Schwingungen

Eine ausgelenkte Feder schwingt harmonisch. Die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x$$

führt zu einer Schwingung

$$x(t) = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t}, \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{wo}$$

$$A = \left(\frac{x_0}{2} - \frac{i}{2}\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) e^{-i\omega t_0} \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{i}{2}\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) e^{i\omega t_0}.$$

Die Schwingung kann auch als reine $\sin$ oder $\cos$ Schwingung geschrieben werden, was genau so allgemein ist, aber einfacher aussieht. Im allgemeinsten Fall

$$x(t) = a \sin(\omega t + \phi),$$

wo a die Amplitude, ω die Frequenz und ϕ die Phase der Schwingung bedeutet.

Zwei Schwingungen lassen sich auch überlagern, man spricht dabei von **Superposition** von zwei Schwingungen,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1), \\ x_2 &= a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2), \\ x_3 &= x_1 + x_2, \\ x_3 &= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2). \qquad (1) \end{aligned}$$

Bei der Superposition spielen sowohl die Frequenz, die Amplitude wie die Phase eine entscheidende Rolle für die entstehende Schwingung. Der wichtigste Spezialfall ist der der sog. Schwebung. Wir betrachten zwei Schwingungen derselben Amplitude, aber mit etwas verschiedener Frequenz (und der Einfachheit halber verschwindender Phase):

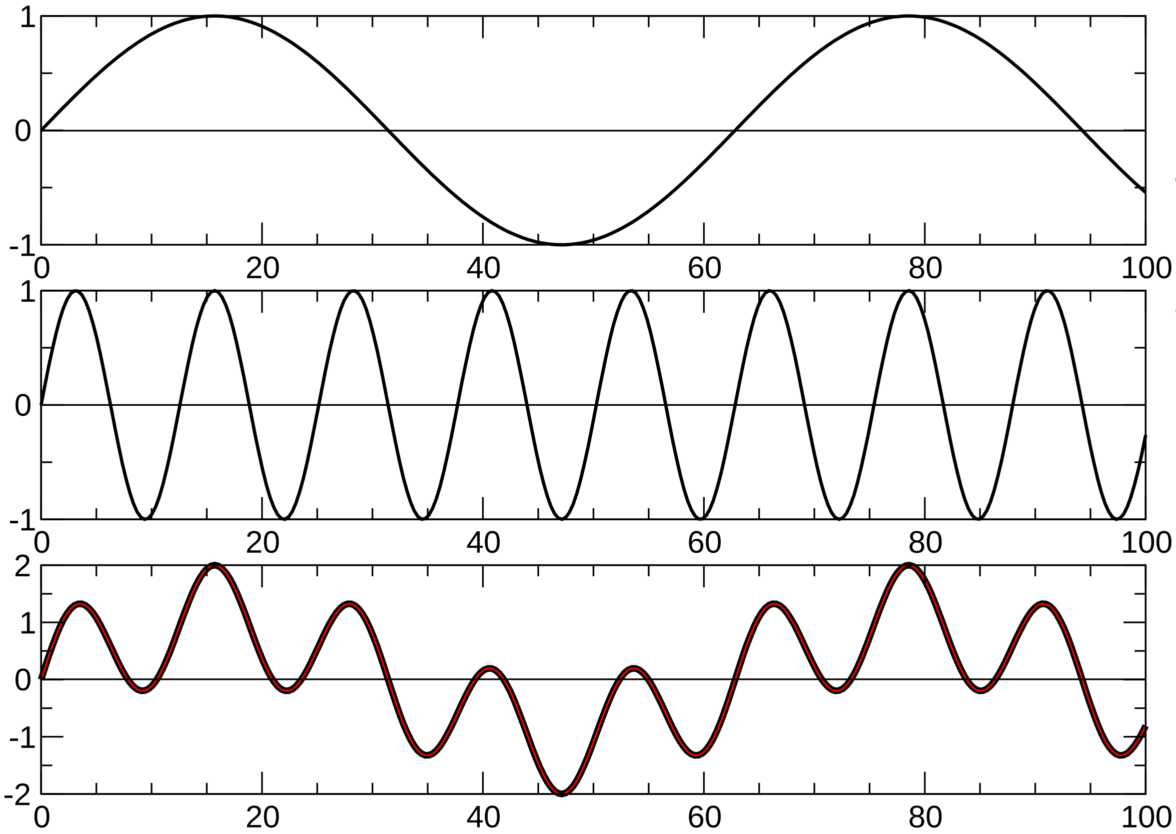
$$x_1 = a \sin \omega_1 t, \quad x_2 = a \sin \omega_2 t.$$

Nach dem Additionssatz $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin((\alpha + \beta)/2) \cos((\alpha - \beta)/2)$

$$x(t) = 2a \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right), \tag{2}$$

also eine Modulation einer hochfrequenten Schwingung durch eine niedrigfrequente Schwingung.

Überlagerung zweier Schwingungen



In der Abbildung nebenan sind die zwei Schwingungen der beiden oberen Panele im untersten überlagert dargestellt. Dabei zeigt die schwarze Kurve die Formel 1 und die rote Kurve Formel 2. Beide Kurven sind, wie sie auch sein sollten, identisch.

Mehrere Schwingungen können ebenfalls überlagert werden,

$$x(t) = \sum_n a_n \sin(\omega_n t + \phi_n).$$

Solange die Frequenzen untereinander rationale Verhältnisse aufweisen, so entsteht daraus immer eine periodische Schwingung! Umgekehrt lässt sich jede periodische Funktion $x(t) = x(t+T)$ immer in eine Summe der obigen Form bringen, in der die Frequenzen $\omega_n = n\omega_1$ erfüllen! Eine solche Zerlegung eines Signals heißt **Fourierzerlegung**, die obige Gleichung stellt eine **Fourierreihe** dar. Fourierzerlegungen sind ein äußerst wichtiges Werkzeug der Physik. Nicht-periodische Funktionen können durch sog. Fourierintegrale behandelt werden.

Überlagerungen von zwei Schwingungen in zwei Richtungen (x und y) führen zu zweidimensionalen Figuren, sog. **Lissajousche Figuren**.

Gedämpfte Schwingungen

Reibungsverluste z. B. in Luft oder in einer Flüssigkeit führen zu einer Dämpfung einer Schwingung. Zur rücktreibenden Kraft $\vec{F} = -D\vec{x}$ kommt z. B. die Reibungskraft nach Stokes dazu, $\vec{F}_R = -6\pi\eta r\vec{v} = -b\vec{v}$, die proportional zur momentanen Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Massenpunktes (oder des Pendels) ist. Die Bewegungsgleichung (Schwingungsgleichung) lautet nun

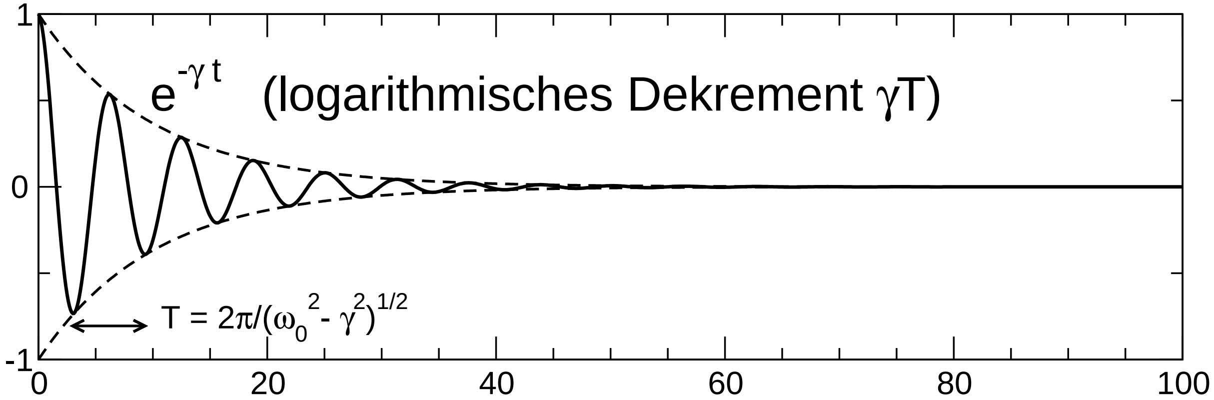
$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - Dx,$$

welche oft vereinfacht geschrieben wird

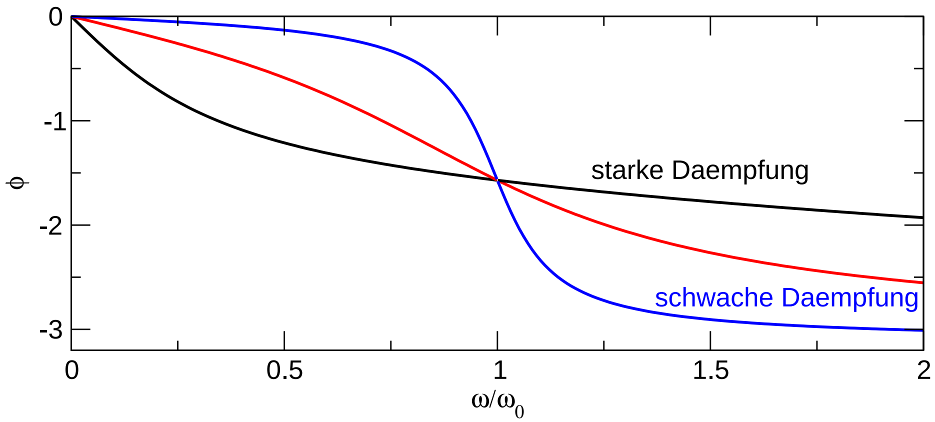
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \text{wo} \;\; \omega_0^2 = \frac{D}{m} \;\; \text{und} \;\; 2\gamma = \frac{b}{m}.$$

Schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0$

Es ist klar, dass eine schwache Dämpfung die Schwingung nur wenig beeinflssen wird. Die Dämpung äußert sich dadurch, dass **die Amplitude der Schwingung mit der Zeit kleiner wird**. Die Amplitude nimmt mit der Zeit **exponentiell** ab, $A(t) \sim A \exp(-\gamma t)$. Dieser Abnahme ist die ursprüngliche Schwingung mit Frequenz ω_0 überlagert. Die Frequenz ω der gedämpften Schwingung ist dagegen leicht verringert ($\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$).



Erzwungene Schwingungen

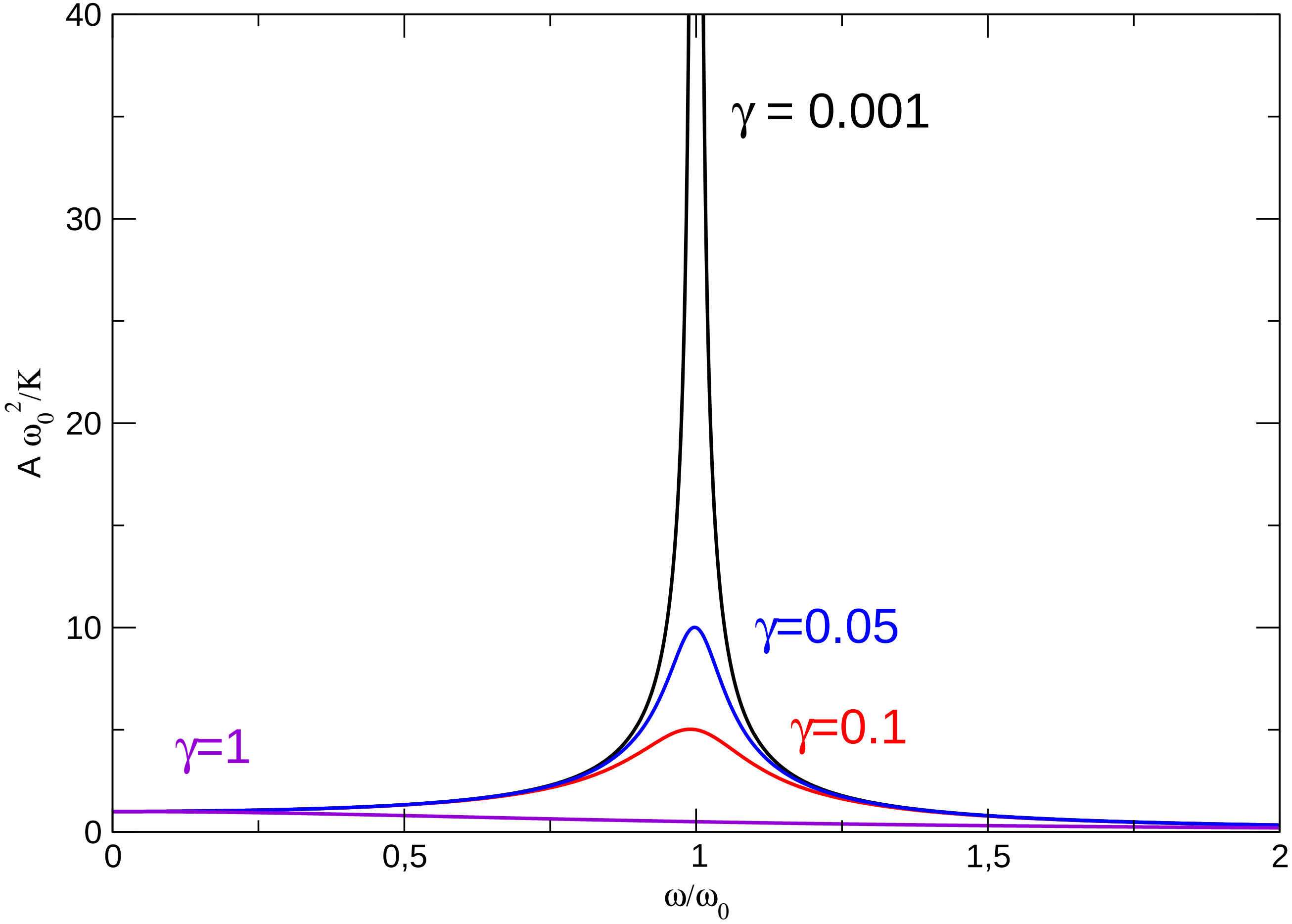


Oft wird eine Schwingung angeregt oder **erzwungen** durch eine ortsunabhängige, periodische Kraft $F = F_0 \sin(\omega t + \phi)$. Die Schwingungsgleichung erhält nun eine rechte Seite (wird inhomogen) und lautet dann

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = K\sin(\omega t + \phi), \quad \text{wo} \quad K = \frac{F_0}{m},$$

Selbst ohne Phase ϕ ergibt sich eine Phasenverschiebung zwischen Anregung und Schwingung, die durch die Dämpfung γ und durch die Anregungsfrequenz ω bestimmt wird. Die Schwingung hinkt hinter der Aregung nach.

Auch die Amplitude wird durch diese beiden Größen beeinflusst, hauptsächlich aber durch die Anregungsfrequenz. Das führt zum Phänomen der **Resonanz**.



Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel mit Federkonstanten D seien zusätzlich aneinander gekoppelt durch eine Feder mit D_{12}.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -Dx_1 - D_{12}(x_1 - x_2) \\
m\ddot{x}_2 &= -Dx_2 - D_{12}(x_2 - x_1)
\end{aligned}
$$

Das sind nun gekoppelte Differentialgleichungen, die man auch lösen kann (Nur für mathematisch Interessierte!). Der wesentliche Punkt, den wir hier beobachten, ist, dass auch hier die Energie erhalten bleibt. Sie geht von einem Pendel zum anderen über - sie schwingt von Pendel zu Pendel!

Die folgende Herleitung der Lösung zeigt genau das in mathematischer Sprache ausgedrückt. Dazu reicht es, sich nur das Resultat anzuschauen.

Lösung der gekoppelten Schwingung

Durch Addieren und Subtrahieren erhält man zwei neue Gleichungen,

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -D(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_2) &= -D(x_1 - x_2) - 2D_{12}(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

was dazu einlädt, neue Variablen $\xi^+ = (x_1 + x_2)/2$ und $\xi^- = (x_1 - x_2)/2$ einzuführen.

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}^+ &= -D\xi^+ \;\; \text{mit} \;\; \omega_1^2 = \frac{D}{m} \\ m\ddot{\xi}^- &= -(D + 2D_{12})\xi^- \;\; \text{mit} \;\; \omega_2^2 = \frac{D + 2D_{12}}{m} \end{aligned}$$

Separierte Lösungen ξ^+ und ξ^- können zurücktransformiert werden nach $x_1 =$

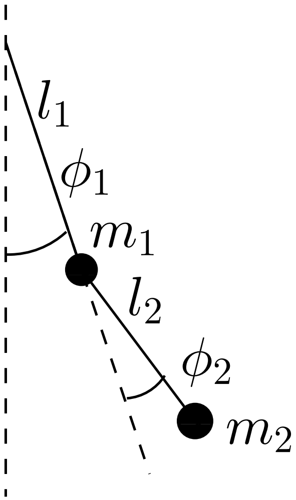
$\xi^+ + \xi^-$ und $x_2 = \xi^+ - \xi^-$, und führen zu einer Schwebung.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\\
x_2 &= -2A\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

eine Schwebung!

Man beachte, dass die beiden Pendel (wenn sie schwingen) mit derselben Frequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$ und um $\Delta\phi = \pi/2$ phasenverschoben schwingen. Der Term mit der Frequenz $(\omega_1 - \omega_2)/2$ verändert sich nur langsam im Vergleich zu $(\omega_1 + \omega_2)/2$, auch er ist um $\Delta\phi = \pi/2$ phasenverschoben. Das beschreibt das Stillstehen des einen Pendels während das andere seine maximale Auslenkung hat wie auch den Austausch von Energie zwischen den beiden Pendeln.

Ein chaotisches Pendel



Das nebenan skizzierte Doppelpendel vollführt erstaunliche Bewegungen und illustriert ein sog. deterministisches chaotisches System. Während zwar alles durch die Bewegungsgleichungen vorgegeben ist (deterministisch), ist es trotzdem chaotisch - die Anfangsbedingungen spielen eine zentrale Rolle und bereits kleinste Abweichungen führen zu großen Veränderungen im dynamischen Verhalten. Mit den nebenan definierten Größen findet man für die Bewegungsgleichungen (ohne Herleitung):

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2)_1\ddot{\phi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) +_2 l_2 \dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + g(m_1 + m_2)\sin\phi_1 &= 0 \\
m_2 l_2 \ddot{\phi}_2 + m_2 l_1 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - m_2 l_1 \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + g m_2 \sin\phi_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Die nicht-linearen Terme in diesem System von gekoppelten Differentialgleichungen sind ausschlaggebend für das chaotische Verhalten.

Beispiel einer Bewegungsgleichung: Die Raketengleichung

Als weiteres Beispiel für eine Bewegungsgleichung untersuchen wir die Raketengleichung, welche die Bewegung von Raketen beschreibt. Bei einer konstanten Brennrate $\dot{m}$ entströmen während der Brennzeit t_B die heißen Gase der Düse mit einer Geschwindigkeit v_0. Dann lautet der Ausdruck für die Masse der Rakete

$$m(t) = m_0 - \dot{m}t,$$

wo m_0 die Masse der Rakete zur Zeit $t = 0$ ist. Auf die Rakete wirkt neben der Gravitationskraft $F = m(t) \cdot g$ auch die Kraft, die durch die ausströmenden Gase auf sie entsteht, denn $F = \dot{p}$:

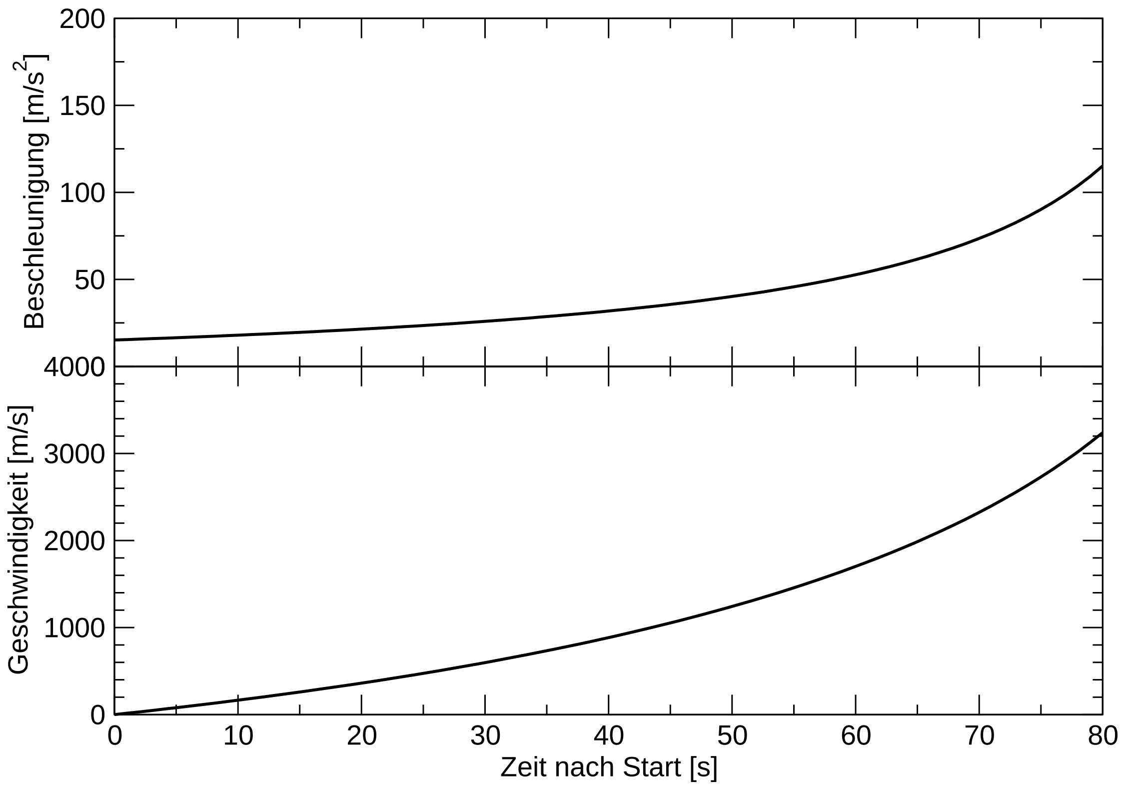
$$F_{\text{tot}} = (m_0 - \dot{m}t)\, a(t) = \dot{m}v_0 - (m_0 - \dot{m}t)\, g.$$

Raketengleichung II

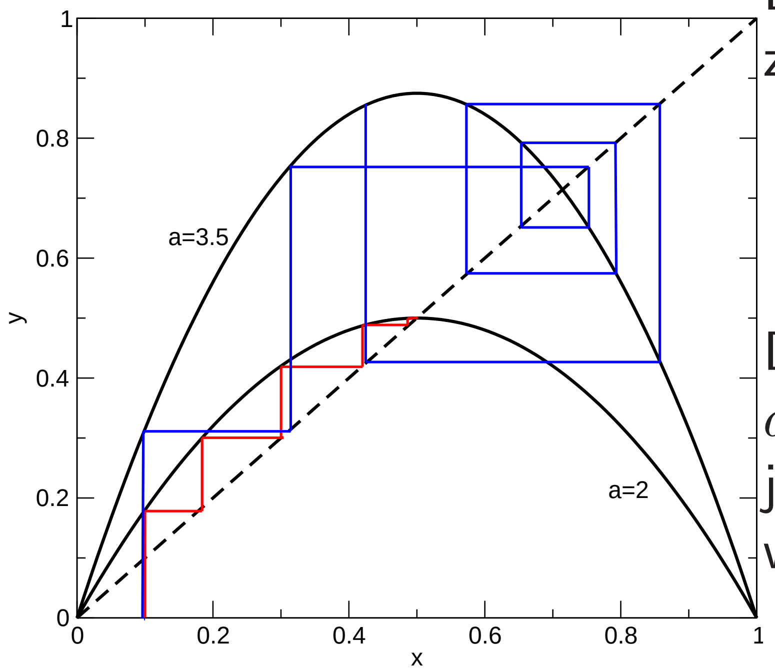
Wir formen um und integrieren nach der Zeit

$$
\begin{aligned}
(m_0 - \dot{m}t)\, a(t) &= \dot{m}v_0 - (m_0 - \dot{m}t)\, g \\
\ddot{x}(t) = a(t) &= \frac{\dot{m}}{(m_0 - \dot{m}t)} v_0 - g \\
\dot{x}(t) = v(t) = \int \mathrm{d}t' \ddot{x}(t') &= \int_0^t \mathrm{d}t' \left(\frac{\dot{m}}{(m_0 - \dot{m}t')} v_0 - g \right) \\
v(t) &= v_0 \int_0^t \mathrm{d}t' \frac{\dot{m}}{(m_0 - \dot{m}t')} - gt \\
v(t) &= v_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t} \right) - gt
\end{aligned}
$$

Raketengleichung III



Ein Beispiel aus der Biologie



Das Wachstum einer Population sei proportional zur Anzahl Individuen, N,

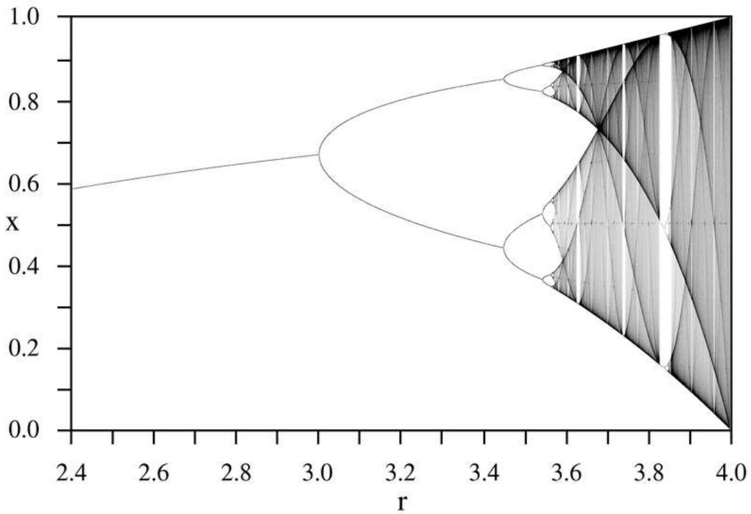
$$N_{n+1} = aN.$$

Durch Futtermangel wird der eproduktionsfaktor a reduziert auf $a(1-bN_n)$ weil der Futtermangel ja prortional zur Anzahl "Mäuler" ist. Also haben wir

$$N_{n+1} = a \cdot N_n(1 - bN_n).$$

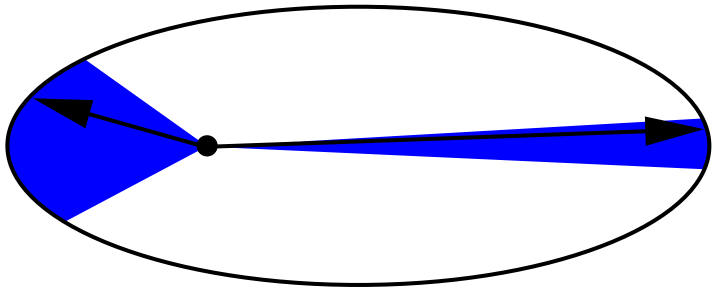
Es gibt eine stationäre ("stabile") Lösung, $N_{n+1} = N_n = N_{\rm st}$ für welche $b = (a-1)/(a * N_{\rm st})$ gilt. Für $a < 1$ wird $N_{n+1} < N_n$, die Bevölkerung stirbt aus. Für $a > 1$ und $b = 0$ wächt die Bevölkerung. Wir setzen nun $x = b * N \leq 1$ und erhalten dann

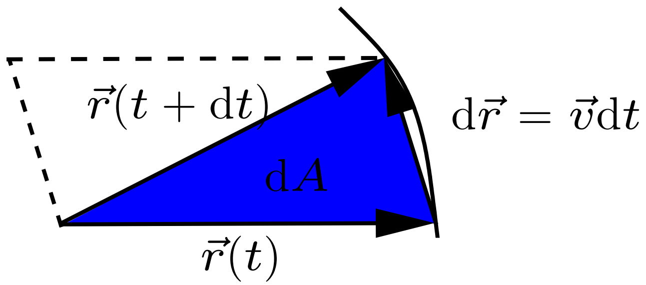
$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) = ax_n - ax_n^2.$$



Die Lösungen kann man graphisch sehen. Der x_n folgende Wert, x_{n+1} kann dann einfach an der Winkelhalbierenden abgelesen werden. Wie man sieht, gibt es Fälle, die stabil enden, andere, die das nicht tun. Das wird durch den Wachstumsparameter a kontrolliert. Stellt man den (die) Endwert(e) gegen a dar, so erhält man ein sog. **Feigenbaum-Diagramm** (links).

Die Keplerschen Gesetze





Kepler I: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen. In einem Brennpunkt steht die Sonne.
Kepler II: Der Verbindungsstrahl Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{1}{2m}|\vec{L}|.$$

Kepler III: Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{T_i^2}{a_i^3} = \text{const.}$$

Die Gravitation

Newton hat erkannt, dass die Keplerschen Gesetze aus derselben Kraft folgen, die auch Äpfel im Fallen beschleunigt. Die Gravitation wirkt zwischen zwei Körpern mit Massen m_1 und m_2.
Aus Kepler I und II bzw. der Drehimpulserhaltung folgt, dass es sich dabei um ein zentrales Kraftfeld handeln muss.

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{\hat{r}}$$

<u>Feld:</u> An jedem Punkt im Raum ist eine Größe zugeordnet, z. B. die Temperatur $\longrightarrow$ Temperaturfeld. Ist jedem Punkt ein Vektor zugeordnet, wie z. B. die Gravitationskraft, so handelt es sich um ein Vektorfeld. Ein Temperaturfeld ist ein skalares Feld.
Die Gravitationskraft wirkt proportional zur Masse eines Körpers, die Gravitation

muss ferner, nach Newton III, gleich stark auf Körper 1 wirken, wie auf Körper 2 ("actio = reactio"), also

$$\vec{F}_G = G m_1 m_2 f(r) \vec{\hat{r}},$$

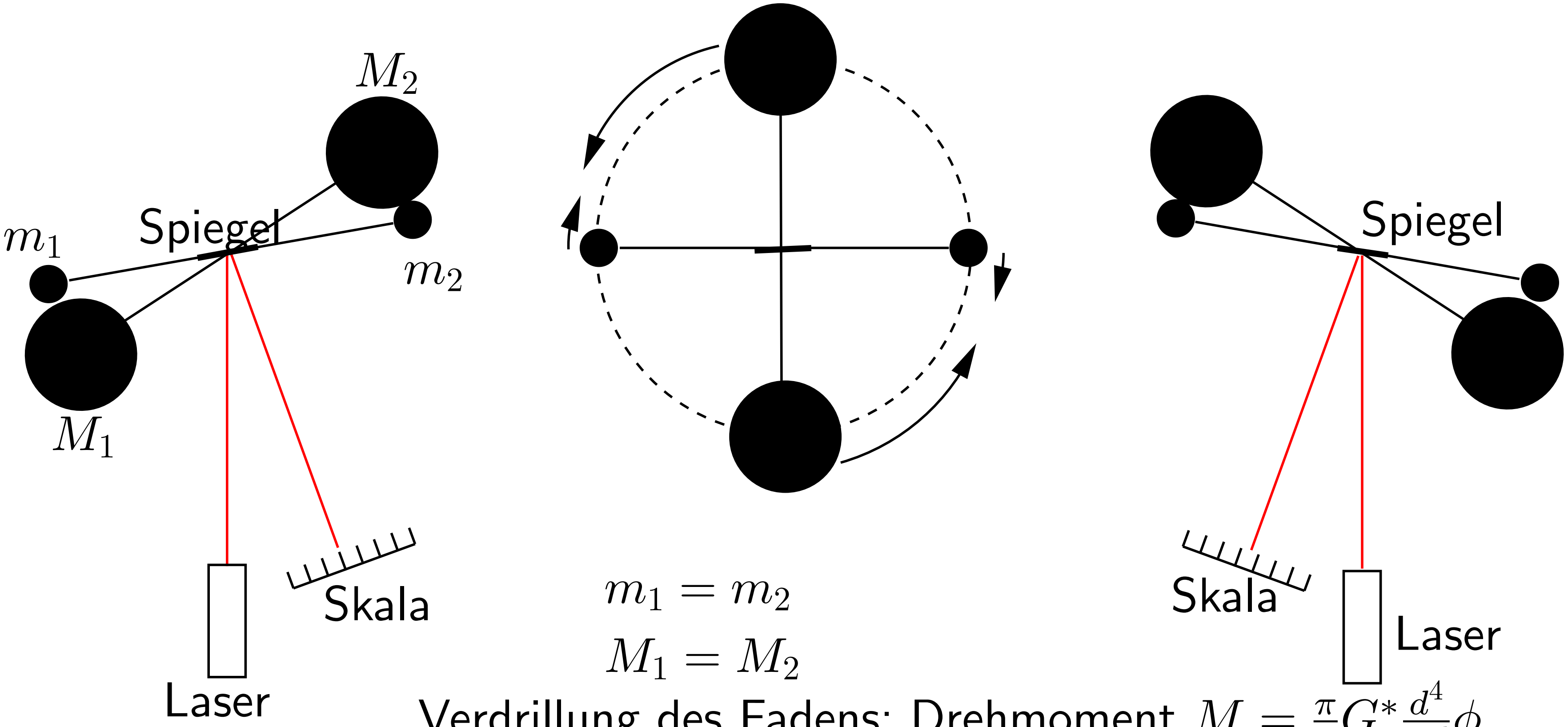
wo $G \approx 6,673(10) \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$ die schwierig zu bestimmende Gravitationskonstante ist.
Entlang einer Planetenbahn wirkt die Gravitation als Zentripetalkraft, sie hält den Planeten auf seiner Bahn (beschleunigte Bewegung!)

$$G m_i M_\odot f(r_i) = m_i \omega_i^2 r_i.$$

Aus Kepler III haben wir $\omega_i^2 \propto T_i^{-2} \propto r_i^{-3}$ und folglich $f(r_i) \propto r_i^{-2}$, also

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = -G \frac{m\ M_\odot}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Messung von G mit der Drehwaage von Cavendish



$m_1 = m_2$

$M_1 = M_2$

Verdrillung des Fadens: Drehmoment $M = \frac{\pi}{2} G^* \frac{d^4}{16l} \phi$

Gleichgewicht des rücktreibenden Drehmomentes M und des durch die Gravitation ausgeübten Drehmomentes $M_G = 2F_G L$, wo

$$F_G = G\frac{mM}{r^2} = G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \rho^2 r_i^3 R_i^3.$$

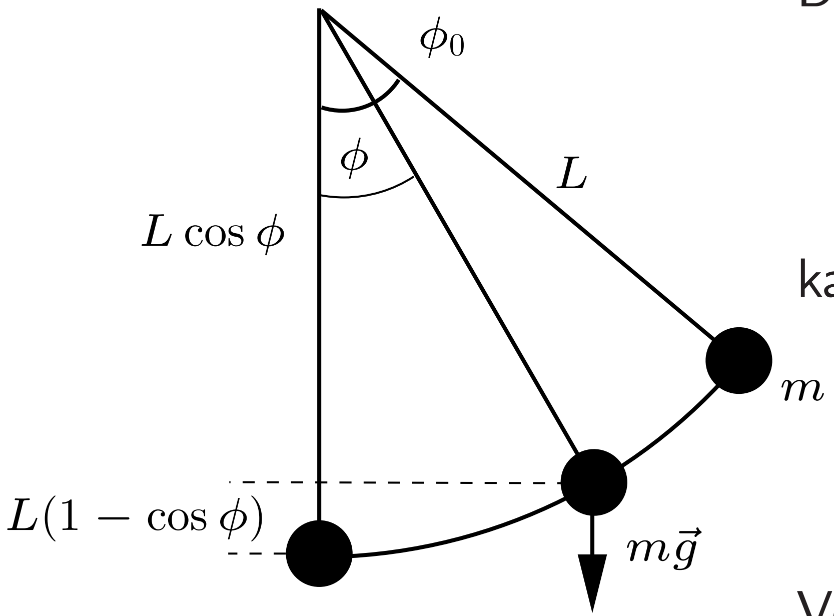
Die Gravitationskonstante kann nun ermittelt werden:

$$\begin{aligned} G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \rho^2 r_i^3 R_i^3 &= \frac{1}{2L}\frac{\pi}{2}G^*\frac{d^4}{16l}\phi \\ G &= \frac{9G^*}{64\pi}\frac{r^2(d/2)^4}{lL\rho^2 r_i^3 R_i^3}\phi \end{aligned}$$

wo G^* das Torsionsmodul des Fadens ist (hier nicht behandelt).

Messung von G mit der Drehwaage von Cavendish

Bestimmung von g



Die Bewegungsgleichung

$$mg\sin\phi = -mL\ddot{\phi}$$

kann durch Reihenentwicklung gelöst werden

$$\sin\phi \approx \phi - \frac{\phi^3}{3!}.$$

Vernachläßigen der höheren Terme bei kleinem ϕ liefert

$$mg\phi = -mL\ddot{\phi}.$$

Das ist eine Schwingungsgleichung,

$$\phi(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \quad \text{mit Schwingungsdauer} \quad T = 2\pi\sqrt{L/g}.$$

Potentielle Energie im Gravitationsfeld

Wir können einfach die potentielle Energie einer Masse m im Gravitationsfeld einer Masse M berechnen. Die Arbeit A, die erforderlich ist, um einen Körper vom Abstand r_0 in einen Abstand r_1 zu bringen ist

$$A = \int_{r_0}^{r_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{r_0}^{r_1} \frac{GMm}{r^2} \mathrm{d}r = -GMm \int_{r_0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Die erforderliche Arbeit, um einen Körper unendlich weit wegzubringen, ist daher

$$A = -GMm \frac{1}{r_0}.$$

Das Gravitationspotential

Die Arbeit pro Masse, die aufgewendet werden muss, um einen Körper ins Unendliche zu befördern, wird Potential U genannt.

$$U = -GM/r$$

Dass der Nullpunkt im Unendlichen liegt, ist Konvention.

Fluchtgeschwindigkeiten

Als Anwendung des Potentialbegriffs untersuchen wir die Mindestgeschwindigkeit, die eine Rakete haben muss, um die Erde zu verlassen.

An der Erdoberfläche muss gelten $mg = \frac{GMm}{r_{\mathrm{E}}^2}$, also $g = GM/r_{\mathrm{E}}^2$, und folglich ist die erforderliche Arbeit gerade

$$A = -mgr_{\mathrm{E}}.$$

Vorerst berechnen wir die Geschwindigkeit, mit der eine stabile Kreisbahn möglich ist. Dazu muss die Zentrifugalkraft auf das kreisförmig bewegte (also beschleunigte) Raumschiff gerade die Gravitationskraft kompensieren, also

$$\frac{mv^2}{r_{\mathrm{E}}} = \frac{GMm}{r_{\mathrm{E}}^2}$$

und damit

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_\mathrm{E}}} \approx 7.9 \text{ km/s}$$

für ein "Raumschiff", welches haarscharf über der Erdoberfläche um die Erde saust. Bei tangentialem Abschuss reicht diese Geschwindigkeit, bei Vernachlässigung der Reibung, gerade aus, damit die Rakete nicht auf den Erdboden zurückfällt. Sie heißt oft "erste kritische Geschwindigkeit".

Die soeben beschriebene Rakete bleibt auf immer im Schwerefeld der Erde gefangen. Die Geschwindigkeit am Erdboden einer Rakete, die das Schwerefeld der Erde verlassen soll, die "zweite kritische Geschwindigkeit" oder "Fluchtgeschwindigkeit", errechnet sich einfach mit $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r_\mathrm{E}} = mgr_\mathrm{E}$, also

$$v = \sqrt{\frac{2GM_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}}} = \sqrt{2gr_\mathrm{E}} \approx 11.2 \text{ km/s}.$$

Diese Geschwindigkeit ist also notwendig, um von der Erde aus ins Unendliche zu geraten. Oder reicht das etwa nicht?

$$v = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_{\odot-\mathrm{E}}}} = 42.1 \text{ km/s},$$

die “dritte kritische Geschwindigkeit” ist die Geschwindigkeit, die eine Rakete bei der Erde braucht, um das Sonnensystem zu verlassen.

Wie fliegt ein Körper, der die Erde bzw. das Sonnensystem verlässt?