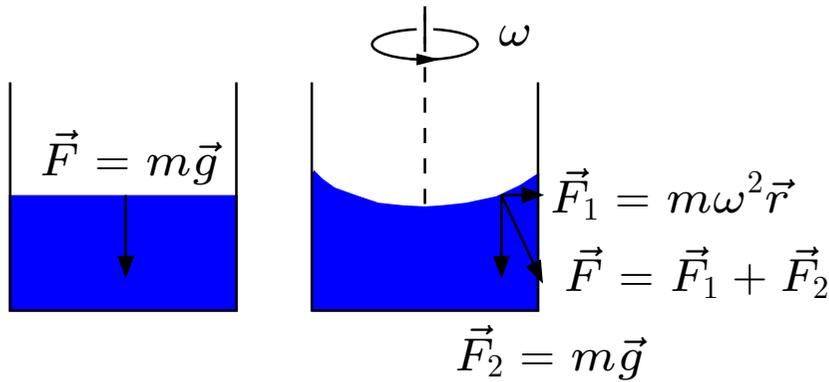


# Hydrostatik

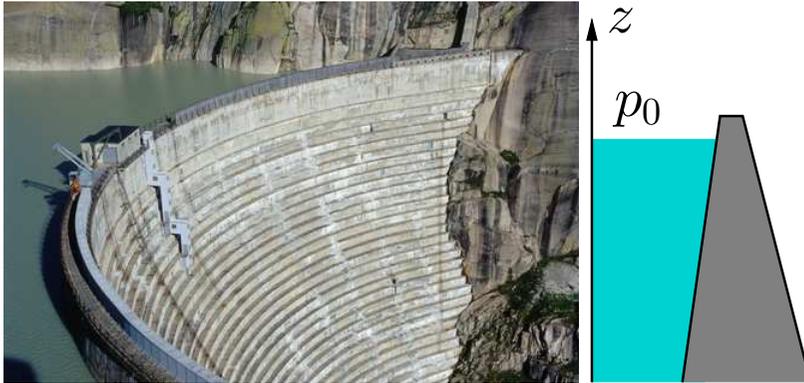


Wir werden vorerst nur ideale Flüssigkeiten untersuchen, für die sowohl Reibungskräfte wie auch Oberflächeneffekte vernachlässigbar sein sollen. Flüssigkeiten können damit ohne Kraftausübung deformiert werden, in ihrer Verformung kann keine Energie gespeichert werden. Einzelne Teilchen (z. B. Moleküle,

Massenelemente) können in einer idealen Flüssigkeit frei verschoben werden. Deshalb steht die Oberfläche einer idealen Flüssigkeit immer senkrecht zur angreifenden Kraft. Im hier gezeigten Beispiel kann der Winkel  $\alpha$  zwischen der Horizontalen und der Oberfläche, bzw. die Steigung, einfach berechnet werden:

$$\tan \alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} \longrightarrow z(r) = \frac{\omega^2}{g} \int dr r = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0$$

## Druck in einer Flüssigkeit

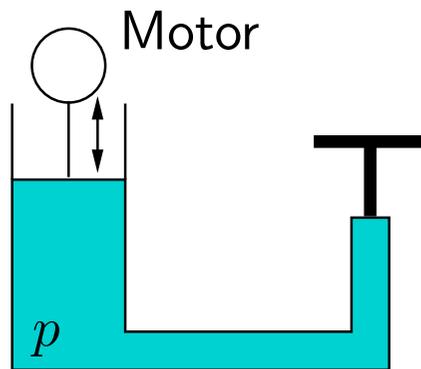


Spittellamm Sperre am Grimsensee.  
(mit freundl. Genehmigung KWO).

Das Eigengewicht  $\rho g dV$  einer Flüssigkeit ist in der Regel nicht vernachlässigbar und führt zu einer Zunahme des Drucks mit der Tiefe in der Flüssigkeit. In einer **in-kompressiblen** Flüssigkeit hat eine Schicht der Dicke  $dz$  das Gewicht  $\rho A dz$ , wo  $A$  die Querschnittsfläche ist. Der Druck auf die untere Fläche ist  $p = F_G/A = m g/A$ . In einer Flüssigkeitssäule gilt deshalb

$$p(h) = \int_0^h dz \frac{\rho \cdot g \cdot A}{A} = \rho \cdot g \cdot h + p_0.$$

An der Oberkante gilt  $p(h) = p_0$  und folglich  $p(z) = \rho \cdot g \cdot (h - z) + p_0$ .



Weil sich jedes Flüssigkeitselement frei bewegen kann, muss die Gesamtkraft auf ein ruhendes Flüssigkeitselement verschwinden. Ist das Eigengewicht der Flüssigkeit vernachlässigbar, so ist der Druck  $p$  überall in der Flüssigkeit gleich groß. Dieser Sachverhalt wird in hydraulischen Pressen ausgenutzt. Dafür werden inkompressible Flüssigkeiten verwendet. Mit einem Motor kann ein Stempel bewegt werden. Weil das

Volumen konstant bleiben muss, bewegt sich eine Hebebühne oder der Presskopf entsprechend.

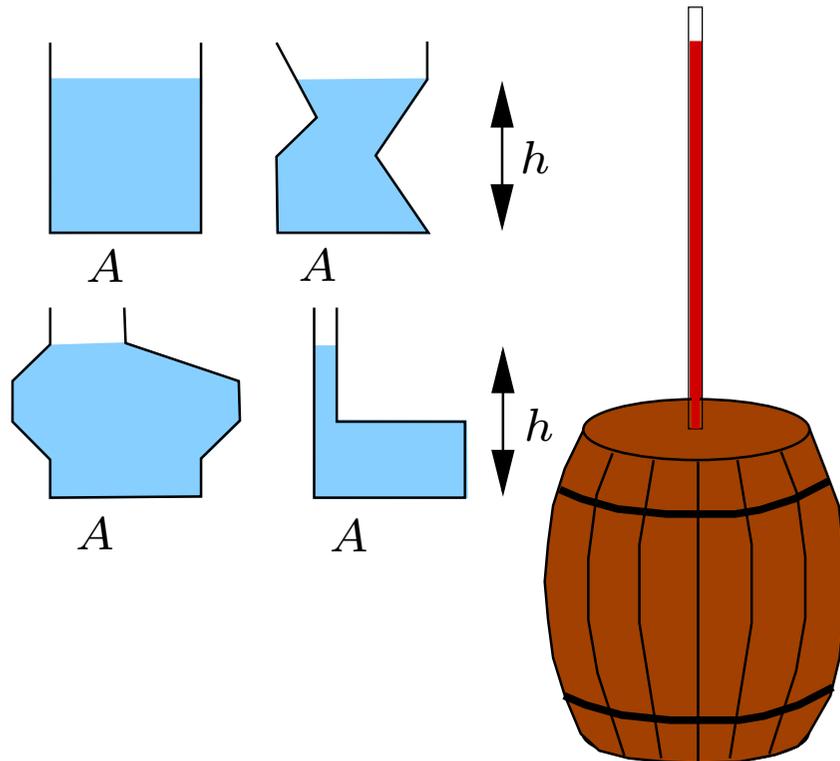
Übung: Welche Arbeit  $A$  leistet der Motor, wenn er ein Auto der Masse  $m = 700$  kg um  $h = 1,5$  m in die Höhe heben muss?

Antwort: Wegen der Energieerhaltung gilt (unabhängig von der Querschnittsfläche des Stempels)  $A = mgh$ . Wegen  $V = A_1 h_1 = A_2 h_2 = \text{const.}$  wirkt das Verhältnis der Querschnittsflächen wie eine Übersetzung oder ein Hebelarm.

# Hydrostatisches Paradoxon

Weil der Schweredruck

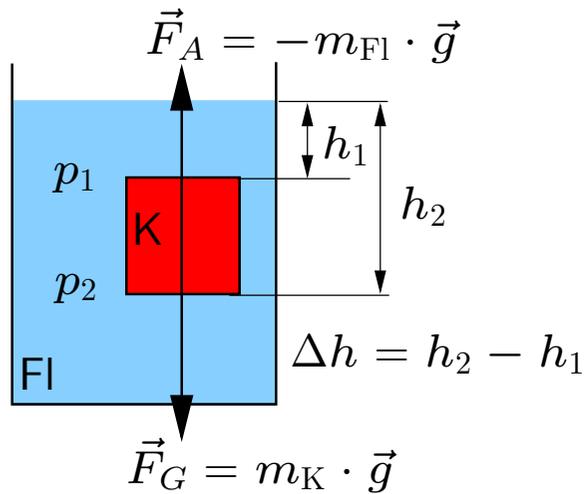
$$p = \rho g h$$



einer Wassersäule der Höhe  $h$  nur von der Dichte  $\rho$  und der Höhe  $h$  abhängt, ist der Druck auf die Grundfläche  $A$  in allen links abgebildeten Gefäßen gleich groß<sup>1</sup>, selbst wenn doch das Gesamtgewicht der Flüssigkeiten stark variiert. Deshalb kann man ein volles Weinfass mit nur einem zusätzlichen Glas Wein zum Bersten bringen (Blaise Pascal).

<sup>1</sup>Reibung spielt keine Rolle, weil sich die Flüssigkeit nicht bewegt.

## Hydrostatischer Auftrieb (Archimedisches Prinzip)

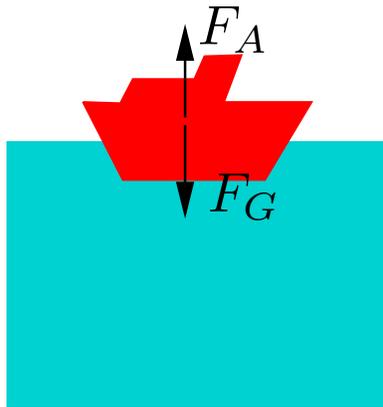


Ein Körper K, z. B. ein Quader, der Dichte  $\rho_K$  und Volumen  $V = \Delta h \cdot A$  sei in eine Flüssigkeit der Dichte  $\rho_{F1}$  eingetaucht. Die Gravitationskraft ist  $\vec{F}_G = m\vec{g}$ . Zwischen der Ober- und Unterkante des Körpers besteht ein Druckunterschied  $\Delta p = \rho_{F1} \cdot g \cdot \Delta h$ . Dies führt zu einer Auftriebskraft

$$\vec{F}_A = \Delta p \cdot A \cdot \vec{e}_z = \rho_{F1} g A \Delta h \vec{e}_z = -m_{F1} \cdot \vec{g}.$$

Dies gilt natürlich auch für beliebig geformte Körper. Auf jedes Volumenelement wirkt neben der Gewichtskraft  $\vec{F}_G = \rho_K \vec{g} dV$  auch eine Auftriebskraft, die durch den Druckunterschied und den Höhenunterschied über das Volumenelement bestimmt wird.

## Übung: Color Fantasy



Die Color Fantasy wiegt etwa 54'000 Tonnen, ist 223,90 Meter lang und 35 Meter breit. Wie groß ist ihr Tiefgang? Machen Sie vereinfachende Annahmen.

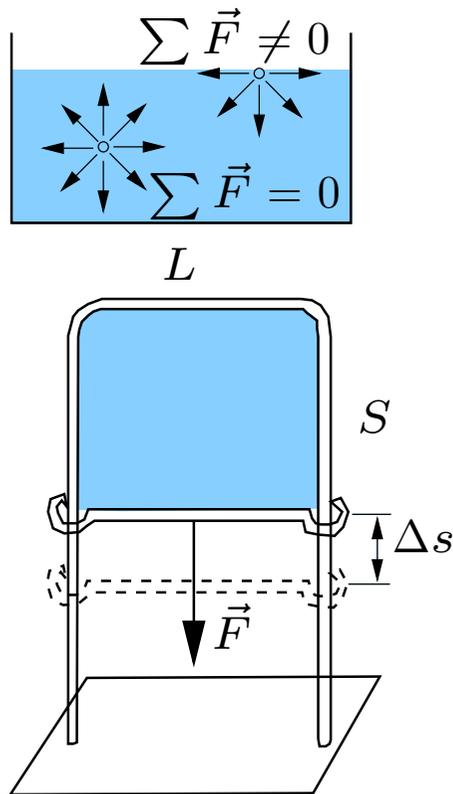
Lösung: Nach Newton III muss die Gewichtskraft auf die Color Fantasy gerade durch den Auftrieb kompensiert werden. Dieser ist gerade gleich groß wie die Gewichtskraft auf das verdrängte Wasser. Also

$$F_G = M_{CF} \cdot g = M_{F1}g = V_{F1}\rho g = L \cdot B \cdot \Delta h \cdot \rho \cdot g.$$

Nach  $\Delta h$  auflösen ergibt

$$\Delta h = \frac{M_{CF}}{L \cdot B \cdot \rho_{F1}} = \frac{54'000'000}{223,90 \cdot 35 \cdot 1000} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}/\text{m}^3} = 6,9\text{m}.$$

## Oberflächenspannung

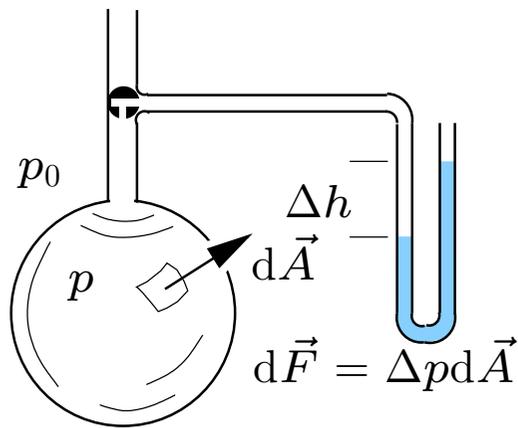


Innerhalb einer Flüssigkeit heben sich die Kräfte auf ein Molekül auf, am Rande oder auch an der Gefäßwand in der Regel nicht. Um ein Molekül aus der Flüssigkeit zum Rande zu verschieben, muss gegen diese Kraft Arbeit verrichtet werden. Deshalb muss zur Vergrößerung der Oberfläche um  $\Delta A$  eine Arbeit  $\Delta W$  aufgebracht werden; der Quotient  $\varepsilon = \Delta W / \Delta A$  ist die sog. **spezifische Oberflächenenergie**. Diese kann mit der Anordnung links unten bestimmt werden. Zur Vergrößerung um  $\Delta A = 2 \cdot L \cdot \Delta S$  (zwei Seiten) ist die folgende Arbeit erforderlich:

$$\Delta W = F \cdot \Delta s = \varepsilon \Delta A = \varepsilon \cdot 2 \cdot L \cdot \Delta s, \quad \text{also} \quad \sigma \doteq \frac{F}{2L} = \varepsilon,$$

wo  $\sigma$ , die sog. **Oberflächenspannung**, gerade gleich  $\varepsilon$  ist.

## Druck im Inneren einer Seifenblase



Wir können den Druck im Inneren einer kugelförmigen Seifenblase jetzt einfach bestimmen: Die Seifenblase versucht sich zusammenzuziehen (Oberflächenspannung), was einen kleinen Überdruck  $\Delta p$  im Innern erzeugt. Die Druckkraft nach außen wird gerade durch die Oberflächenspannung kompensiert. Ein stabiler Zustand ist nur dann erreicht, wenn der Energiegewinn  $\varepsilon \cdot \Delta A$  durch eine Verkleinerung der Blase um  $\Delta r$

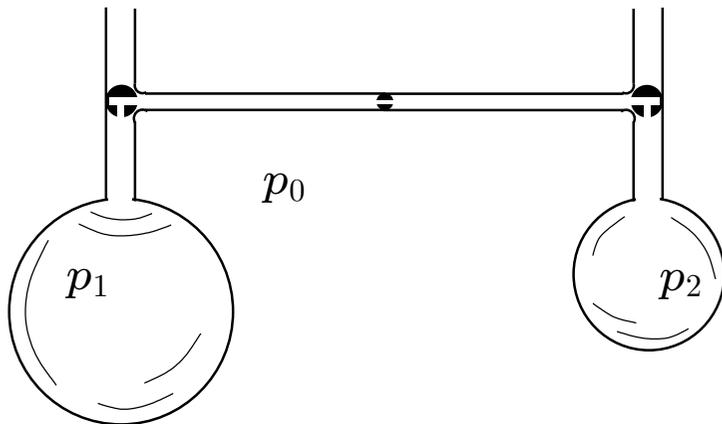
gerade gleich dem Energieaufwand  $F_p \Delta r = \Delta p 4\pi r^2 \Delta r$  ist.

$$\varepsilon \cdot 2 \cdot 4\pi [r^2 - (r - \Delta r)^2] = \Delta p \cdot 4\pi r^2 \Delta r.$$

Vernachlässigen wir Terme mit  $\Delta r^2$ , so erhalten wir:

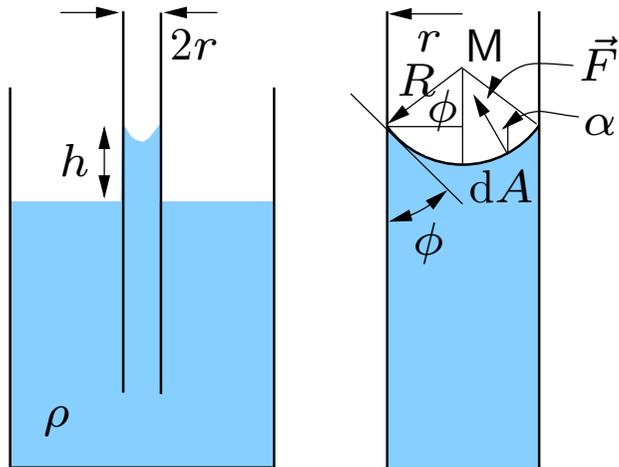
$$\Delta p = \frac{4\varepsilon}{r}.$$

Hier steht  $4 = 2 \times 2$  im Zähler weil die Seifenblase eine Innen- und eine Außenseite hat.



Der Überdruck sinkt mit wachsendem Radius  $r$ . Dies führt auch dazu, dass im Versuch links der große Ballon wächst, während der kleine schrumpft. Ist also die Oberflächenenergie positiv, so versucht eine Flüssigkeit bei gegebenem Volumen eine minimale Oberfläche einzunehmen.

## Kapillarität



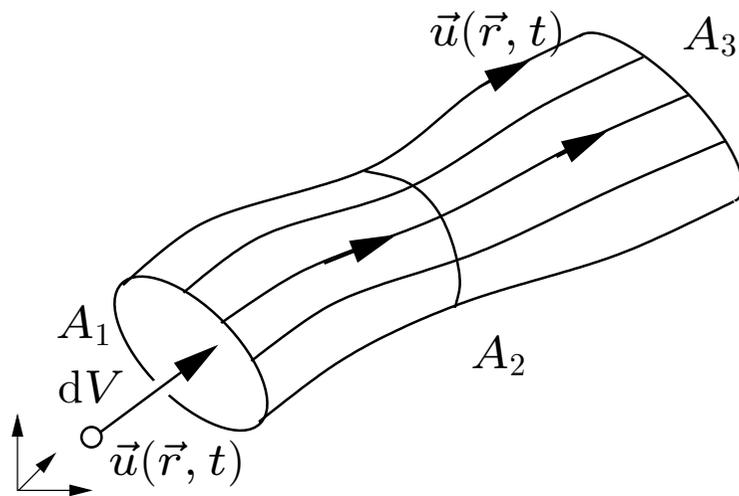
Wenn wir ein Rohr in Wasser eintauchen, so steigt der Wasserstand im Rohr um  $h$ . Ist der Innenradius der Kapillare kleiner als der gekrümmte Bereich der Flüssigkeitsoberfläche, so nähern wir diesen als Kugeloberfläche mit Krümmungsradius  $R = r / \cos \phi$ . An der Flüssigkeitsoberfläche herrscht der Druck

$$p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma}{r} \cos \phi \quad (\text{nur eine Seite, daher } 2\sigma).$$

Die Druckkraft auf die Fläche ist  $p\pi r^2$  und muss gleich sein wie die Gewichtskraft der darunterliegenden Flüssigkeitssäule,  $F_G = mg = \rho\pi r^2 h g$ . Daraus folgt für die Höhe  $h$  der Säule,

$$h = \frac{2\sigma \cos \phi}{r g \rho}.$$

## Hydrodynamik

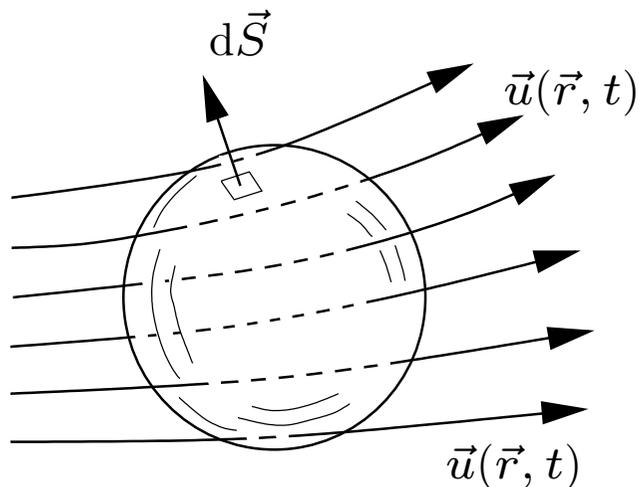


Die Beschreibung von bewegten Flüssigkeiten muss alle äußeren Kräfte, Reibungskräfte und auf Druckdifferenzen zurückzuführende Kräfte berücksichtigen, also

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{F}_R = \Delta m \ddot{\vec{r}} = \rho dV \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Flüssigkeiten, für die Reibung vernachlässigbar ist, verhalten sich wie **ideale** Flüssigkeiten, sind Reibungskräfte groß gegen die anderen Kräfte, so haben wir es mit einer **zähen (viskosen)** Flüssigkeit zu tun. Eine Strömung heisst **stationär**, wenn sich die Geschwindigkeit an einem Ort nicht ändert. Strömungen bei denen sich die einzelnen Stromfäden nicht vermischen heißen **laminare** Strömungen. Für eine **turbulente** Strömung ist aufsteigender Zigarettenrauch ein Beispiel.

# Die Kontinuitätsgleichung



In jeder Stromlinie bleibt die geführte Masse konstant, denn

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot u_2.$$

Die Größe  $\vec{j} \doteq \rho \cdot \vec{u}$  heißt **Massenstromdichte** bzw. **Massenflussdichte**, es gilt  $I = \vec{j} \cdot \vec{S} = \text{const.}$  Wir betrachten nun eine geschlossene

Oberfläche  $S$  mit Oberflächenelement  $d\vec{S}$  und zählen die Stromlinien, die in die Fläche  $S$  eindringen und wieder aus ihr heraustreten. Die zeitliche Änderung der in  $S$  eingeschlossenen Masse  $M$ ,  $-\partial M/\partial t$ , ist gleich der Masse, die pro

Zeiteinheit durch  $S$  strömt, wobei hinein positiv und hinaus negativ zählt.

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho = -\int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = \int_S d\vec{S} \cdot \rho \cdot \vec{u}$$

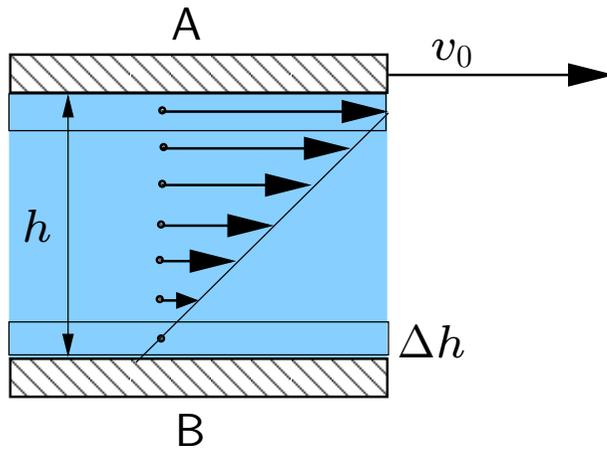
Für mathematisch Interessierte: Nach dem Satz von Gauß lässt sich das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umwandeln:

$$-\int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = \int_S d\vec{S} \cdot \rho \cdot \vec{u} = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}).$$

Die beiden Ausdrücke ganz links und ganz rechts müssen übereinstimmen, ja sogar die Integranden, also:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \text{ Dies ist die sog. } \mathbf{Kontinuitätsgleichung}.$$

## Innere Reibung



Wir können mit einem Löffel den Tee umrühren, weil reale Flüssigkeiten Reibung aufweisen. Die Platte A links bewege sich mit  $v_0$  nach rechts. Die unmittelbar daran anschließende Flüssigkeitsschicht bewegt sich wegen der Reibung auch mit  $v_0$  nach rechts. Platte B soll still stehen, die unmittelbar darüberliegende Flüssigkeitsschicht bleibt auch stehen. Die oberste Schicht übt auf die darunterliegende eine Tangentialkraft aus, die letztere in Bewegung versetzt. Diese wiederum übt auf die

darunterliegende Schicht eine Tangentialkraft aus, die letztere . . . Aus der Erfahrung wissen wir, dass

$$F \propto A, \quad F \propto \Delta v, \quad F \propto \frac{1}{\Delta h}, \quad \text{also} \quad F = \eta A \frac{dv}{dh}.$$

## Dynamische Viskosität, kinematische Viskosität

Die Proportionalitätskonstante  $\eta$ , ist eine materialabhängige Größe, die sog. **dynamische Viskosität** oder Zähigkeit.

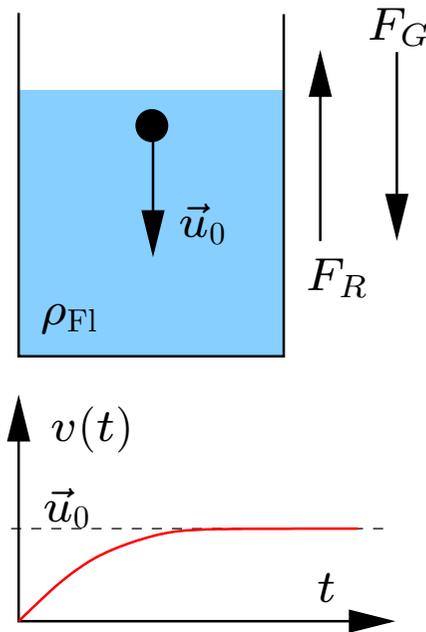
$$[\eta] = \frac{N \cdot s}{m^2} = \text{Pa s.}$$

Oft wird statt der SI-Einheit Pa s die veraltete cgs-Einheit Poise (P) verwendet, 1 P ist gleich einer Dezimalpascalsekunde, 1 dPa s.

Oft wird auch die **kinematische Viskosität**  $\nu = \eta/\rho$  verwendet. Der Kehrwert von  $\eta$ ,  $1/\eta$  heißt **Fluidität**. Die Viskosität von Wasser für verschiedene Temperaturen ist in der Tabelle unten angegeben.

Temperatur [C]	0	10	20	30	50	70	100
Viskosität $\eta$ [Pa s]	1,792	1,307	1,002	0,798	0,548	0,404	0,282

# Das Stokessches Gesetz

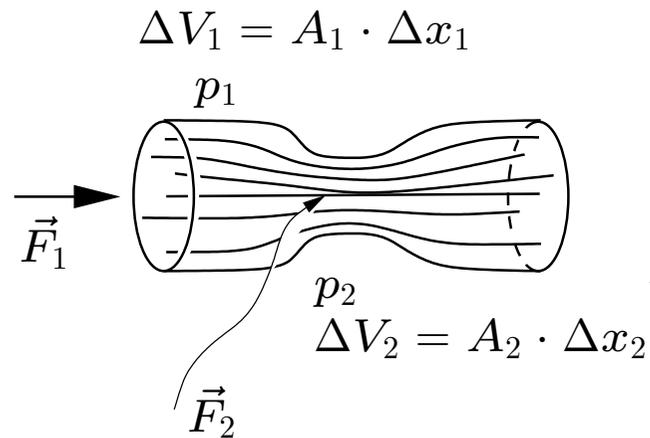


Aus der Erfahrung wissen wir, dass ein Löffel (oder für Physiker eine Kugel) mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit in den Honig sinkt. Die anfänglich langsame Geschwindigkeit ( $v_0 = 0$ ) nähert sich bald einer konstanten Geschwindigkeit  $u_0$ , bei der die Reibungskräfte gerade die um die Auftriebskraft verminderte Gravitation kompensieren. Stokes hat nun durch Versuche mit verschiedenen nicht zu großen Kugeln herausgefunden, dass

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta R_K \cdot \vec{u}_0,$$

wo  $R_K$  der Kugeldurchmesser ist. Die Bedeutung von “nicht zu groß” wird später mit dem Begriff der Reynoldszahl genauer gefasst.

## Die Bernoulli-Gleichung



Eine einfache Gleichung der Hydrodynamik folgt aus der Kontinuitätsgleichung oder der Energieerhaltung. Um das Flüssigkeitsvolumen  $\Delta V_1 = A_1 \cdot \Delta x_1$  um eine Strecke  $\Delta x_1$  zu bewegen muss man, um den Druck  $p_1$  zu überwinden, die Arbeit

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \Delta V_1$$

verrichten. In der Rohrverengung gilt  $\Delta V_2 = A_2 \cdot \Delta x_2$  und die für die Verschiebung notwendige Arbeit ist

$$\Delta W_2 = F_2 \Delta x_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \Delta V_2,$$

womit auch die potentielle Energie der Flüssigkeiten geändert wird. In einer idealen (reibungsfreien) Flüssigkeit bleibt die Summe aus potentieller und kinetischer

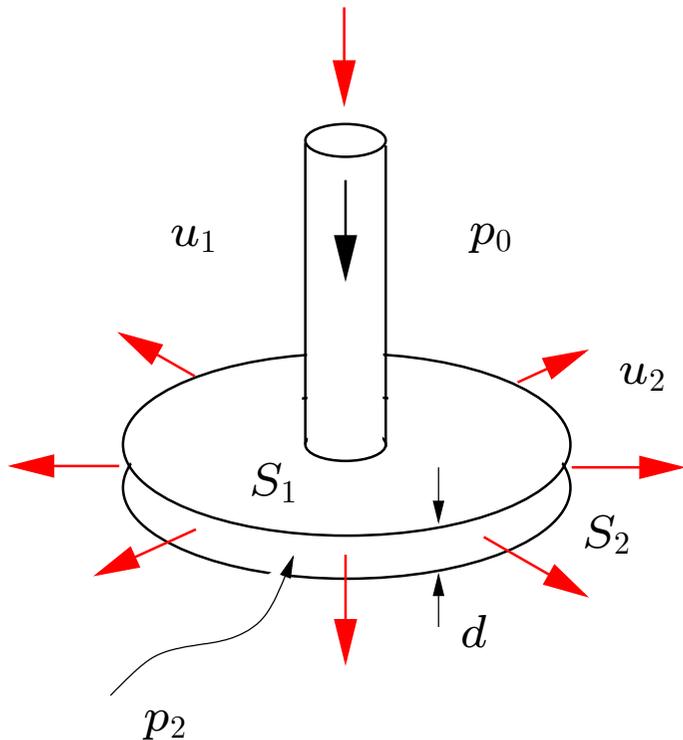
Energie erhalten

$$p_1 \Delta V_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \Delta V_2.$$

Für inkompressible Flüssigkeiten ist  $\rho = \text{const.}$  und deshalb  $\Delta V_1 = \Delta V_2$ , womit wir die **Bernoulli-Gleichung** hergeleitet haben:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 = \text{const.}$$

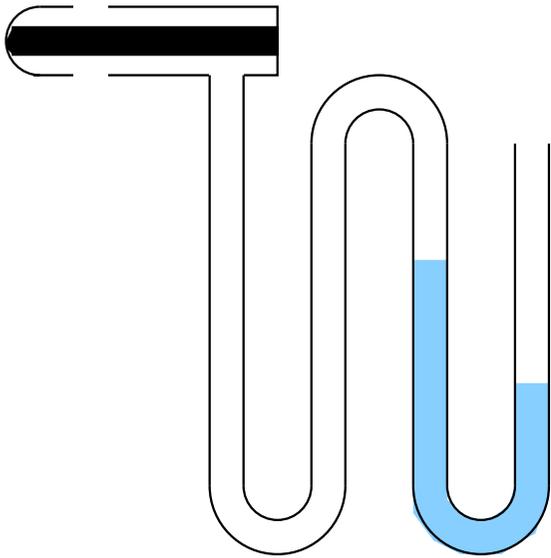
## Hydrodynamisches Paradoxon



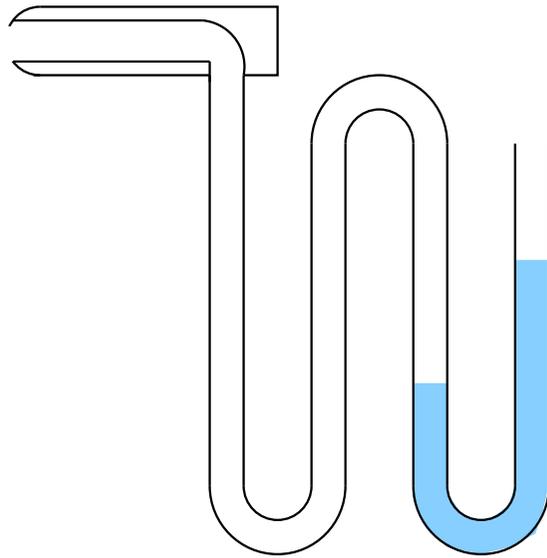
Ein besonders verblüffendes Beispiel für die Bernoulli-Gleichung liefert das links abgebildete **hydrodynamische Paradoxon**. Die durch das Rohr geblasene Luft zieht in dieser Anordnung die unter der Scheibe  $S_1$  liegende Scheibe  $S_2$  an. Die Strömungsgeschwindigkeit  $u_2$  wird dabei so groß, dass der Unterdruck  $p_0 - p_2$  zu einer Kraft  $(1/2)\rho_L u_2^2 \cdot A$  führt, die die Gewichtskraft  $m \cdot g$  aufheben kann.

Andere Beispiele sind Zerstäuber, Drucksensoren oder sogar Tragflächenprofile.

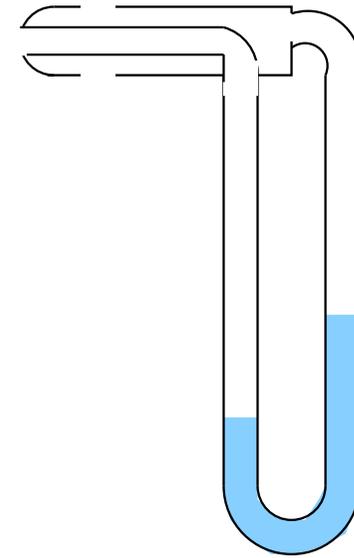
# Drucksensoren



Drucksonde zur Messung des statischen Druckes.

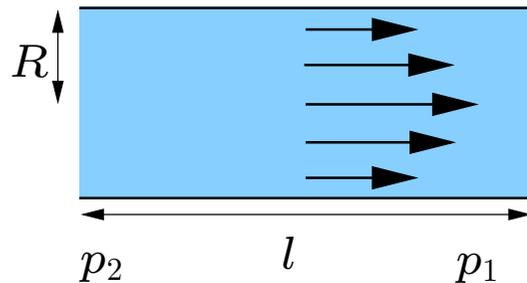


Pitot-Rohr zur Messung des Gesamtdruckes



Prandtl'sches Staurohr zur Messung des Staudruckes

## Das Gesetz von Hagen-Poiseuille



Der deutsche Ingenieur Hagen und der französische Arzt Poiseuille haben 1839 und 1840 die Strömung in dünnen Rohren untersucht. Dabei spielt die Reibung für reale, nicht ideale, Flüssigkeiten eine wichtige Rolle. Die Strömung kommt nur durch eine Druckdifferenz (Kraft pro Fläche) zustande, welche eine ideale Flüssigkeit wegen Newton II beschleunigen würde. Die reale Flüssigkeit entgegnet der angreifenden Druckkraft im stationären Fall mit einer gleich großen aber entgegengerichteten Reibungskraft. Die Versuche von Hagen und Poiseuille haben ergeben, dass die Stromstärke oder der Volumenstrom  $I = dV/dt$  (Volumeneinheit/Zeiteinheit)

$$I = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l} \quad \text{und} \quad u(r) = \frac{p_2 - p_1}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

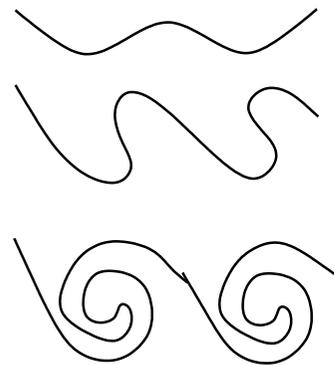
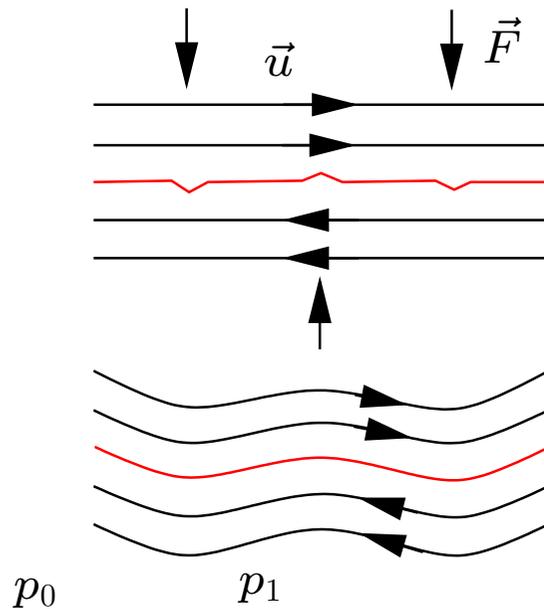
## Die Navier-Stokes-Gleichung

Stokes und Navier haben versucht, Flüssigkeitsströmungen “ab initio” aus den Newtonschen Gleichungen zu verstehen und haben unabhängig von einander die sog. **Navier-Stokes** Gleichung gefunden,

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \Delta \vec{u}.$$

Wir sehen hier ein nicht-lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die Geschwindigkeit  $\vec{u}$  kommt nicht-linear vor. Wie bereits bei der Behandlung von Schwingungen (chaotisches Pendel, logistische Gleichung) führt die Nicht-Linearität oft zu chaotischem Verhalten. Die Navier-Stokes-Gleichung ist auch für Spezialfälle sehr schwierig zu lösen. In der Regel wird sie numerisch gelöst, dazu existieren umfangreiche Simulationspakete.

## Wirbel und die Zirkulation



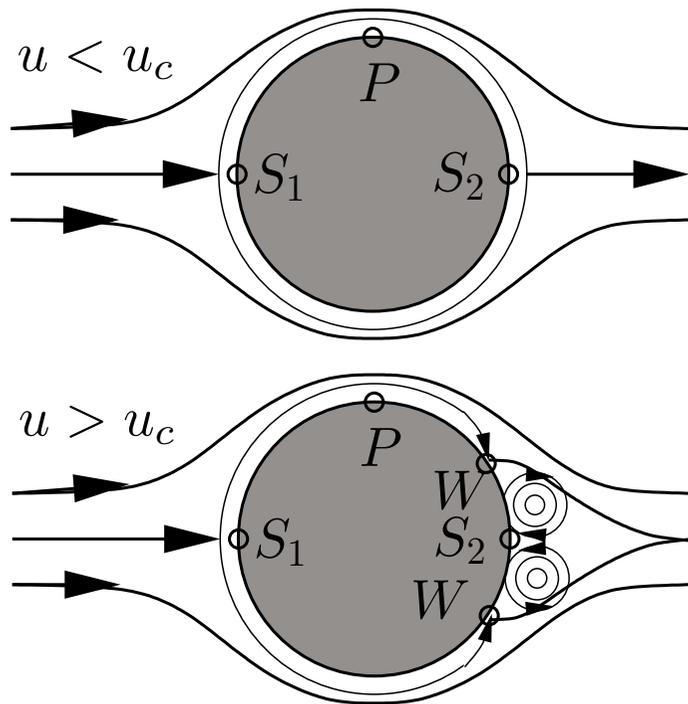
Paradoxerweise scheinen Wirbel nach Navier-Stokes nur in reibungsbehafteten Flüssigkeiten zu entstehen, obwohl solche Flüssigkeiten laminar fließen sollten. Tatsächlich entstehen Wirbel in reibungsarmen Flüssigkeiten an Stellen, wo die Reibung besonders stark wird, an Grenzflächen, in Ecken oder an Hindernissen, kurz, an Stellen, wo große Geschwindigkeitsgradienten auftreten.

Links ist eine solche Situation abgebildet<sup>2</sup>. Kelvin und Helmholtz haben bemerkt, dass bereits eine kleine Störung reicht, um eine laminare Strömung turbulent werden zu lassen. Die Geschwindigkeitserhöhung an den zusammen-

<sup>2</sup>Dies ist die sog. **Kelvin-Helmholtz-Instabilität**.

gedrückten Stellen führt dort nach Bernoulli zu einer Druckerniedrigung, was die Stromlinien noch näher zusammenzieht. Dadurch werden sie noch schneller, was den Druck weiter erniedrigt, etc. Die einmal ausgebeulte rote Stromfläche wird immer mehr ausgebeult, eine instabile Situation. Die weitere Entwicklung ist in der rechten Hälfte der Abbildung gezeigt, die Ausbeulungen werden immer stärker, bis sich diese in Wirbel ausbilden und die Fläche vollständig verwirbelt wird. Wirbel treten als Folge solcher Instabilitäten an vielen Orten auf. Ein Beispiel sind Kondensstreifen von Linienflugzeugen, die als Folge dieser Instabilität "zerfransen". Andere Beispiele sieht man z. B. nach lokalen Gewittern an Einmündungen von Flüssen mit "dreckigem" Wasser in "saubere" Flüsse, wo die erforderlichen Geschwindigkeitsunterschiede gut sichtbar (und spürbar) sind.

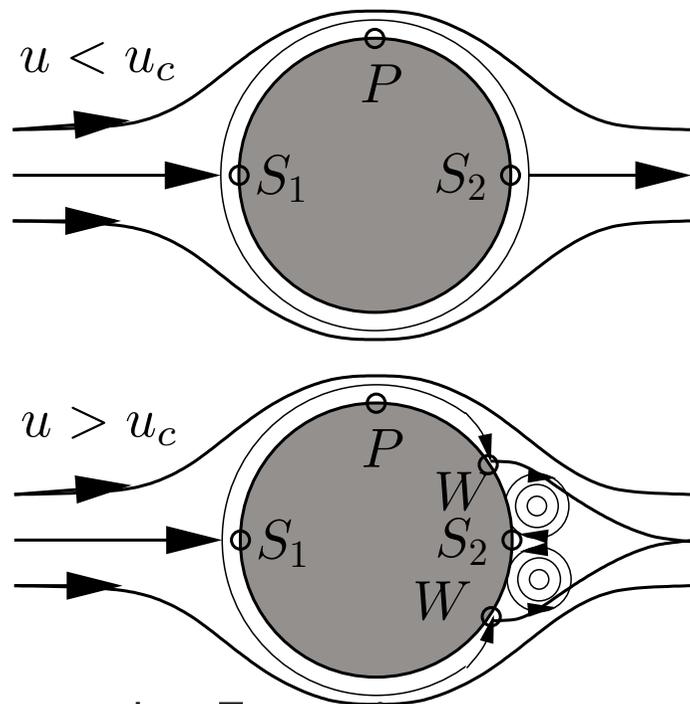
## Turbulenz



Strömt eine Flüssigkeit genügend langsam<sup>3</sup> um einen Zylinder, so kommt die Strömung in den Staupunkten  $S_1$  und  $S_2$  zum Stehen. Die Flüssigkeit strömt um den Körper und erreicht im Punkt die höchste Geschwindigkeit und damit nach Bernoulli den niedrigsten Druck  $p_P$ . In den Punkten  $S_1$  und  $S_2$  herrscht  $p_0$ . Übersteigt die Geschwindigkeit  $u$  einen kritischen Wert  $u_c$ , so kommt die Strömung aufgrund der Reibung bereits an den Stellen  $W$  zum Stehen. Auf die Flüssigkeit wirkt wegen der Strömung ein Drehmoment, es bilden sich Wirbel.

<sup>3</sup>Siehe Reynoldszahl.

## Widerstand



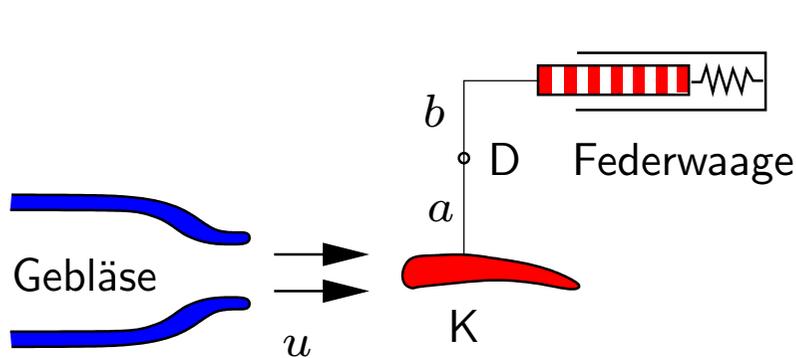
Die aufgrund der Wirbel nicht verschwindende Geschwindigkeit im hinteren Staupunkt bewirkt nach Bernoulli im Vergleich zur wirbelfreien Strömung einen kleineren Druck in  $S_2$ , als in  $S_1$ . Der Druckunterschied führt zu einer Kraft, die an dem Zylinder angreift und mit der Strömung mitzieht. Nach Bernoulli ist die Druckdifferenz  $\Delta p = p_0 - p_1$  proportional zu  $(\rho/2)u^2$  und die Kraft damit  $F_D = c_D(\rho/2)u^2 A$ . Die dimensionslose Proportionalitätskonstante  $c_D$  ist der **Druckwiderstandsbeiwert** und hängt

von der Form des umströmten Körpers ab. Die Druckwiderstandskraft addiert sich zu der nach Hagen-Poiseuille durch Reibungsverluste erwarteten Druckkraft

$F_R = (p_2 - p_0) + (\rho/2)u_2^2 A$  und wir erhalten für die gesamete Widerstandskraft

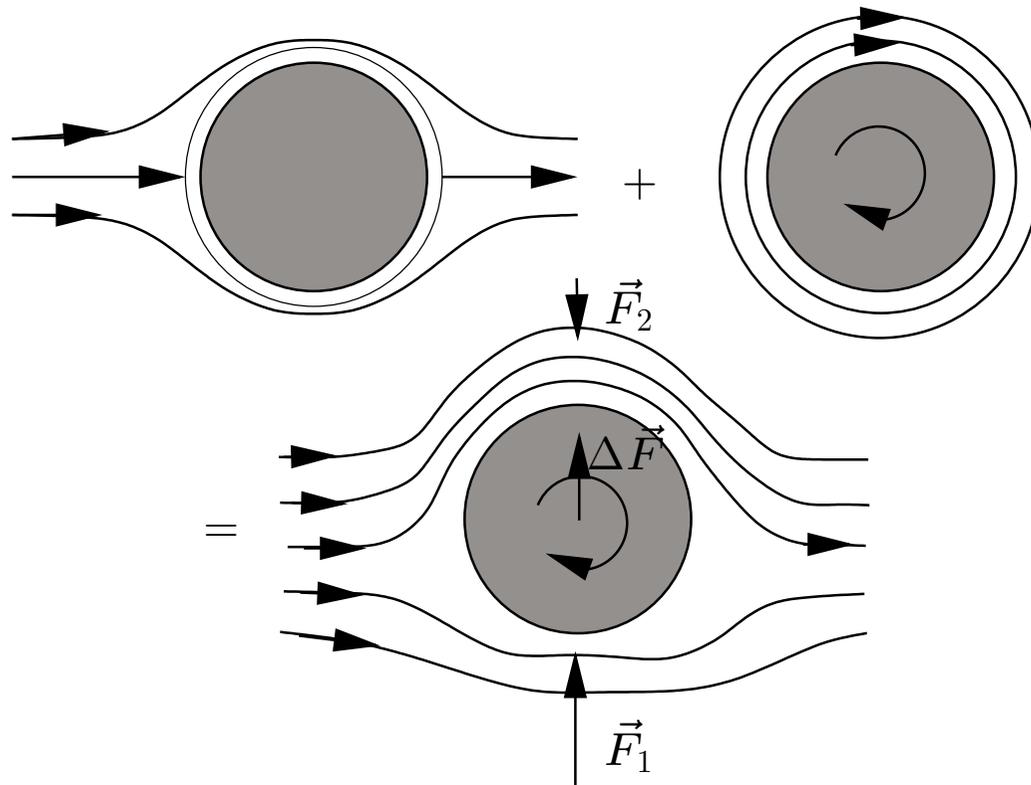
$$F_W = F_R + F_D = c_W \frac{1}{2} \rho u^2 A,$$

wo der Proportionalitätsfaktor  $c_W > c_D$  **Widerstandsbeiwert** heißt.

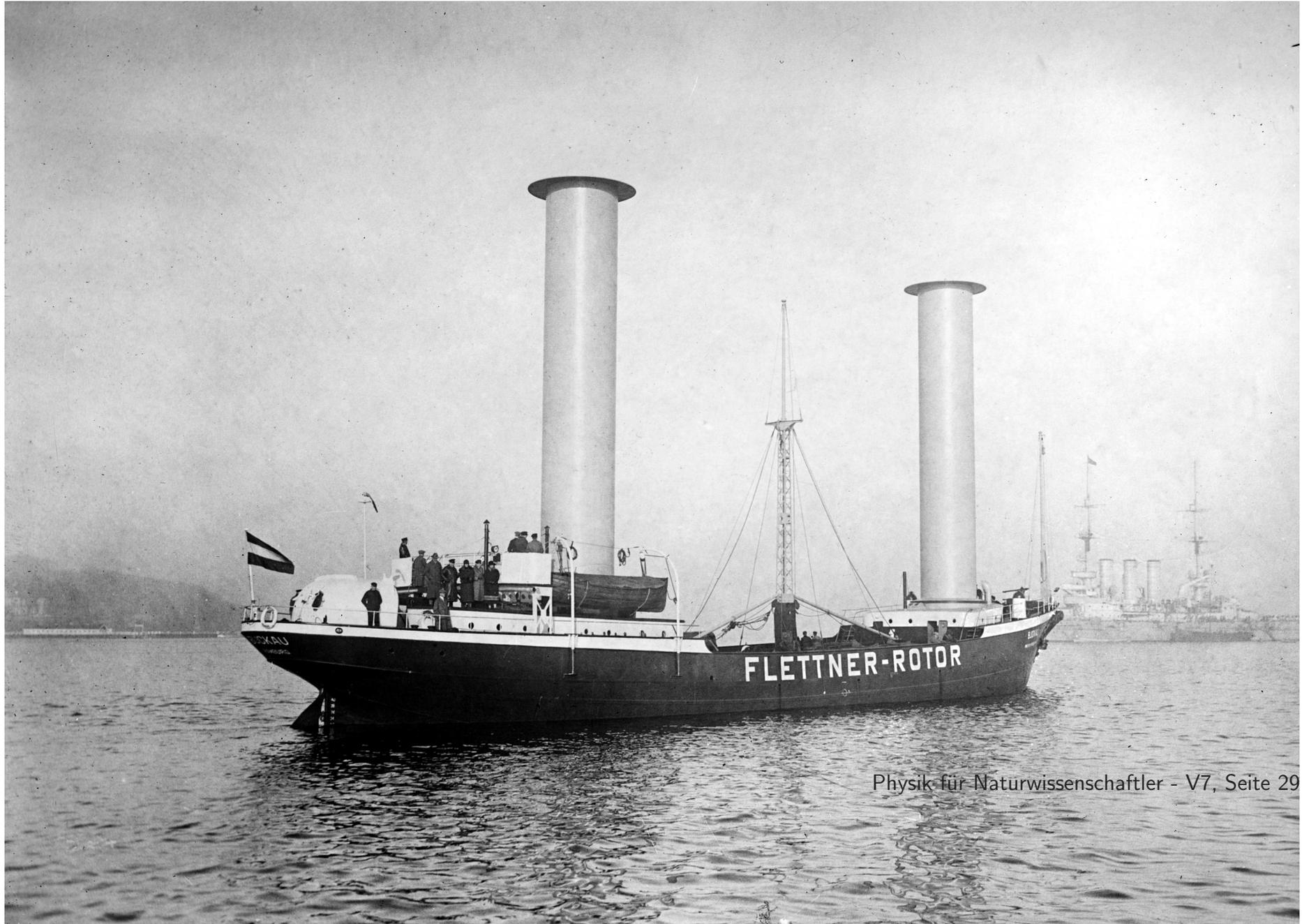


Dieser Widerstandsbeiwert kann z. B. mit der Anordnung links gemessen werden. Die Kraft auf die Federwaage ist wegen des Hebels um  $D$  proportional zu  $F_W$ . Typische  $c_W$ -Werte sind 0,06 für ein Tragflächenprofil, 1,2 für eine frontal angeströmte Scheibe und  $\sim 0,2$  für moderne Autos. Noch vor 20 Jahren waren bei Autos  $c_W$ -Werte von 0,4 typisch.

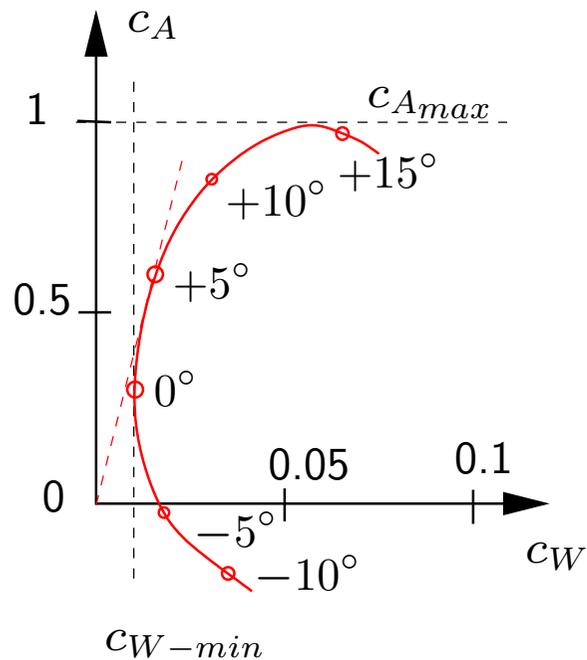
# Aerodynamischer Auftrieb I



Der dynamische Auftrieb wird am einfachsten mit dem Magnus-Effekt eingeführt. Ein drehender Zylinder erzeugt aufgrund der Reibung um sich herum einen Wirbel, der sich der von links kommenden Strömung überlagert. Nach Bernoulli entsteht ein Überdruck unten und ein Unterdruck oben am Zylinder, wodurch dieser einen Auftrieb erfährt. Dieser Effekt soll neuerdings wieder für die Schifffahrt ausgenutzt werden (Flettner-Rotor).



## Aerodynamischer Auftrieb II



Der dynamische Auftrieb kann auch wieder als Druckdifferenz zwischen oben und unten aufgefasst werden. Nach Bernoulli,

$$F_A = \Delta p \cdot A = c_A \cdot \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) A.$$

Bei einem Tragflächenprofil kommt neben der Zirkulation um den Flügel, die wegen Drehimpulserhaltung und dem Anfahrwirbel entsteht, der Impulsübertrag durch den Anstellwinkel beim dynamischen Auftrieb dazu. Ein optimal eingestellter Anstellwinkel liefert bei minimalem  $c_W$ -Wert einen möglichst hohen  $c_A$ -Wert. Im folgenden Bild sind die Anfahrwirbel gezeigt - sie fliegen mit jedem Flugzeug mit und sind wegen der Drehimpulserhaltung gegenläufig.



## Die Reynolds-Zahl

Für Untersuchungen des Verhaltens von Körpern in Strömungen ist es oft nicht praktikabel den Körper selber zu untersuchen. Wer hat schon einen Windkanal für den Airbus A-380 oder einen Wasserkanal für einen Lindenau-Frachter! Reynolds hat dieses Problem 1883 untersucht und erkannt, dass man die Reibungskräfte an einer Kugel oder in einem Rohr umschreiben kann als

$$W = f \cdot \frac{\rho}{2} v^2 A, \quad \text{wo } f_{\text{St}} = \frac{8}{\left(\frac{r\rho v}{\eta}\right)} \text{ für Stokes und } f_{\text{H-P}} = \frac{12}{\left(\frac{r\rho v}{\eta}\right)} \text{ für Hagen-Poiseuille.}$$

In beiden und vielen anderen Problemen kommt die Kombination

$$\text{Re} \doteq \frac{r\rho v}{\eta}$$

vor. Diese dimensionslose Zahl heißt **Reynoldszahl** und erlaubt es, Untersuchungen an Modellen vorzunehmen.

## Die Reynoldszahl II

Mit der Reynoldszahl kann man Reibungswiderstände allgemein in der Form

$$F_R = \Psi(\text{Re}) \frac{\rho}{2} v^2 A$$

schreiben. Weil bei allen Strömungen der Teil hinter  $\Psi(\text{Re})$  gleich bleibt, wird die Besonderheit jeder Strömung durch die  $\Psi(\text{Re})$  ausgedrückt. D. h. aber, dass ich Strömungen mit derselbe Reynoldszahl direkt vergleichen darf! Wir können also ein Modell eines Flugzeuges in einem Windkanal testen, solange die Reynoldszahl gleich bleibt. Dies kann durch Wahl der Dimension des Flugzeugs ( $r$  in  $\text{Re}$ ) und der Geschwindigkeit ( $v$ ) erreicht werden.

Durch Erweiterung von  $\text{Re}$  mit  $r^2 v$  sehen wir unmittelbar, dass

$$\text{Re} = \frac{r^3 \rho v^2}{\eta r^2 v} = \frac{2E_{\text{kin}}}{W_{\text{Reibung}}}.$$

Der Zähler gibt  $2 \cdot E_{\text{kin}}$  eines Volumens  $r^3$  an, welches sich mit  $v$  bewegt, der Nenner gibt die Reibungsenergie an, die verbraucht wird wenn der Körper mit Querschnitt  $r^2$  und  $v$  bewegt wird. Ist das Verhältnis klein (große Reibung) ist die Strömung laminar, ist es größer als  $Re_c$  ist sie turbulent.

Die kritische Reynoldszahl,  $Re_c$  findet man experimentell z. B. für ein zylindrisches Rohr mit Radius  $r$

$$Re_c = \frac{r\rho v}{\eta} = 2300.$$

Will man beim Hausbau sicherstellen, dass in allen Rohren eine laminare Strömung herrscht, so muss sichergestellt sein, dass auch an den engsten Stellen die Geschwindigkeit  $v$  klein genug ist, dass  $Re < Re_c$ .