Uebungen zur Experimentalphysik VI

Serie 4, Termin: 7. Juli 2016

4.1 Magnetische Diffusion

Ein Magnetfeld sei anfänglich auf beiden Seiten einer ebenen infinitesimal dünnen Stromschicht gegeben als $B = B_0$ für $x > 0$ und $B = -B_0$ für $x < 0$. Im Falle $R_m \ll 1$ gilt

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}.$$

a.) Was ist R_m? Was für eine Gleichung ist dies?

b.) Wie lautet die zeitabhängige Lösung $B(x, t)$? Wie nimmt die Dicke der Stromschicht mit der Zeit zu?

c.) Zeigen Sie, dass die Energie im Magnetfeld durch Ohmsche Heizung dissipiert wird:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{2\mu_0} \mathrm{d}x = -\mu_0 \int \frac{j^2}{\sigma} \mathrm{d}x,$$

wo $\sigma = 1/\eta$ die Leitfähigkeit ist.

4.2 Ein Potentialfeld ist stromfrei

Zeigen Sie, dass ein Potentialfeld $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi$ stromfrei ist.

4.3 Stagnationsströmung und Rekonnektion

Abb. 1 zeigt eine Stagnationsströmung, wie sie bei der magnetischen Rekonnektion auftauchen kann. Die Feldlinien $\vec{B} = B(x)\hat{\vec{y}}$ sind durchgezogenen gezeichnet, das Geschwindigkeitsfeld gestrichelt skizziert. Es sei gegeben durch

$$v_x = -\frac{x}{a} v_\infty, \quad v_y = \frac{y}{a} v_\infty, \quad \text{wo } v_\infty/a = \text{const.}$$

a.) Zeigen sie, dass $\vec{v} = 0$ im Ursprung und dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Was bedeutet letzteres?

b.) Das Ohmsche Gesetz lautet

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{\nabla} \times \vec{B}.$$

Wie lautet es für die hier skizzierte Situation?

c.) Erläutern Sie, warum die Bewegungsgleichung der MHD für den hier skizzierten stationären Fall folgendermaßen lautet:

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

d.) Zeigen Sie, dass für den Stagnationsfluss (v_x, v_y) $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ gilt und – mit Hilfe der Bewegungsgleichung aus c.) – dass das stationäre Gleichgewicht durch ein Druckgleichgewicht beschrieben wird. Wie lautet es?

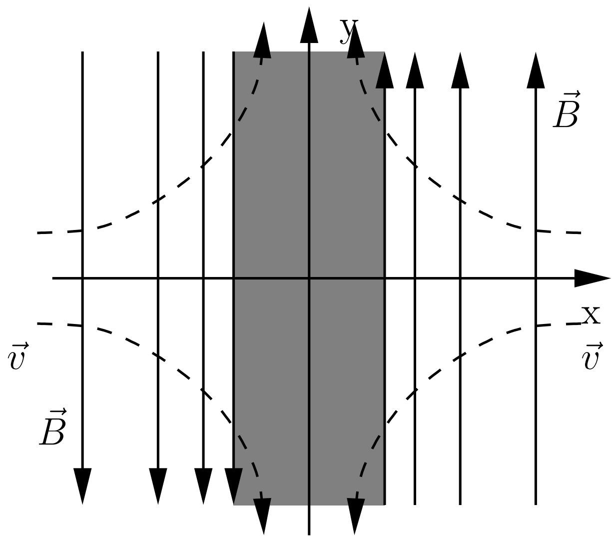

Abbildung 1: Geometrie für Aufgabe 4.3.

Nebenbemerkung: Die Lösung der Differentialgleichung (4.3b.), die Sie gefunden haben, ist die sog. Dawsonsche Integralfunktion, $D(x)$,

$$B(x) = D(x) = \frac{2E_\infty a}{v_\infty l} \exp\left(-\frac{x^2}{l^2}\right) \int_0^{x/l} \exp\left(X^2\right) \mathrm{d}X, \quad \text{wo} \quad l^2 = \frac{v_\infty}{2\eta a}.$$

Stellen Sie die Funktion graphisch dar. Dies ist übrigens eine der wenigen exakten analytischen Lösungen in der MHD.