Uebungen zur Experimentalphysik VI

Serie 5, Termin: 14. Juli 2017

5.1 Nichtlineare kräftefreie Felder

Zeigen Sie, dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \alpha \vec{B} \quad \text{a)} \quad \implies (\nabla^2 + \alpha^2) \vec{B} = \vec{B} \times \vec{\nabla} \alpha \quad \text{b)},$$

aber nicht umgekehrt.

- a.) Beginnen Sie damit, die Rotation der ersten Gleichung zu bestimmen. Daraus können Sie zeigen, dass a) $\implies$ b).
- b.) Glg. b) ist von höherer Ordnung in α und in den Ableitungen als Glg. a). Wir erwarten deshalb nicht, dass alle Lösungen von Glg. b) auch Glg. a) erfüllen. Sie können dies zeigen, indem Sie Glg. b) in die Form

$$\nabla^2 \vec{B} + (\vec{\nabla} \alpha) \times \vec{B} = -\alpha^2 \vec{B}$$

bringen und $\alpha \vec{\nabla} \times \vec{B}$ addieren. Nach etwas Rechnen erhalten Sie eine Glg. der Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \alpha \vec{B} = \vec{C},$$

womit Sie die Aufgabe lösen können.

5.2 Magnetostatisches Feld

Wir betrachten ein magnetostatisches Feld für welches gilt:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \vec{\nabla} p \quad \text{und} \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}).$$

- a.) Zeigen Sie, dass für dieses Feld gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} p) = 0,$$

und interpretieren Sie den physikalischen Gehalt der einzelnen Schritte.

- b.) Zeigen Sie, dass für dieses Feld auch gilt

$$(\vec{j} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{j}.$$

5.3 Allgemeine Lösung für ein magnetostatisches Feld

Zeigen Sie, dass für ein magnetostatisches Feld ($\vec{j} \times \vec{B} = \vec{\nabla} p$) die Stromdichte durch den folgenden Ausdruck gegeben ist.

$$\vec{j} = \left(\frac{\alpha}{\mu_0} \right) \vec{B} + \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} p}{B^2},$$

wo α durch das folgende Integral entlang der Feldlinie gegeben ist

$$\alpha = \alpha_0 - 2\mu_0 \int_{x_0}^x \vec{B} \cdot \left[(\vec{\nabla} B) \times \frac{(\vec{\nabla} p)}{B^4} \right] ds.$$

Dabei sei die Feldlinie durch s parametrisiert und $\alpha_0 = \alpha(x_0)$.

Hinweis: Für eine mit s parametrisierten Feldlinie gilt

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \alpha = B \frac{d\alpha}{ds}.$$

Hinweis:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{B^2} = \vec{\nabla} B^{-2} = -2 \frac{\vec{\nabla} B}{B^3}$$

5.4 Parkerspirale

Der supersonische Sonnenwind ist sehr gut leitfähig ($\sigma \sim \infty$) und reisst das solare Magnetfeld mit nach außen. Die Sonne rotiert alle 24.5 Tage einmal um sich selber. In der Ebene, die senkrecht auf der Rotationsachse der Sonne steht, bildet sich dadurch eine archimedische Spirale, die Parkerspirale genannt wird.

Bestimmen Sie für eine Sonnenwindgeschwindigkeit von 440 km/s den Winkel zwischen der Radialen und dem Magnetfeld als Funktion des Abstandes von der Sonne und stellen Sie diesen graphisch dar. Wie groß ist der Winkel bei 1 AU (1.5×10^{11} m)?

5.5 Chapmans Lösung für den Sonnenwind

Bestimmen Sie $\rho(r)$ und $p(r)$ für eine isotherme Korona und eine durch Wärmeleitung geheizte, $4\pi r^2 \kappa dT/dr = \text{const.}$ auch für $r \rightarrow \infty$. (Übung 1 im Skript P6-V9)

5.6 Parkers Lösung für den Sonnenwind

Vollziehen Sie die im Skript beschriebenen Schritte für die Parkerlösung des Sonnenwindes im Detail nach. Welches sind die wesentlichen Punkte auf die es ankommt? Wie gehen hier die Gleichungen der MHD ein?