdachse

Erdrotation $\longrightarrow$ Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a} = \omega^2 R \cos\phi \approx 3.4 \cos\phi$ cm/s^2.





Die Tangentialkomponente führt zur Ausbildung von “Wülsten” entlang des Äquators. Diese werden verschieden stark von der Sonne angezogen, was einem Drehmoment auf die Erde gleichkommt. Folge: der Drehimpuls der Erde bleibt nicht konstant. Die Erdachse präzessiert einmal in ca. 26’000 Jahren.

Der Unterschied in der Anziehung verschwindet im Frühling und im Herbst und ist auch im Sommer und Winter nicht gleich stark. Diese Unterschiede führen, zusammen mit dem Einfluss des Mondes, zu kleineren Schwankungen des Drehimpulses, welche in der Astronomie “Nutation” genannt werden, auch wenn es sich streng genommen nicht um eine Nutation handelt.

Schwingungen

Eine ausgelenkte Feder schwingt harmonisch. Die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m} x$$

führt zu einer Schwingung

$$x(t) = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t}, \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{wo}$$

$$A = \left(\frac{x_0}{2} - \frac{i}{2} \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t_0} \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{i}{2} \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) e^{i\omega t_0}.$$

Die Schwingung kann auch als reine $\sin$ oder $\cos$ Schwingung geschrieben werden, was genau so allgemein ist, aber einfacher aussieht. Im allgemeinsten Fall

$$x(t) = a \sin(\omega t + \phi),$$

wo a die Amplitude, ω die Frequenz und ϕ die Phase der Schwingung bedeutet.

Zwei Schwingungen lassen sich auch überlagern, man spricht dabei von **Superposition** von zwei Schwingungen,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1), \\ x_2 &= a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2), \\ x_3 &= x_1 + x_2, \\ x_3 &= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Bei der Superposition spielen sowohl die Frequenz, die Amplitude wie die

Phase eine entscheidende Rolle für die entstehende Schwingung. Der wichtigste Spezialfall ist der der sog. Schwebung. Wir betrachten zwei Schwingungen derselben Amplitude, aber mit etwas verschiedener Frequenz (und der Einfachheit halber verschwindender Phase):

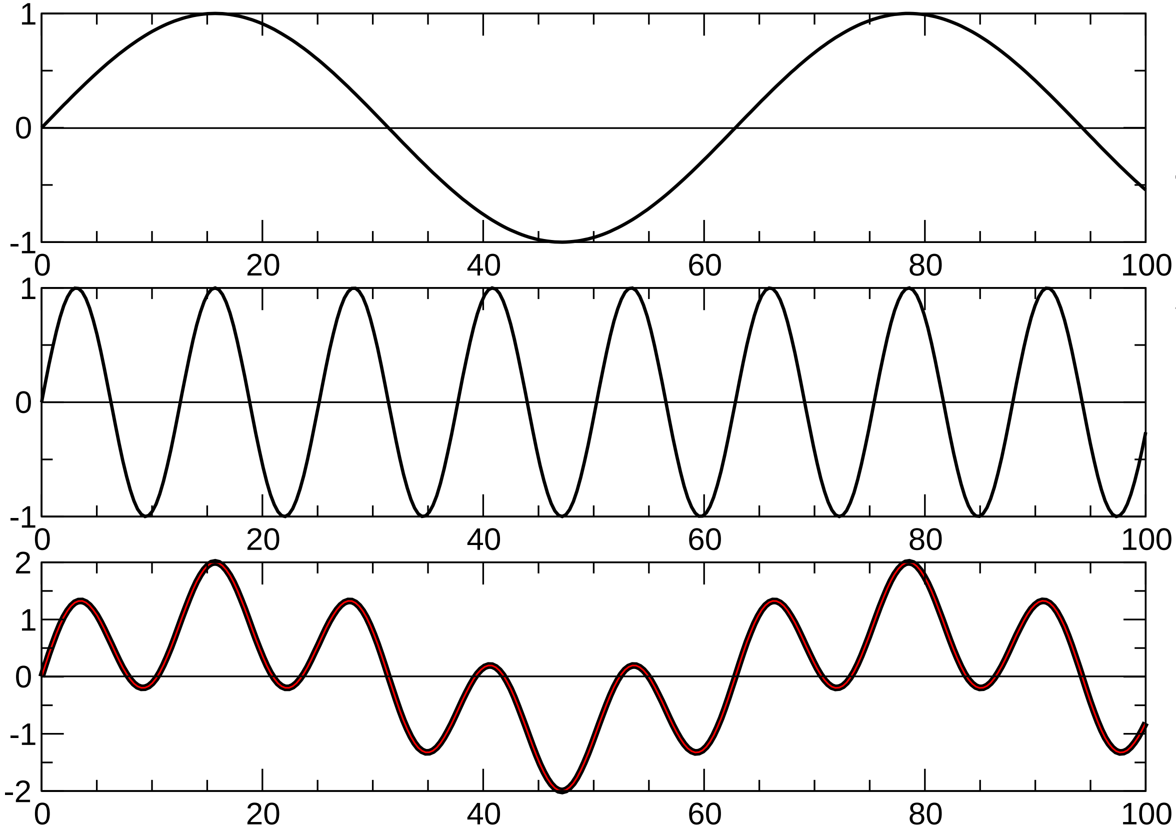
$$x_1 = a \sin \omega_1 t, \quad x_2 = a \sin \omega_2 t.$$

Nach dem Additionssatz $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin((\alpha + \beta)/2) \cos((\alpha - \beta)/2)$

$$x(t) = 2a \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right), \tag{3}$$

also eine Modulation einer hochfrequenten Schwingung durch eine niedrigfrequente Schwingung.

Überlagerung zweier Schwingungen



In der Abbildung nebenan sind die zwei Schwingungen der beiden oberen Panele im untersten überlagert dargestellt. Dabei zeigt die schwarze Kurve die Formel 2 und die rote Kurve Formel 3. Beide Kurven sind, wie sie auch sein sollten, identisch.

Mehrere Schwingungen können ebenfalls überlagert werden,

$$x(t) = \sum_n a_n \sin(\omega_n t + \phi_n).$$

Solange die Frequenzen untereinander rationale Verhältnisse aufweisen, so entsteht daraus immer eine periodische Schwingung! Umgekehrt lässt sich jede periodische Funktion $x(t) = x(t + T)$ immer in eine Summe der obigen Form bringen, in der die Frequenzen $\omega_n = n\omega_1$ erfüllen! Eine solche Zerlegung eines Signals heißt **Fourierzerlegung**, die obige Gleichung stellt eine **Fourierreihe** dar. Fourierzerlegungen sind ein äußerst wichtiges Werkzeug der Physik. Nicht-periodische Funktionen können durch sog. Fourierintegrale behandelt werden.

Überlagerungen von zwei Schwingungen in zwei Richtungen (x und y) führen zu zweidimensionalen Figuren, sog. **Lissajousche Figuren**.

Gedämpfte Schwingungen

Reibungsverluste z. B. in Luft oder in einer Flüssigkeit führen zu einer Dämpfung einer Schwingung. Zur rücktreibenden Kraft $\vec{F} = -D\vec{x}$ kommt z. B. die Reibungskraft nach Stokes dazu, $\vec{F}_R = -6\pi\eta r\vec{v} = -b\vec{v}$, die proportional zur momentanen Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Massenpunktes (oder des Pendels) ist. Die Bewegungsgleichung (Schwingungsgleichung) lautet nun

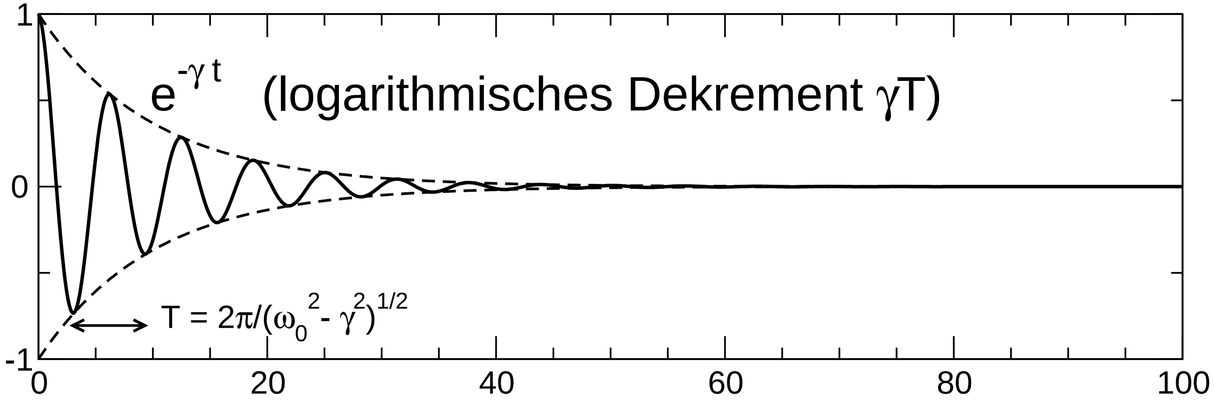
$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - Dx,$$

welche oft vereinfacht geschrieben wird

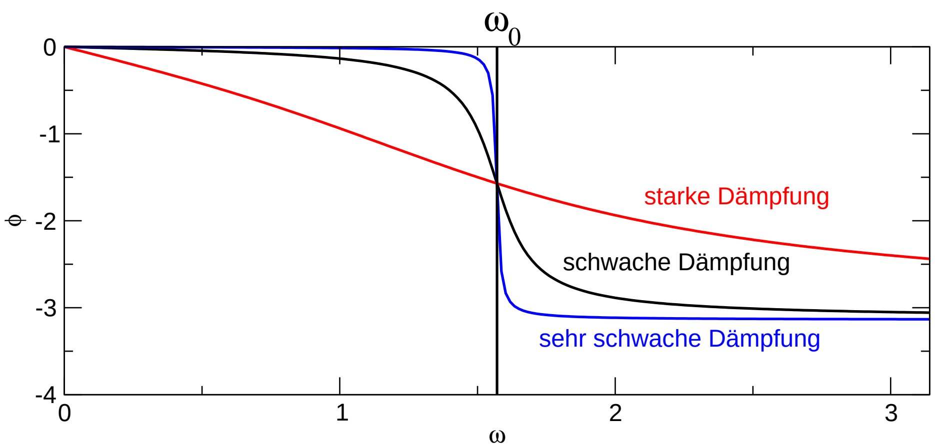
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \text{wo} \;\; \omega_0^2 = \frac{D}{m} \;\; \text{und} \;\; 2\gamma = \frac{b}{m}.$$

Schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0$

Es ist klar, dass eine schwache Dämpfung die Schwingung nur wenig beeinflssen wird. Die Dämpung äußert sich dadurch, dass **die Amplitude der Schwingung mit der Zeit kleiner wird**. Die Amplitude nimmt mit der Zeit **exponentiell** ab, $A(t) \sim A \exp(-\gamma t)$. Dieser Abnahme ist die ursprüngliche Schwingung mit Frequenz ω_0 überlagert. Die Frequenz ω der gedämpften Schwingung ist dagegen leicht verringert ($\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$).



Erzwungene Schwingungen

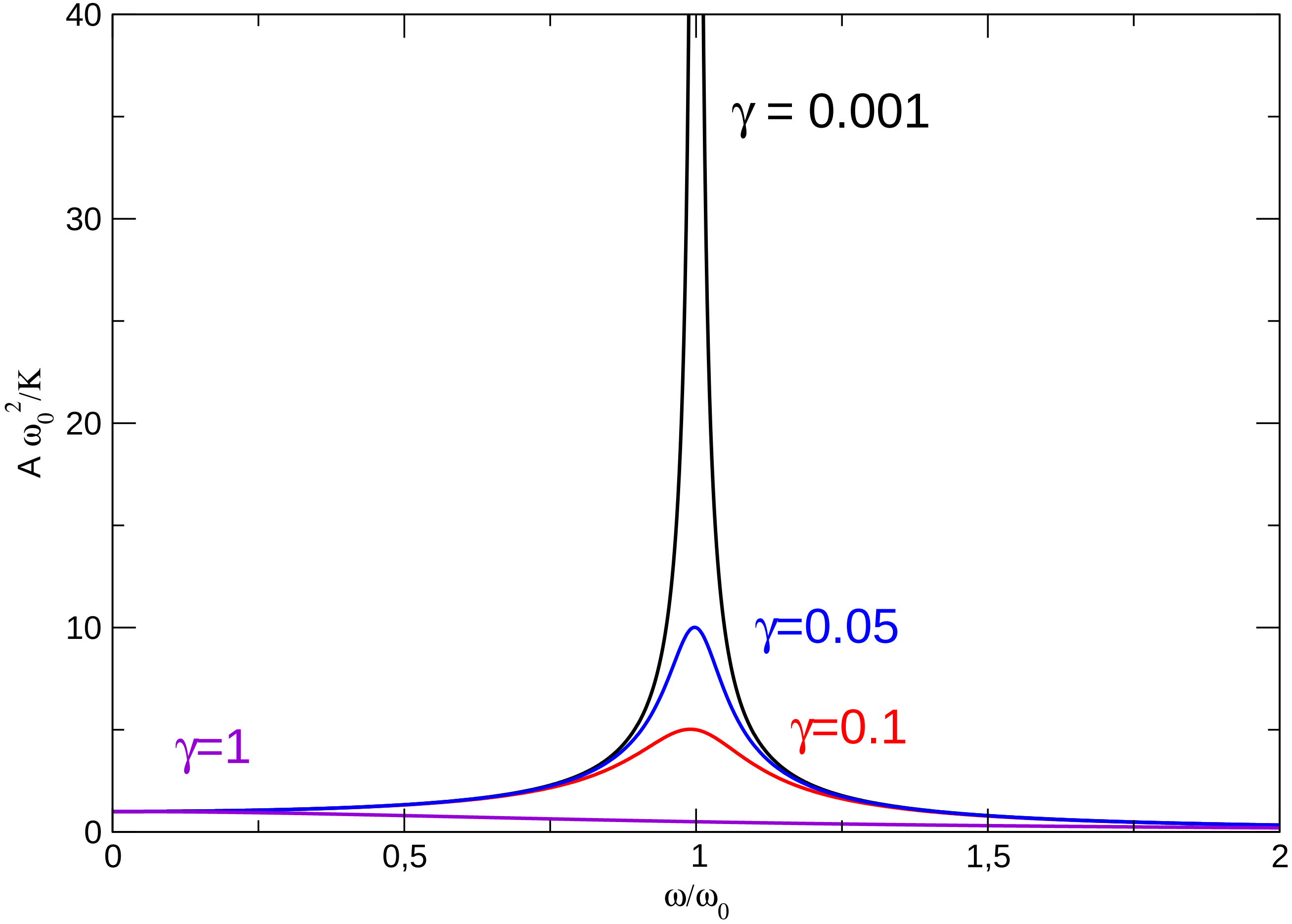


Oft wird eine Schwingung angeregt oder **erzwungen** durch eine ortsunabhängige, periodische Kraft $F = F_0 \sin(\omega t + \phi)$. Die Schwingungsgleichung erhält nun eine rechte Seite (wird inhomogen) und lautet dann

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = K\sin(\omega t + \phi), \quad \text{wo} \quad K = \frac{F_0}{m},$$

Selbst ohne Phase ϕ ergibt sich eine Phasenverschiebung zwischen Anregung und Schwingung, die durch die Dämpfung γ und durch die Anregungsfrequenz ω bestimmt wird.

Auch die Amplitude wird durch diese beiden Größen beeinflusst, hauptsächlich aber durch die Anregungsfrequenz. Das führt zum Phänomen der **Resonanz**.



Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel mit Federkonstanten D seien zusätzlich aneinander gekoppelt durch eine Feder mit D_{12}.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -Dx_1 - D_{12}(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -Dx_2 - D_{12}(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Das sind nun gekoppelte Differentialgleichungen, die man auch lösen kann (Nur für mathematisch Interesierte!). Der wesentliche Punkt, den wir hier beobachten, ist, dass auch hier die Energie erhalten bleibt. Sie geht von einem Pendel zum anderen über - sie schwingt von Pendel zu Pendel!

Lösung der gekoppelten Schwingung

Durch Addieren und Subtrahieren erhält man zwei neue Gleichungen,

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -D(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_2) &= -D(x_1 - x_2) - 2D_{12}(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

was dazu einlädt, neue Variablen $\xi^+ = (x_1 + x_2)/2$ und $\xi^- = (x_1 - x_2)/2$ einzuführen.

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}^+ &= -D\xi^+ \text{ mit } \omega_1^2 = \frac{D}{m} \\ m\ddot{\xi}^- &= -(D + 2D_{12})\xi^- \text{ mit } \omega_2^2 = \frac{D + 2D_{12}}{m} \end{aligned}$$

Separierte Lösungen ξ^+ und ξ^- können zurücktransformiert werden nach

$x_1 = \xi^+ + \xi^-$ und $x_2 = \xi^+ - \xi^-$, und führen zu einer Schwebung.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\\
x_2 &= -2A\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right).
\end{aligned}
$$