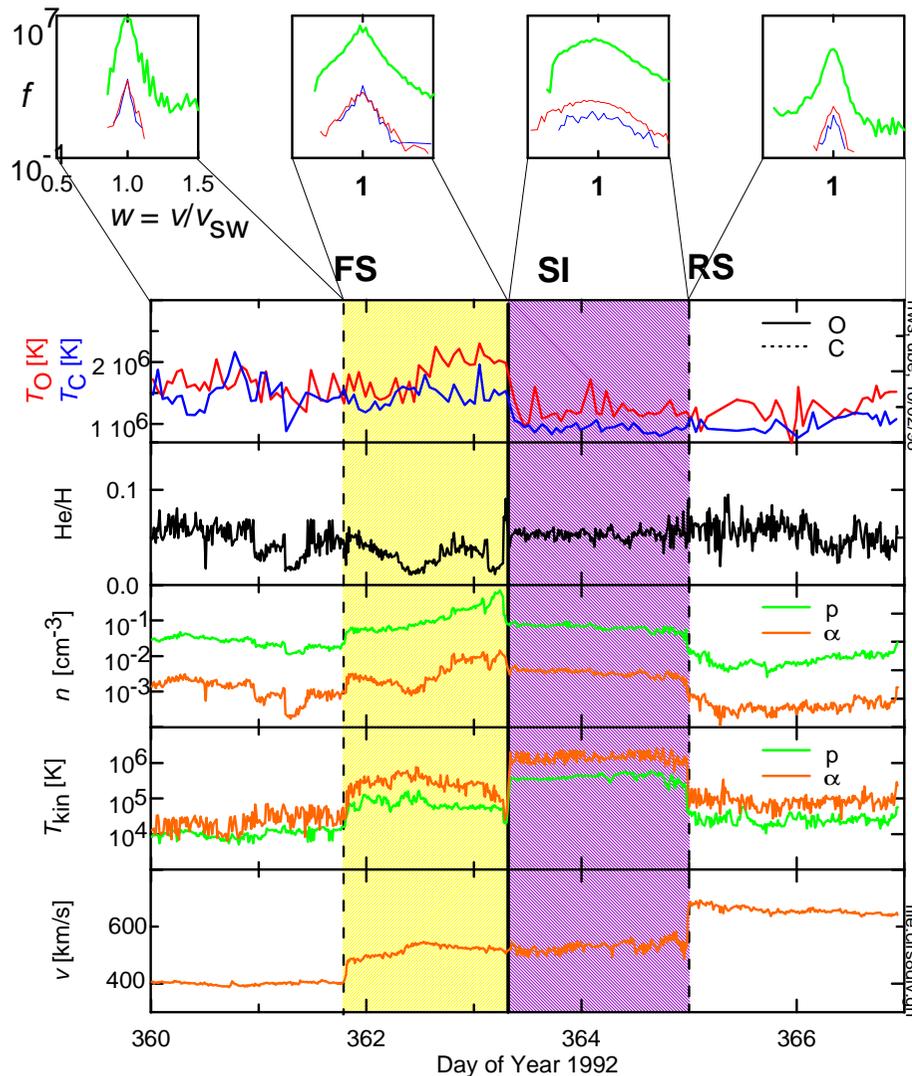


Diskontinuitäten in Plasmen



Trifft eine Plasmaströmung auf ein Hindernis (z. B. ein anderes Plasma), so bildet sich eine Grenzschicht oder Diskontinuität. Links sind drei solche im Sonnenwind dargestellt. Auf beiden Seiten der Diskontinuität behält das Plasma seine Eigenschaften (z. B. dissipationslos, ideal), innerhalb der Diskontinuität muss das nicht der Fall sein. Dies bedeutet, dass in Plasmen nicht alle erdenklichen Diskontinuitäten realisiert werden können, sondern nur verschiedene Klassen von Diskontinuitäten, die wir im Folgenden behandeln.

Wir verwenden links und rechts einer Diskontinuität die Einflüssigkeitsgleichungen der MHD in konservativer Form¹.

$$\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = 0, \quad \text{wo } \partial_t \doteq \partial/\partial t, \quad (1)$$

$$\partial_t(mn\vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (mn\vec{v}\vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\Pi + \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{I} \right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B}\vec{B}), \quad (2)$$

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (3)$$

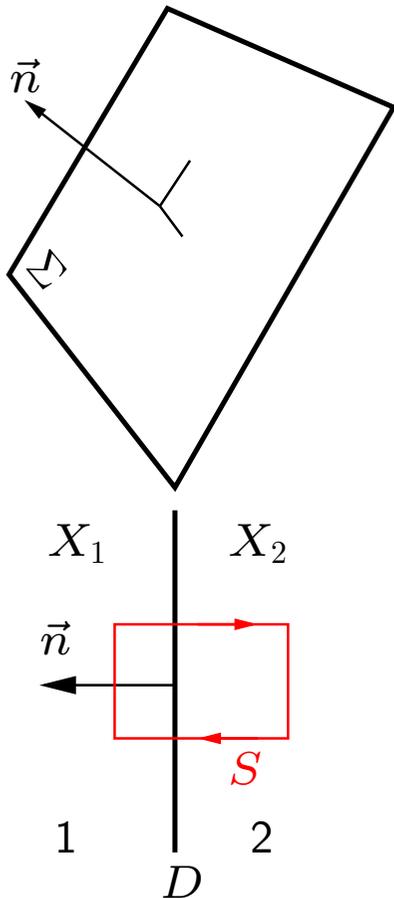
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (4)$$

wo wir $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$ und $\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ verwendet haben. Die Energiegleichung lautet

$$\vec{\nabla} \cdot \left\{ mn\vec{v} \left[\frac{v^2}{2} + e + \frac{1}{mn} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] - \frac{1}{\mu_0} (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right\} = 0, \quad (5)$$

¹Eine Form, die Erhaltungsgrößen sichtbar macht. Sie stammt aus der numerischen (Magneto-)Hydrodynamik.

wo e die innere freie Energie des Plasmas über $e = c_v p / (n k_B)$ mit dem Druck p verbunden ist.



Eine Diskontinuität kann als eine zweidimensionale Funktion $\Sigma(\vec{x}) = \text{const.}$ aufgefasst werden, deren Normalenvektor \vec{n} ist,

$$\vec{n} = -\frac{\vec{\nabla}\Sigma}{|\vec{\nabla}\Sigma|}.$$

Eine Plasmagröße X ändert sich an ihr sprunghaft um einen Wert $[X]$, welcher durch das Linienintegral entlang der roten Kurve S gegeben ist. Es tragen nur die zum Normalenvektor parallele und antiparallele Linie dazu bei, also

$$\oint_S \frac{dX}{dn} dn = 2 \int_1^2 \frac{dX}{dn} dn = 2(X_2 - X_1) = 2[X].$$

Wie ändert sich eine Größe durch eine Diskontinuität hindurch? Um dies zu beantworten, betrachten wir vorerst den einfachen Fall der Kontinuitätsgleichung², welche die Erhaltung der Masse oder des Massenflusses ausdrückt. Der Fluss senkrecht zur Diskontinuität (parallel zu deren Normalenvektor) muss also erhalten bleiben,

$$\oint_S \frac{d\partial_t n}{dn} dn + \oint_S \frac{d\vec{\nabla} \cdot (n\vec{v})}{dn} dn = 0.$$

Der zweite Term ist nichts anderes als das Doppelte (zwei Wege) der Projektion des Sprungs in der Größe (hier des Massenflusses) auf den Normalenvektor, also

$$\oint_S \frac{d\vec{\nabla} \cdot (n\vec{v})}{dn} dn = 2\vec{n} \cdot [n\vec{v}], \quad \text{allgemein} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{X} \longrightarrow \vec{n} \cdot [\vec{X}].$$

Ähnlich kann man zeigen, dass $\vec{\nabla} X \longrightarrow \vec{n}[X]$ und $\vec{\nabla} \times \vec{X} \longrightarrow \vec{n} \times [\vec{X}]$.

²wieder in konservativer Form

Wir versetzen uns in das Bezugssystem der Diskontinuität, welche sich relativ zum Plasma mit einer Geschwindigkeit \vec{V} bewegen möge. In diesem System transformieren sich die Geschwindigkeiten wie $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ und die Diskontinuitäten sind stationär. Deshalb verschwinden dann auch die zeitlichen Ableitungen. Die Gleichungen der MHD lauten dann (der Einfachheit halber mit \vec{v} statt \vec{v}')

$$\vec{n} \cdot [n\vec{v}] = 0, \quad (6)$$

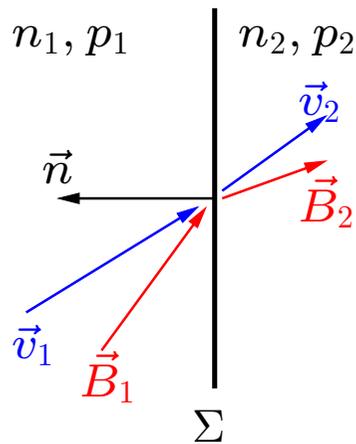
$$\vec{n} \cdot [mn\vec{v}\vec{v}] + \vec{n} \left[p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] - \frac{1}{\mu_0} \vec{n} \cdot [\vec{B}\vec{B}] = 0, \quad (7)$$

$$[\vec{n} \times \vec{v} \times \vec{B}] = 0, \quad (8)$$

$$\vec{n} \cdot [\vec{B}] = 0, \quad (9)$$

$$\left[mn\vec{n} \cdot \vec{v} \left\{ \frac{v^2}{2} + e + \frac{1}{mn} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right\} - \frac{1}{\mu_0} (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{n} \cdot \vec{B} \right] = 0. \quad (10)$$

Die Rankine³-Hugoniot⁴-Beziehungen



Bei den soeben besprochenen Gleichungen steht rechts immer eine Null weil die entsprechenden partiellen Differentialgleichungen in der konservativen Form behandelt wurden⁵. Nun müssen aber die verschiedenen Größen der Flüssigkeitsströmung daraus isoliert werden um wirklich Physik betreiben zu können. Schließlich wollen wir ja wissen, wie sich das Magnetfeld, die Fließgeschwindigkeit und die anderen Größen vor und hinter der Diskontinuität verhalten müssen.

Beginnen wir mit Glg. 9. Sie sagt uns, dass

$$\vec{n} \cdot [\vec{B}] = 0 \longrightarrow [B_n] = 0. \quad (11)$$

³Mit Kelvin und Clausius einer der Mitbegründer der Thermodynamik. Auch bekannt für Studien von Materialermüdungserscheinungen (Das Zugunglück von Versailles forderte zw. 50 und 200 Todesopfer).

⁴Französischer Physiker, Professor und Artilleriehauptmann.

⁵Das ist einer der Gründe für diese Schreibweise.

\vec{n} ist auf beiden Seiten der Diskontinuität gleich, deshalb braucht es nicht in der Differenzklammer zu stehen. Das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{B}$ gibt gerade die Projektion von \vec{B} auf \vec{n} , also B_n , was ein Skalar ist. Glg. 9 sagt uns also, dass die Projektion des magnetischen Feldes auf den Normalenvektor (B_n) vor und hinter der Diskontinuität gleich ist. In anderen Worten, die Komponente des Magnetfeldes senkrecht zur Diskontinuität ist auf beiden Seiten gleich.

Das Übrigbleibsel der Kontinuitätsgleichung (Glg.6) sagt uns, dass

$$[nv_n] = 0, \quad (12)$$

d.h., dass die Normalenkomponente des Massenflusses über die Diskontinuität erhalten bleibt. Wäre dies nicht der Fall, müsste sich an der Diskontinuität ja Material ansammeln oder verloren gehen.

Es ist nun sinnvoll die verbleibenden Gleichungen in einen Anteil entlang der

Normalen⁶ und einen Anteil tangential⁷ an die Diskontinuität zu unterteilen. Man findet dann - hier ohne Herleitung - die folgenden Bedingungen an die Sprünge in den verschiedenen Größen an der Diskontinuität:

$$nmv_n[v_n] = - \left[p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right], \quad (13)$$

$$nmv_n[\vec{v}_t] = \frac{B_n}{\mu_0} [\vec{B}_t] \quad (14)$$

$$B_n[\vec{v}_t] = [v_n \vec{B}_t], \quad (15)$$

wozu man die vorherigen Beziehungen ausnutzt.

Übung 1. *Tun Sie dies!*

⁶wie bisher mit einem Index n gekennzeichnet. Das ist immer nur ein Skalar, also eine reelle Zahl.

⁷mit einem Index t gekennzeichnet, wie denn anders? Das muss immer ein Vektor sein.

Klassifizierung von Diskontinuitäten

Das Gleichungssystem 6 bis 10 bestimmt also das Verhalten der verschiedenen Größen des Plasmas an der Diskontinuität. Man kann daraus aber auch herleiten, was für verschiedene Sorten von Diskontinuitäten es überhaupt geben kann. Dazu definieren wir das spezifische Volumen $\bar{\rho} \doteq 1/(nm)$ und kürzen den Massenfluss senkrecht zur Diskontinuität (der ja erhalten ist) mit $F \doteq nmv_n$ ab. Ferner definieren wir den Mittelwert über die Diskontinuität,

$$\langle X \rangle \doteq \frac{1}{2} (X_1 + X_2). \quad (16)$$

Das Gleichungssystem 6 bis 10 ist ein nichtlineares Gleichungssystem für die Plasmagrößen, n , \vec{v} , \vec{B} , p und e , wobei e über die Zustandsgleichung $e = c_v p / nk_B$ mit dem Druck p verbunden ist. Mit den hier eingeführten Größen und Konventionen kann das Gleichungssystem 6 bis 10 in ein lineares verwandelt

werden. Das System hat dann eine Lösung, wenn die Determinante verschwindet. Nach längerem Rechnen findet man dafür die folgende Gleichung⁸ siebten Grades für den senkrechten Massenfluss $F = nmv_n$

$$\underbrace{F}_I \underbrace{\left(F^2 - \frac{B_n^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} \right)}_{II} \underbrace{\left\{ F^4 + F^2 \left(\frac{[p]}{[\bar{\rho}]} - \frac{\langle \vec{B} \rangle^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} \right) - \frac{B_n^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} \frac{[p]}{[\bar{\rho}]} \right\}}_{III} = 0. \quad (17)$$

Die Faktorisierung zeigt uns sofort, dass es drei verschiedene Sorten von Diskontinuitäten geben muss. Schließlich kann jeder Term für sich verschwinden.

I = 0: Kontakt- oder tangentielle Diskontinuität

II = 0: Rotationsdiskontinuität

III = 0: Schock, Stoßfront oder Stoßwelle

⁸siehe Baumjohann und Treumann, Kapitel 8.

Kontaktdiskontinuitäten: $F = 0$

$$[p] = 0$$

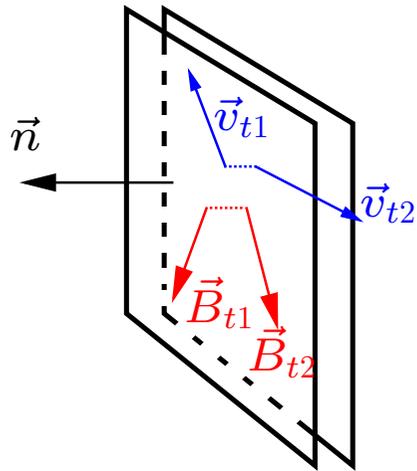
$$[\vec{v}_t] = 0$$

$$[B_n] = 0$$

$$[\vec{B}_t] = 0$$

Kontaktdiskontinuitäten weisen keinen Massenfluss durch sie hindurch auf. Deshalb gilt $v_n = 0$, d.h. jede Bewegung findet nur tangential zur Diskontinuität statt. Das Magnetfeld kann eine Komponente senkrecht zur Diskontinuität aufweisen, $B_n \neq 0$, diese muss aber wegen $[B_n] = 0$ stetig sein. Wegen $v_n = 0$ darf sich nach Glg. 14 die tangentiale Komponente von \vec{B} an der Diskontinuität nur stetig ändern, $[\vec{B}_t] = 0$. Damit ändert sich \vec{B} an dieser Diskontinuität nicht und nach Glg. 15 darf sich auch die tangentiale Geschwindigkeit nicht ändern, $[\vec{v}_t] = 0$. Nach Glg. 13 muss auch der Druck p auf beiden Seiten gleich sein (weil ja B^2 auf beiden Seiten gleich ist) und nur die Dichte n darf sich ändern. Wenn sich n auf beiden Seiten unterscheiden darf, p aber nicht, so muss sich auch die Temperatur unterscheiden. Wegen $B_n \neq 0$ können Elektronen (und Ionen) den Temperaturunterschied problemlos ausgleichen und die Diskontinuität löst sich bald auf.

Tangentiale Diskontinuitäten: $F = 0$



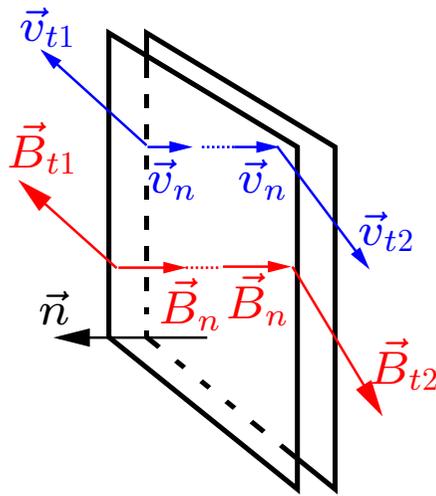
Interessanter ist die tangentielle Diskontinuität. Hier ist $B_n = 0$, was sie stabil macht. Zusammen mit $v_n = 0$ sind Glg. 14 und 15 trivial erfüllt. Die einzige verbleibende nicht-triviale Bedingung ist dann

$$\left[p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] = 0.$$

An einer solchen Diskontinuität herrscht ein Druckgleichgewicht ohne dass es einen Massen- oder Feldfluss durch die Fläche gibt. Die tangentialen Komponenten von \vec{B} und \vec{v} dürfen sich beliebig verhalten, solange sie eben tangential bleiben.

Rotationsdiskontinuitäten: $II = 0$

Rotationsdiskontinuitäten ergeben sich aus der Annahme $[v_n] = 0$ und der Lösungsbedingung



$$\left(F^2 - \frac{B_n^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} \right) = 0, \quad \text{also} \quad nmv_n = \sqrt{\frac{B_n^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle}}. \quad (18)$$

Es gibt also einen Massenfluss durch die Fläche, $nv_n \neq 0$, wenn $B_n^2 > 0$. Wegen $[nv_n] = 0$ (Glg.12) muss aber mit $[v_n] = 0$ auch $[n] = 0$ gelten, links und rechts muss die Dichte gleich sein. Wegen $[v_n] = 0$ verschwindet die linke Seite von Glg. 13, was uns sagt, dass der Gesamtdruck auf beiden Seiten gleich ist. Gleichungen 14 und 15 sagen uns zudem, dass sich die tangentialen Komponenten \vec{v}_t und \vec{B}_t nur zusammen verändern

können. Gleichungen 14 und 18 ergeben die entsprechende Sprungbedingung,

$$B_n[\vec{v}_t] = v_n[\vec{B}_t] \longrightarrow [\vec{v}_t] = \frac{[\vec{B}_t]}{\sqrt{nm\mu_0}}.$$

An einer Rotationsdiskontinuität ist der Sprung in der tangentialen Geschwindigkeit gerade gleich dem Sprung in der tangentialen Alfvéngeschwindigkeit.

Die verbleibende Bedingung muss nun aus der Energiegleichung hergeleitet werden. Diese kann mit Hilfe der Beziehung in Glg. 16 in den folgenden Ausdruck umgeformt werden⁹,

$$F \left\{ [e] + \langle p \rangle [\bar{\rho}] + \frac{1}{4\mu_0} [\bar{\rho}] [\vec{B}_t]^2 \right\} = 0.$$

⁹Baumjohann & Treumann, Kapitel 8.

$$\begin{aligned}
 [n] &= 0 \\
 [p] &= 0 \\
 [v_n] &= 0 \\
 [B_n] &= 0 \\
 [B_t^2] &= 0 \\
 \left[\vec{v}_t - \frac{\vec{B}_t}{\sqrt{nm\mu_0}} \right] &= 0
 \end{aligned}$$

Weil bei Rotationsdiskontinuitäten $F \neq 0$ muss der Ausdruck in geschweiften Klammern verschwinden. Mit $[n] = 0$ folgt $[\bar{\rho}] = 0$, womit nur der erste Term ($[e]$) überlebt. Wegen $e = (c_v p)/(nk_B)$ gilt $[p] = 0$ und wegen $[p + B^2/(2\mu_0)] = 0$ und $[B_n] = 0$ folgt daraus auch $[\vec{B}_t] = 0$. Rotationskontinuitäten erfüllen also die links stehenden Bedingungen.

Aus der Bedingung für Rotationsdiskontinuitäten (Glg. 18) folgt schließlich auch, dass

$$v_n = \frac{B_n}{\sqrt{nm\mu_0}},$$

die sog. **Walén-Beziehung**, welche erlaubt, aus Magnetfeldmessungen die senkrechte Geschwindigkeit v_n herauszufinden.

Weil Dichte und kinetischer Druck P auf beiden Seiten gleich sind, muss auch die Temperatur auf beiden Seiten gleich sein, in Rotationsdiskontinuitäten bleibt auch die Entropie auf beiden Seiten gleich.

Änderungen der Entropie

Oft ist es hilfreich, sich auch die Änderung der Entropie S über eine Diskontinuität anzuschauen weil für diese ja immer $dS/dt \geq 0$ gilt. In der idealen (dissipationslosen) MHD ist die Entropie eine erhaltene Größe, es gilt für sie also eine Kontinuitätsgleichung

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} S = 0.$$

In einem inkompressiblen Medium gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ und an einer stationären Diskontinuität gilt dann $\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}S) = 0$, bzw. $[v_n S] = 0$ als Sprungbedingung.

In einem stationären kompressiblen Medium gilt aber

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}S) = S \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

was sagt, dass die Kompressibilität als Entropiequelle wirkt, selbst in der dissipa-

tionslosen MHD. An einer Diskontinuität gilt

$$[v_n S] = \int dn S \frac{dv_n}{dn} = \int S dv_n.$$

Daraus sehen wir unmittelbar, dass an allen bisher diskutierten Diskontinuitäten, für die $[v_n] = 0$ galt, die Entropie sich nicht ändert, sie waren **isentrop**.

Umgekehrt gilt, dass Diskontinuitäten in kompressiblen Medien mit $[v_n] \neq 0$ die Entropie zunehmen muss. Tritt eine Diskontinuität mit $[v_n] \neq 0$ auf, so ist dies ein **irreversibler** Prozess!

Alle im Folgenden besprochenen Diskontinuitäten (für den Fall $\text{III} = 0$) sind irreversibel. Es handelt sich um **Schocks, Stoßfronten oder Stoßwellen**. Beispiele sind die Bugstoßwelle der irdischen Magnetosphäre im Sonnenwind, CME-getriebene Stoßwellen, etc. Stoßwellen bilden sich immer aus, wenn eine überschallschnelle Strömung auf ein Hindernis trifft.

Stoßfronten/Schocks

Gleichung 17 lautet

$$\underbrace{F}_I \underbrace{\left(F^2 - \frac{B_n^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} \right)}_{II} \underbrace{\left\{ F^4 + F^2 \left(\frac{[p]}{[\bar{\rho}]} - \frac{\langle \vec{B} \rangle^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} \right) - \frac{B_n^2 [p]}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle [\bar{\rho}]} \right\}}_{III} = 0 \quad (17)$$

und wir betrachten von jetzt an die biquadratische Gleichung $III=0$. Sie hat die Lösung

$$F_{III}^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{[p]}{[\bar{\rho}]} - \frac{\langle \vec{B} \rangle^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} \right) \pm \sqrt{\frac{D}{4}},$$

wo die Diskriminante

$$D = \left(\frac{[p]}{[\bar{\rho}]} - \frac{\langle \vec{B} \rangle^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} \right)^2 + \frac{4B_n^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} \frac{[p]}{[\bar{\rho}]} > 0.$$

Schocks treten immer auf, wenn $F_{\text{III}}^2 > 0$, was erfordert, dass der erste Term der Lösung > 0 , also

$$\frac{\langle \vec{B} \rangle^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} > \frac{[p]}{[\bar{\rho}]}.$$

Dieser Fall tritt immer dann auf, wenn das Vorzeichen der Sprünge in Druck und spezifischem Volumen verschieden sind. Gilt dies nicht, ist die Entstehung von Schocks stärker eingeschränkt.

Intermediäre Schocks

Als ersten Fall betrachten wir $[\bar{\rho}] = 0$. Dann wird $III = 0$ zu

$$[p] \left(F_{III}^2 - \frac{B_n^2}{\mu_0 \langle \bar{\rho} \rangle} \right) = 0,$$

was besagt, dass sich entweder der Druck nicht ändert ($[p] = 0$) oder der Druck nicht konstant bleibt und dafür der Ausdruck in der großen Klammer verschwindet. Dieser erinnert stark an eine Rotationsdiskontinuität (für die in Glg. 17 $II = 0$ gilt). Für den Fall dass beide Faktoren oben verschwinden haben wir in der Tat eine Rotationsdiskontinuität vorliegen. Ist dies nicht der Fall ($[p] \neq 0$), so spricht man von einem **intermediären** Schock.

Rotationsdiskontinuitäten sind eine spezielle Klasse von intermediären Schocks.

Wahre/richtige Schocks

p_1 $\bar{\rho}_1$	p_2 $\bar{\rho}_2$	<p>Die biquadratische Gleichung $III = 0$ hat vier Lösungen, wovon nur die drei physikalisch relevant sind, für die $F_{III}^2 > 0$. Davon gibt es eine Lösung mit $[p]/[\bar{\rho}] > 0$ und zwei mit $[p]/[\bar{\rho}] < 0$.</p> <p>Für $[p] > 0$ gibt es nur eine Lösung für die $[\bar{\rho}] > 0$. Dies bedeutet, dass bei zunehmendem Druck ($p_2 - p_1 > 0$) das spezifische Volumen $\bar{\rho} \doteq (nm)^{-1}$ auch zunimmt, also $n_2 - n_1 < 0$, was wiederum bedeutet, dass an dieser Stoßfront eine Verdünnung auftritt. Weil gleichzeitig aber der Druck auch steigt, heißt das, dass das Plasma beim Übergang geheizt wird und dies ein irreversibler Prozess ist.</p>
-------------------------	-------------------------	---

In den beiden anderen Fällen wo $[p]/[\bar{\rho}] < 0$, muss sich das Vorzeichen der beiden Änderungen unterscheiden. Weil der Druck immer zunimmt, muss in beiden Fällen die Dichte n zunehmen, es handelt sich um kompressive Schocks. Beide sind ebenso irreversibel wie alle $III = 0$ Schocks.

Koplanarität von Schocks

Wir wissen also nun, dass $[v_n] \neq 0$ und $B_n \neq 0$. Aus Glg. 14 und 15 können wir folgern, dass der Sprung in der tangentialen Komponente von \vec{B} parallel zum Sprung im tangentialen Geschwindigkeitsvektor ist. Dazu eliminieren wir $[\vec{v}_t]$ aus Glg. 14 und erhalten

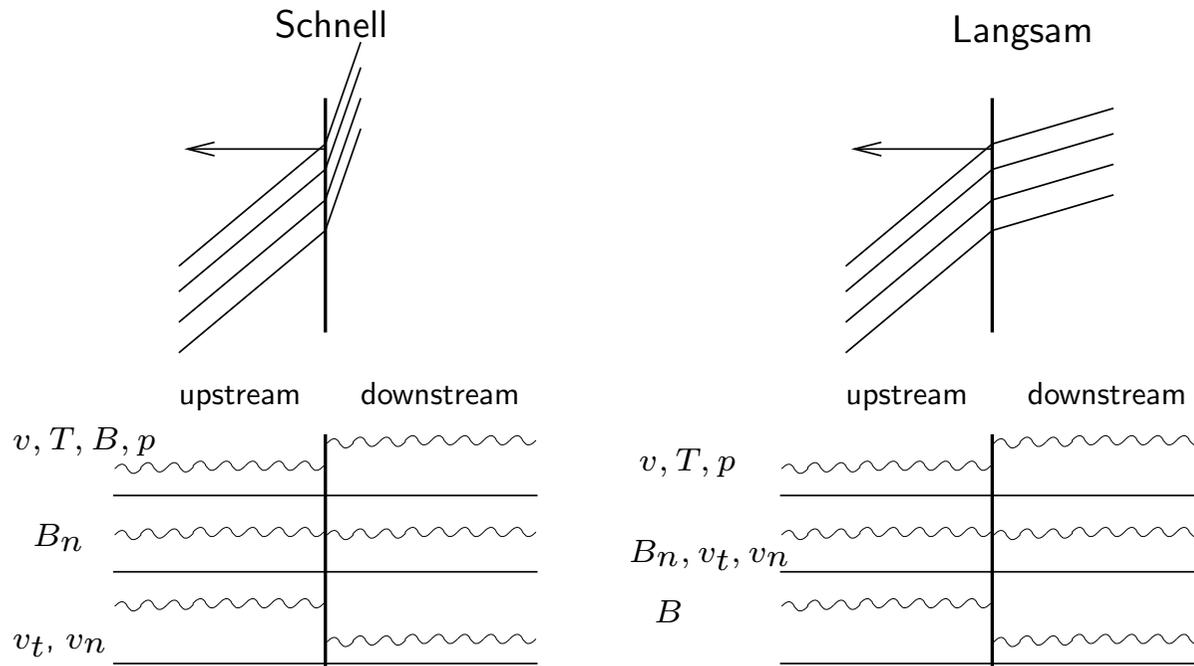
$$[v_n \vec{B}_t] = \frac{B_n^2}{\mu_0 F_{\text{III}}} [\vec{B}_t].$$

Die beiden Seiten sind parallel zu einander, d. h. deren Kreuzprodukt verschwindet.

$$[\vec{B}_t] \times [v_n \vec{B}_t] = 0 \implies (v_{n2} - v_{n1}) (\vec{B}_{t1} \times \vec{B}_{t2}) = [v_n] (\vec{B}_{t1} \times \vec{B}_{t2}) = 0,$$

wie man sich leicht überzeugt. D.h. dass wegen $[v_n \neq 0]$ die tangentialen Komponenten von \vec{B} auf beiden Seiten parallel und damit senkrecht zur Schockebene sein müssen. Schocks sind lokal zweidimensional, was auch für \vec{v}_t gilt.

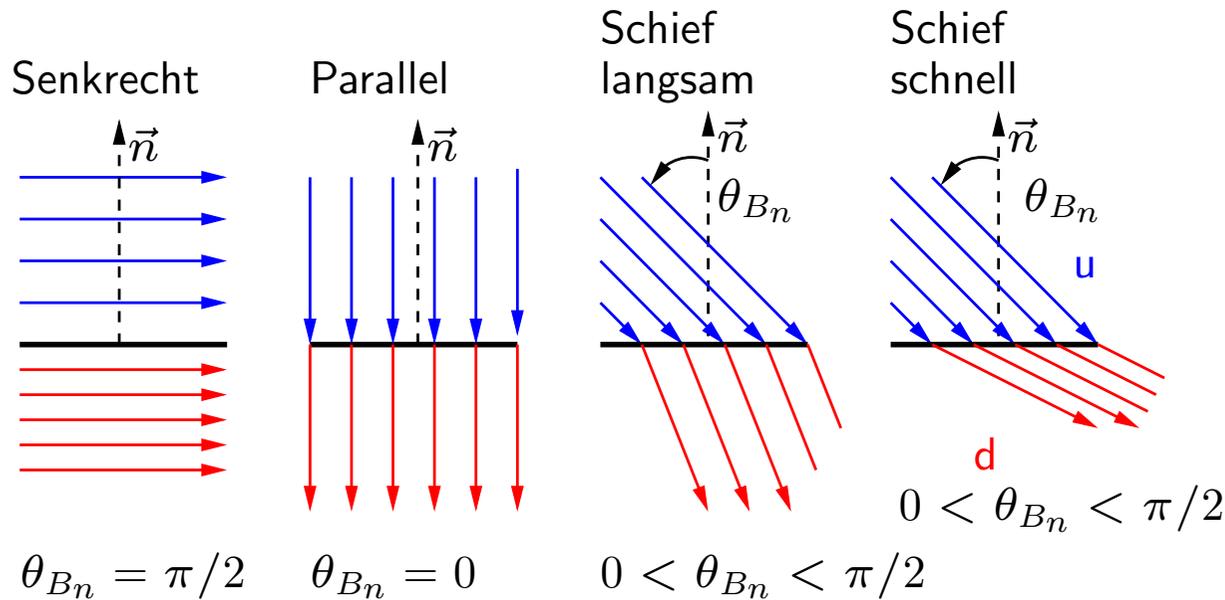
Schnelle und langsame Schocks



Wir nennen das Plasma, welches noch ungestört auf ein Hindernis zuströmt stromaufwärts (engl. upstream), das Plasma, welches durch den Schock irreversibel beeinflusst worden ist, stromabwärts (engl. downstream). Wie "merkt" ein

Plasma, dass ein Hindernis in seinem Wege steht? Diese Information muss mit einer natürlichen Geschwindigkeit des Plasmas zu ihm kommen. Man unterscheidet deshalb schnelle und langsame Schocks, je nachdem ob sie die Information mit der schnellen oder der langsamen magnetosonischen Geschwindigkeit vermitteln.

Geometrie von Schocks

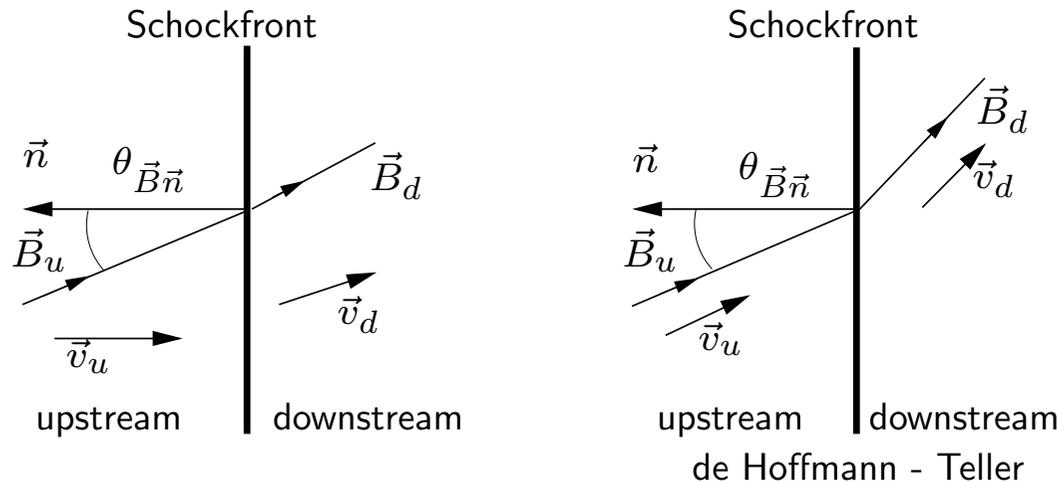


Man unterscheidet Schocks auch nach deren Geometrie in senkrechte, parallele und schiefe Schocks, je nach Winkel zwischen Magnetfeld und Schocknormalen. Dieser Winkel wird θ_{B_n} genannt. Er wird immer in der Region stromaufwärts

gemessen. Man spricht auch von "quasi-parallelen" oder "quasi-senkrechten" Schocks wenn θ_{B_n} sich nicht zu sehr von der parallelen oder senkrechten unterscheidet. Exakt parallele Schocks gibt es nicht. Sie würden das Magnetfeld wegen $[B_n] = 0$ gar nicht beeinflussen. In Wirklichkeit wachsen kleinste Störungen zu kurzweilig oszillierenden an, der Schock wird turbulent und lokal quasi-senkrecht.

Schiefe Schocks: Das de Hoffmann - Teller Bezugssystem

Im schiefen Schock links tritt ein elektrisches Feld

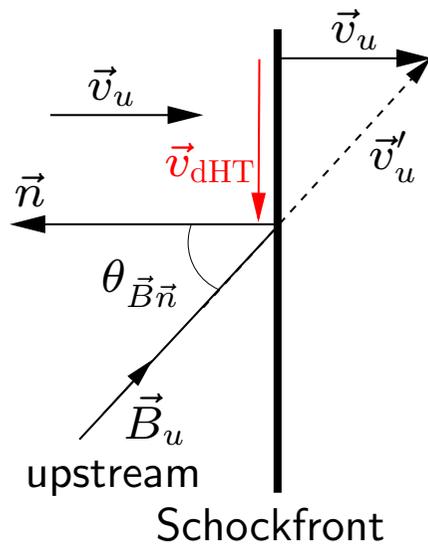


$$\vec{E} = -\vec{v}_u \times \vec{B}_u$$

auf, welches in der Ebene des Schocks liegt. Man kann dieses zum Verschwinden bringen, indem man sich in ein Bezugssystem versetzt, in welchem \vec{v}_u parallel ist zu \vec{B}_u . Es wird das de Hoffmann - Tellersche Bezugssystem genannt. In diesem gilt also $\vec{v}_u \times \vec{B}_u = 0$. Wegen Glg. 8 gilt dann auch $\vec{v}_d \times \vec{B}_d = 0$, was bedeutet, dass in diesem Bezugssystem die up- und downstream Geschwindigkeitsvektoren parallel zum jeweiligen Magnetfeld sind. Die Geschwindigkeit wird bestimmt durch

$$\vec{v}_{\text{dHT}} \times \vec{B} = -\vec{E}.$$

Konstruktion des de Hoffmann - Teller Bezugssystems



Links ist die Konstruktion des de Hoffmann - Teller Bezugssystems im Geschwindigkeitsraum gezeigt. Die Transformationsgeschwindigkeit \vec{v}_{dHT} liegt in der Schockebene, die transformierte upstream Geschwindigkeit liegt parallel zu \vec{B}_u , wie gefordert.

$$\vec{v}_{dHT} = \vec{v}_u - \vec{v}'_u.$$

Berechnet man den Betrag von \vec{v}_{dHT} , so findet man

$$|\vec{v}_{dHT}| = |\vec{v}_u| \tan \theta_{B_n},$$

was zeigt, dass diese Transformation nicht für alle Winkel θ_{B_n} funktionieren kann. Für senkrechte Schocks ($\theta_{B_n} = \pi/2$) müsste ja v_{dHT} unendlich werden.

Machzahl von Schocks

Ein Schock kann sich nur ereignen, wenn die Strömung des Plasmas auf ein Hindernis schneller ist, als die magnetosonische Geschwindigkeit,

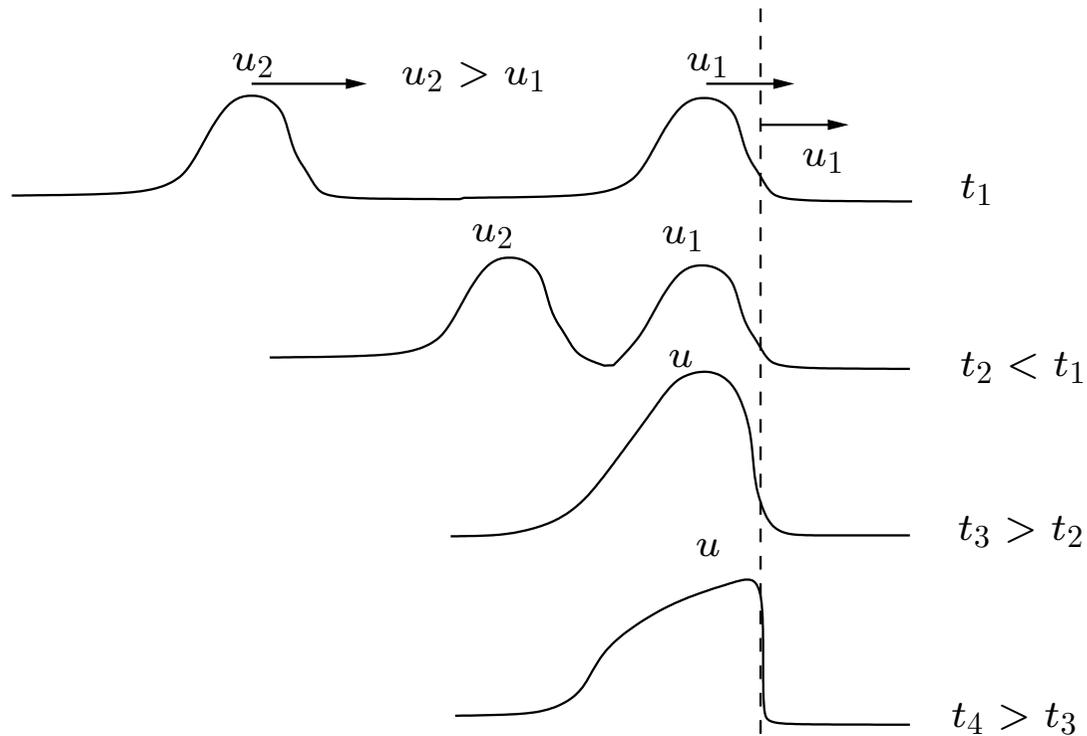
$$c_{\text{ms}}^2 \doteq c_s^2 + v_A^2,$$

wo c_s und v_A die Schall- und Alfvéngeschwindigkeit im Plasma sind. Die magnetosonische Geschwindigkeit ersetzt die normale Schallgeschwindigkeit in einer nicht magnetisierten Flüssigkeit (oder Gas). Das Plasma kann höchstens mit der magnetosonischen Geschwindigkeit über ein Hindernis “informiert” werden.

Man nennt eine Strömung über-magnetosonisch, wenn sie schneller als die magnetosonische Geschwindigkeit ist. Ihre Machzahl bestimmt, ob eine Stoßwelle entstehen kann.

$$M_{\text{ms}} = \frac{v}{c_{\text{ms}}}, \quad M_{\text{ms}} > 1 \implies \text{Schock.}$$

Entstehung von Schocks



Schocks müssen nicht zwingend dadurch entstehen, dass eine supermagnetosonische Strömung auf ein Hindernis ströbt. Die links abgebildete Situation zeigt eine Abfolge von zwei schnellen oder langsamen (kompressiven) Störungen. Die Kompression führt zu einer Erwärmung des Plasmas und damit zu einer Erhöhung der magnetosonischen

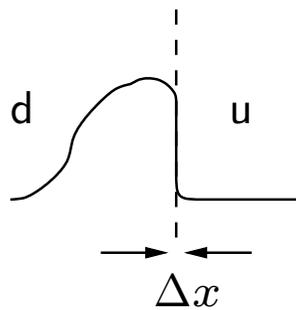
Geschwindigkeit im folgenden Plasma. Die Summe der beiden Störungen ist nicht mehr linear zu beschreiben, ein Überholen ist nicht möglich. Jede weitere Störung staut sich an der vorderen Front auf, ein Schock entsteht.

Stabilisierung von Schocks

Die Energie, die in die Schockfront eingespeist wird, muss irgendwie dissipiert werden, soll der Schock stabil bleiben. Diese Dissipation ist eng mit der Dicke der Übergangsschicht verknüpft, die durch die Viskosität und magnetische Viskosität der Flüssigkeit bestimmt wird. Die Wärmeleitung reicht in der Regel nie aus, um einen Schock zu stabilisieren. Mit einer typischen Längenskala L und Geschwindigkeit v im Plasma lassen sich folgende dimensionslose Zahlen (**Reynoldszahlen**) zusammenstellen:

$$\text{Re} = \frac{vL}{\nu} \quad \text{Re}_m = v_{\text{ph}} \frac{\tau}{L} = \frac{\omega}{k} \mu_0 \frac{\sigma}{k},$$

wo $\nu = \eta/\rho$ die kinematische Viskosität, Re_m die magnetische Reynoldszahl und τ eine typische Zeitskala, v_{ph} die Phasengeschwindigkeit und σ die elektrische Leitfähigkeit sind.



Die endliche Leitfähigkeit führt auf der durch Re_m bestimmten Längenskala zu einer Entkopplung der Schwingungen der Flüssigkeiten von denen des Magnetfeldes, die Welle kann sich nur noch mit Schallgeschwindigkeit (statt mit der schnellen magnetosonischen) fortpflanzen.

Es folge nun eine zweite Störung. Ist deren Geschwindigkeit stromabwärts von der Stoßfront kleiner als die Schallgeschwindigkeit, bleibt der Schock stabil. Ist sie größer, muss ein weiterer Prozess den Schock stabilisieren. Man kann zeigen, dass die viskose Dissipation jeden Schock stabilisieren kann.

Neben Dissipation kann auch Dispersion einen Schock stabilisieren, die kleinstmögliche Längenskala ist hier die Debyelänge bei der Ladungstrennung auftritt. Die nächstlängeren Skalen sind die Elektronen- und Ioneninertiallängen. Man nennt solche Stoßfronten dispersive Schocks. Weil in ihnen wegen der Ladungstrennung Plasmaoszillationen auftreten, beobachtet man bei ihnen "precursor"

Wellen im Whistler mode.

In allen Fällen steilen sich Störungen zu Schocks auf bis diese die Dicke der längsten Skalenlänge erreicht haben, deren zugehöriger Prozess den Schock stabilisieren kann. In anderen Worten, die längste Skalenlänge, die den Schock stabilisieren kann, bestimmt die Natur der Stoßfront.

Man nennt Schocks, die durch Dissipation stabilisiert werden dissipative Schocks. Stoßfronten, die durch Dispersion stabilisiert werden, heißen dispersive Schocks.