

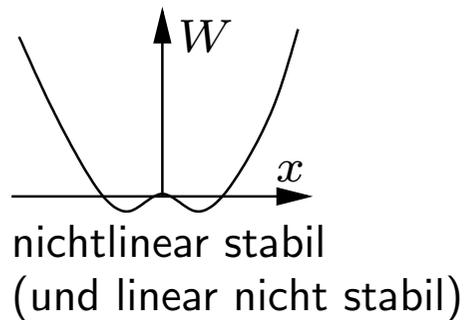
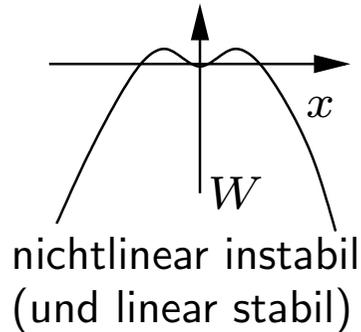
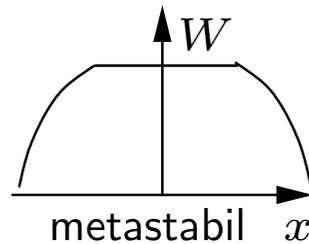
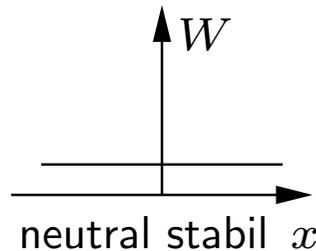
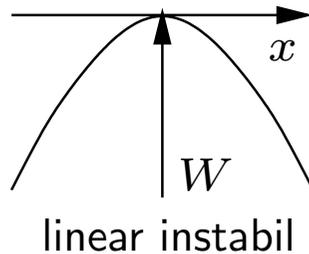
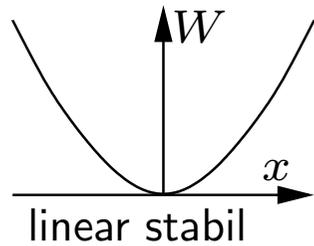
## Konzept der Stabilität – Normal Mode Methode

Das Konzept der Stabilität ist links skizziert und kann einfach mit Hilfe der Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt verstanden werden. Für ein lineares System gilt

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dW}{dx},$$

wo  $dW$  die Arbeit ist, die die Kraft  $F(x)$  entlang von  $dx$  verrichtet. Wenn wir nur eine kleine Auslenkung aus dem Gleichgewicht um  $x = 0$  betrachten, so können wir auch schreiben

$$m\ddot{x} \approx -x \left( \frac{d^2W}{dx^2} \right)_{x=0}.$$



Diese Schwingungsgleichung lösen wir mit dem bekannten Ansatz  $x = x_0 \exp(i\omega t)$  und erhalten für die Frequenz

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left( \frac{d^2W}{dx^2} \right)_{x=0}. \quad (1)$$

Weist  $W(x)$  bei  $x = 0$  ein Minimum auf, so ist  $(d^2W/dx^2)$  dort positiv und die Frequenz  $\omega^2 > 0$  also reell. Das Teilchen schwingt um die Ruhelage, das System ist stabil.

Weist aber  $W(x)$  bei  $x = 0$  ein Maximum auf, so ist  $(d^2W/dx^2)$  dort negativ und die Frequenz  $\omega^2 < 0$ , also rein imaginär,  $\mathbf{Re}(\omega) = 0$ ,

$$x = x_0 \exp(i\omega t) = x_0 \exp(i(i\mathbf{Im}(\omega))t) = x_0 e^{(-\mathbf{Im}(\omega)t)},$$

was zu einem exponentiellen Wachstum von  $|x|$  führt weil  $\omega = \pm i\mathbf{Im}(\omega)$ . Das System ist instabil.

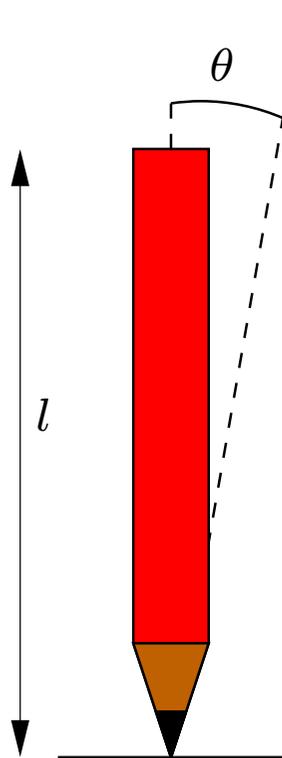
## Stabilität II – Energie (oder Variations) - Methode

Eine andere Möglichkeit, die Stabilität eines Systems zu untersuchen liegt darin, die Änderung der potentiellen Energie  $\delta W$  eines Systems zu betrachten, wenn es um  $x$  aus dem Gleichgewicht bei  $x = 0$  ausgelenkt wird. Wir entwickeln  $\delta W$  um  $x = 0$  herum.

$$\delta W = W(x) - W(0) = x \left( \frac{dW}{dx} \right)_{x=0} + \frac{x^2}{2} \left( \frac{d^2W}{dx^2} \right)_{x=0} + \dots \approx \underbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 x^2}_{\text{wegen Glg.1}}$$

Der erste Term verschwindet weil  $W$  bei  $x = 0$  nach Voraussetzung ein Extremum aufweist. Das System ist stabil, wenn  $\delta W > 0$  für *alle* kleinen Auslenkungen um  $x = 0$  herum, also für  $x > 0$  und  $x < 0$ . Gibt es irgendeine Auslenkung für welche  $\delta W < 0$ , so ist das System instabil, es wird Energie freigesetzt.

## Bleistift auf der Spitze



Ist die links skizzierte Situation stabil? Nein, natürlich nicht, das wissen wir alle. Aber wie lange bleibt ein perfekt balancierter Bleistift der Masse  $m = 5\text{g}$  und Länge  $l = 20\text{cm}$  auf seiner Spitze stehen? Wie lange dauert es bis er auf dem Tisch liegt?

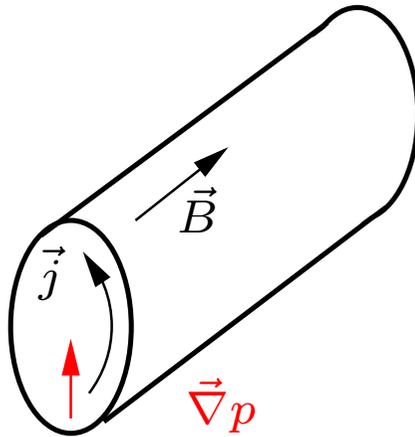
**Übung 1.** *Berechnen Sie dies!*

Hinweis: Wenn Sie bis zu einem Winkel  $\theta = \pi/2$  rechnen wollen, geht das nur numerisch. Die Anfangsbedingungen sind – bis auf die Heisenbergsche Unschärferelation  $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar$  – perfekt. Reduzieren Sie nun die DGL zweiter Ordnung auf zwei gekoppelte DGLs erster Ordnung. Das Trägheitsmoment ist in guter Näherung  $I = (1/3)ml^2$ .

## Konfigurationen im Gleichgewicht<sup>1</sup>

In einem stationären Plasma mit ( $\vec{g} = 0$ ) lauten Bewegungs- und Ampèresche Gleichung besonders einfach:

$$\vec{\nabla} p = \vec{j} \times \vec{B}, \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (2)$$



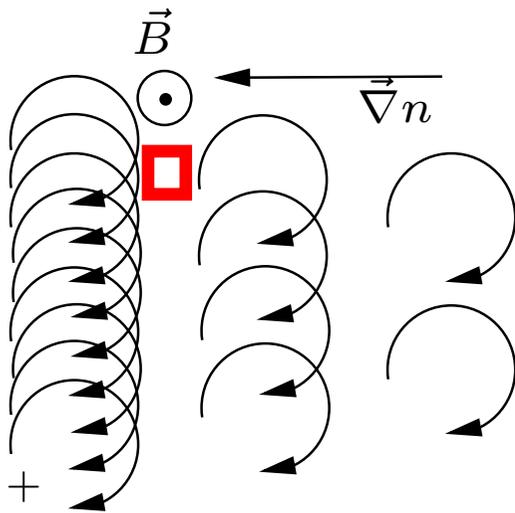
d. h. die durch den Druckgradienten bewirkte Kraft wird gerade durch die Lorentzkraft  $\vec{j} \times \vec{B}$  kompensiert, z. B. wie links skizziert. Der dafür erforderliche Strom kann einfach bestimmt

werden indem wir das Vektorprodukt von Glg. 2 mit  $\vec{B}$  bilden

$$\vec{j}_{\perp} = \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} p}{B^2} = (kT_i + kT_e) \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} n}{B^2}, \quad \text{denn} \quad (\vec{B} \times \vec{j} \times \vec{B}) = \vec{j} B^2 - \vec{B} (\vec{j} \cdot \vec{B})$$

was gerade der diamagnetische Strom ist (siehe Teil I).

<sup>1</sup>Ich folge in Folien 5 bis 22 Chen, "Plasma Physics and Controlled Fusion", Plenum Publ. Corp., 1984

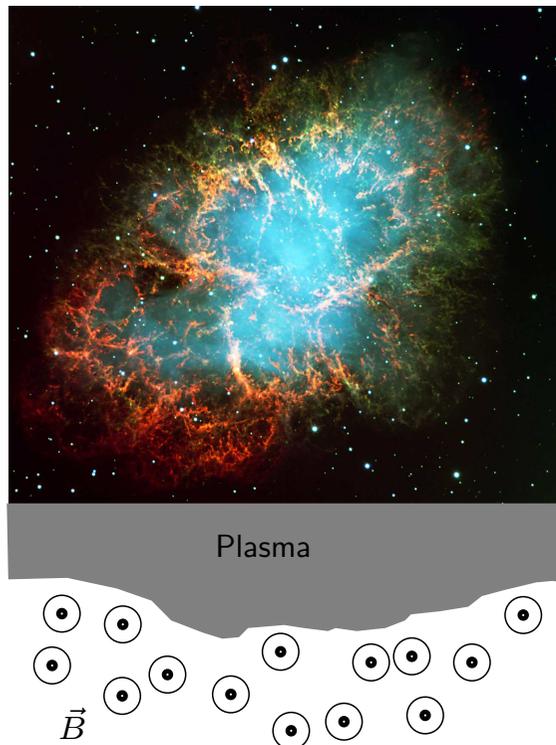


Ein Dichtegradient in einem homogenen Magnetfeld führt dazu, dass im links eingezeichneten roten Quadrat sich mehr positive Ladungen von oben nach unten als von unten nach oben bewegen. Das bedeutet aber auch, dass sich die Flüssigkeit nach unten bewegt, auch wenn die Gyrozentren stationär sind. Mit dem Vorzeichen der Ladung der Teilchen ändert diese Drift ihre Richtung, nicht aber ihren Betrag. Es fließt also ein (diamagnetischer) Strom. Im Flüssigkeitsbild der MHD entsteht der diamagnetische

Strom durch die  $\vec{\nabla}p$ -Kraft kreuz  $\vec{B}$ . Der Strom ist gerade stark genug, um die auf die Flüssigkeitselemente wirkenden Kräfte zu balancieren und verhindert die Bewegung.

Die auf Seite 5 skizzierte Anordnung für ein Plasma im Gleichgewicht ist nicht die einzige Lösung von Glg. 2. Diese besagt lediglich, dass  $\vec{j}$  und  $\vec{B}$  auf Flächen mit konstantem Druck liegen müssen (weil sie  $\perp \vec{\nabla}p$  liegen müssen).

## Diffusion von $\vec{B}$ in ein Plasma



Im Krebsnebel (Bildquelle: ESO) haben wir Regionen mit dichtem Plasma und Regionen mit starkem  $\vec{B}$ . Das Plasma bewegt sich durch das Magnetfeld und schiebt es "zur Seite". Ist es unendlich leitfähig, kann das Magnetfeld nicht in das Plasma eindringen. Bei endlicher Leitfähigkeit ist die Sache komplexer, das Feld diffundiert mit einer typischen Zeit  $\tau$  in das Plasma hinein, die sich einfach abschätzen lässt. Mit dem Ohmschen Gesetz  $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}$  haben wir für ein Plasma in Ruhe ( $\vec{v} = 0$ ) und sich bewegendem  $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \text{und} \quad \vec{E} = \eta \vec{j} \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \times \eta \vec{j}.$$

Mit  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  finden wir die Induktionsgleichung der MHD wieder.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\eta}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{\eta}{\mu_0} \left[ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \right] \xrightarrow{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B},$$

welche wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  bekanntlich in eine Diffusionsgleichung übergeht.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B} \quad \longrightarrow \quad \tau = \frac{\mu_0}{\eta} L^2.$$

wo  $L$  eine typische Längenskala für das Magnetfeld,  $\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot \exp(\pm t/\tau)$  und  $\tau$  die Diffusionszeit sind.

**Übung 2.** *Können wir erwarten, in unserem Leben eine Änderung des Aussehens des Krebsnebels zu beobachten?*

## Wohin verschwindet denn $\vec{B}$ ?

Wenn die Feldlinien sich durch das Plasma bewegen, so induzieren sie darin Ströme, die über Joulesche Heizung das Plasma heizen. Die dazu erforderliche Energie muss aus dem Magnetfeld und seiner Bewegung kommen. Die pro Zeiteinheit  $\tau$  dissipierte Energiedichte (pro  $\text{m}^3$ ) ist gleich  $\eta j^2 \tau$ , wo

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \approx \frac{B}{L}.$$

Damit haben wir

$$\eta j^2 \tau = \eta \left( \frac{B}{\mu_0 L} \right)^2 \frac{\mu_0 L^2}{\eta} = \frac{B^2}{\mu_0} = 2 \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right),$$

in anderen Worten,  $\tau$  ist auch etwa die Zeit, die es braucht um die im Magnetfeld vorhandene Energie über Ohmsche Heizung (Joulesche Wärme) zu dissipieren.

# Instabilitäten

Nach Chen<sup>2</sup> unterscheidet man zwischen verschiedenen Sorten von Instabilitäten:

- Strömungsinstabilitäten:** Im Plasma besteht eine Relativbewegung von Teilchen oder es fließt ein Strom. → Zwei-Strom-Instabilität, Kelvin-Helmholtz-Instabilität
- Rayleigh-Taylor Instabilitäten:** Das Plasma weist eine scharfe Grenze auf und es wirkt ein externes Feld auf das Plasma. → Rayleigh-Taylor Instabilität
- Universelle Instabilitäten** Kleinskalige (irdische) Plasmen wollen expandieren, was Instabilitäten verursacht.
- Kinetische Instabilitäten** Nicht-Maxwellsche Verteilungsfunktionen können Instabilitäten hervorrufen.

---

<sup>2</sup>Chen, "Plasma Physics and Controlled Fusion", Plenum Press, 1984

# Instabilitäten

Nach Krall & Trivelpiece<sup>3</sup> unterscheidet man zwischen zwei Hauptkategorien von Instabilitäten:

**Makroinstabilitäten** im Ortsraum entstehen z.B., wenn ein Plasma räumlich begrenzt ist und sich durch Ausdehnen ins Gleichgewicht bringen kann.

**Mikroinstabilitäten** im Geschwindigkeitsraum entstehen dann, wenn die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion nicht Maxwellisch ist, wie z. B. ein Strahl energiereicher Elektronen im Plasma.

Beide haben zusätzliche Unterkategorien:

**Elektrostatische Instabilitäten** folgen aus wachsenden örtlich konzentrierten Ladungsdichten

**Elektromagnetische Instabilitäten** folgen aus wachsenden örtlich konzentrierten Stromdichten

---

<sup>3</sup>Principles of Plasmaphysics, McGraw-Hill, 1973

**Übung 3.** *Ein System könne durch die folgende linearisierte Gleichung beschrieben werden:*

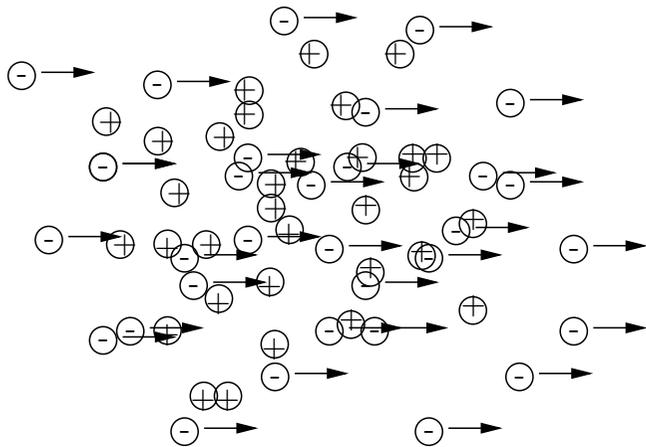
$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = 0$$

*Bestimmen Sie die Grenze stabil-instabil in der  $A - B$ -Ebene.*

**Weiteres Vorgehen:** Wir werden nun im Rest der heutigen Vorlesung drei Beispiele behandeln:

- Als Beispiel einer Mikroinstabilität die Zwei-Strom-Instabilität
- Als Beispiel einer Makroinstabilität die Rayleigh-Taylor-Instabilität
- Als Beispiel einer Strömungsinstabilität die Kelvin-Helmholtz-Instabilität

## Die Zwei-Strom-Instabilität



Die Zwei-Strom-Instabilität tritt in der links skizzierten Situation auf, in der auf die unbeweglichen Ionen ein Strahl von monoenergetischen Elektronen mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  trifft. Wir versetzen uns in das System der Ionen und nehmen an, das Plasma sei kalt ( $T_e = T_i = 0$ ) und unmagnetisiert ( $\vec{B}_0 = 0$ ). Die Bewegungsgleichungen für die Ionen und Elektronen können linearisiert werden:

$$Mn_0 \frac{\partial \vec{v}_{i1}}{\partial t} = en_0 \vec{E}_1 \quad (3)$$

$$mn_0 \left[ \frac{\partial v_{e1}}{\partial t} + \left( \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) v_{e1} \right] = -en_0 \vec{E}_1, \quad (4)$$

wo  $(\vec{v}_{e1} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_0 = 0$  weil  $\vec{v}_0$  homogen sein soll. In Glg. 3 tritt der Term  $(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1$  nicht auf weil die Ionen in Ruhe sind,  $\vec{v}_{i0} = 0$ . Es werden sich elektrostatische Wellen der Form

$$E_1 = E \exp(i(kx - \omega t)) \hat{x}$$

ausbilden, wo  $\hat{x}$  in Richtung  $\vec{v}_0$  und  $\vec{k}$  zeige. Einsetzen auch von  $v_1 = v_{10} \exp(i(kx - \omega t))\hat{x}$  in die Bewegungsgleichungen 3 und 4 liefert

$$-i\omega M n_0 \vec{v}_{i1} = e n_0 \vec{E}_1 \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_{i1} = \frac{ie}{M\omega} E \hat{x},$$

$$m n_0 (-i\omega + ikv_0) \vec{v}_{e1} = e n_0 \vec{E}_1 \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_{e1} = -\frac{ie}{m} \frac{E \hat{x}}{\omega - kv_0}.$$

Beide Geschwindigkeiten zeigen in  $\hat{x}$ -Richtung. Die wiederum linearisierte Konti-

Kontinuitätsgleichung für die Ionen besagt

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{i1} = 0 \quad \rightarrow \quad n_{i1} = \frac{k}{\omega} n_0 v_{i1} = \frac{ien_0 k}{M\omega^2} E, \quad (5)$$

wo die anderen Terme von  $\vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}_i)$  verschwinden weil  $\vec{\nabla} n_0 = 0$  und  $v_{i0} = 0$ . Für die Elektronen lautet die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{e1} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) n_{e1} &= 0, \\ (-i\omega + ikv_0) n_{e1} + ikn_0 v_{e1} &= 0, \\ n_{e1} = \frac{kn_0}{\omega - kv_0} v_{e1} &= -\frac{iekn_0}{m(\omega - kv_0)^2} E. \end{aligned} \quad (6)$$

Das elektrische Feld  $\vec{E}_1$  wird durch die Poissongleichung bestimmt,

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 &= e (n_{i1} - n_{e1}), \\ ik\varepsilon_0 E &= e (ien_0 k E) \left[ \frac{1}{M\omega^2} + \frac{1}{m(\omega - kv_0)^2} \right]\end{aligned}$$

Die Dispersionsrelation für die durch den Strahl angeregten hochfrequenten elektrostatischen Wellen ergibt sich nun ganz einfach durch Division durch  $i\varepsilon_0 k E$

$$1 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{M\omega^2} + \frac{1}{m(\omega - kv_0)^2} \right] = \omega_p^2 \left[ \frac{m/M}{\omega^2} + \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} \right]. \quad (7)$$

Diese quartische Gleichung für  $\omega$  hat vier Lösungen in  $\mathbb{C}$ . Sind alle Lösungen reell,

so haben wir eine Schwingung

$$\vec{E}_1 = E \exp(i(kx - \omega t)) \hat{x}.$$

Gibt es komplexe Lösungen, so treten sie in konjugiert-komplexen Paaren auf,

$$\omega_j = \mathbf{Re}\omega_j \pm i\mathbf{Im}\omega_j,$$

und der Ausdruck für die die Schwingung lautet

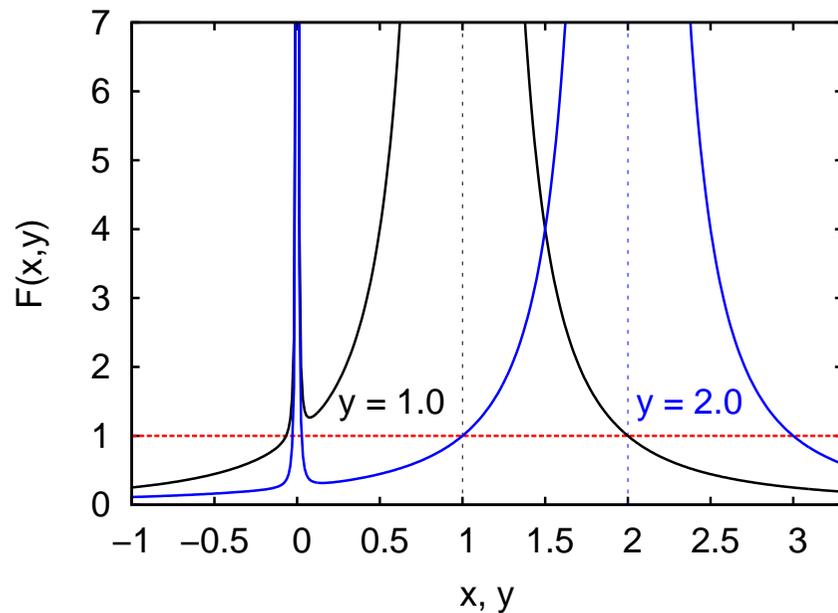
$$\vec{E}_1 = E \exp(i(kx - \mathbf{Re}\omega t)) e^{\pm\mathbf{Im}\omega t} \hat{x},$$

d.h. wir haben immer eine wachsende und damit instabile Lösung sobald nicht alle Lösungen reell sind. Um diese zu untersuchen, führen wir die Variablen

$$x \doteq \omega/\omega_p \quad \text{und} \quad y \doteq kv_0/\omega_p$$

ein, womit die Dispersionsrelation (Glg. 7) sich vereinfacht zu

$$1 = \frac{m/M}{x^2} + \frac{1}{(x-y)^2} \doteq F(x, y). \quad (8)$$



Die Funktion  $F(x, y)$  ist links dargestellt. Für  $y = 1$  (schwarze Kurve) hat sie komplexe Lösungen und das Plasma ist instabil, für  $y = 2$  (blaue Kurve) sind alle Lösungen reell und das Plasma ist stabil.

**Übung 4.** Bestimmen Sie die Werte von  $y = kv_0/\omega_p$  für welche das Plasma stabil/instabil ist.

## Aufräumarbeit zur Zwei-Strom-Instabilität

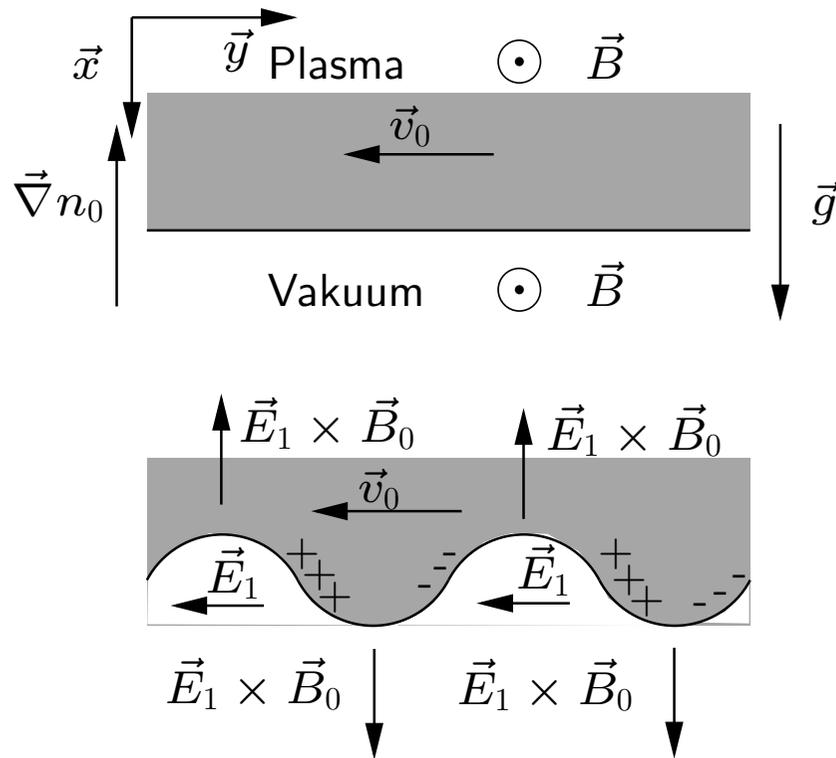
Ein Plasma ist also zwei-Strom-instabil, wenn  $y = kv_0/\omega_p$  klein ist, was nicht wirklich einleuchtend ist. In der Tat steckt doch in einem schnellen Elektronenstrahl mehr Energie, die umgewandelt werden will. Dies geschieht auch, nur können wir dies mit den Gleichungen der MHD oder auch den Zwei-Flüssigkeitsgleichungen nicht abbilden. Ein reales Plasma hat eine endliche Temperatur und kinetische Effekte (vor allem bei hohen Frequenzen) werden eine Rolle spielen.

Es zeigt sich, dass ein schneller Elektronenstrahl eine kinetische Instabilität hervorruft. Seine Geschwindigkeitsverteilung hat einen Höcker auf dem thermischen Schwanz ("bump-on-tail distribution"), der Wellen zum Wachsen anregt. Eine genaue Behandlung erfordert eine detaillierte kinetische Behandlung und geht auf Landau zurück<sup>4</sup>. Der hier skizzierte Effekt ist äquivalent zu einer inversen Landaudämpfung.

---

<sup>4</sup>Landau, J. Phys. USSR **10**, (1946), 25

# Rayleigh-Taylor Instabilität



Das starke Magnetfeld kann Plasma hoch in der Korona gegen die Gravitation halten, wie das Beispiel von Prominenz<sup>5</sup> gezeigt hat. Allerdings sind diese nicht stabil gegen die Rayleigh-Taylor Instabilität. Vereinfacht ist dies links dargestellt. Im Gleichgewicht lautet die Bewegungsgleichung für die Ionen

$$Mn_0 \left( \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}_0 = en_0 \vec{v}_0 \times \vec{B}_0 + Mn_0 \vec{g}. \quad (9)$$

Im Gleichgewicht ist wegen  $\vec{g} = \text{const.}$  auch die Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_0 = \text{const.}$  und

<sup>5</sup>Berger et al., 2011, von <http://www.lmsal.com/press/nature2011/>

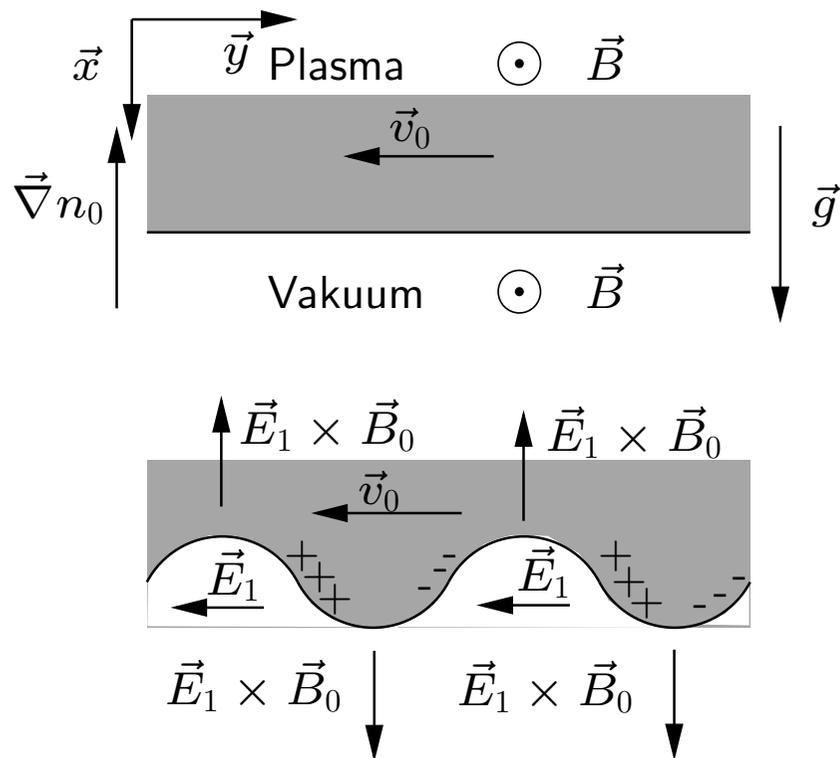
steht senkrecht auf  $\vec{B}_0$ . Wir bestimmen das Vektorprodukt von Glg. 9 mit  $\vec{B}_0$  um  $\vec{v}_0$  zu bestimmen:

$$0 = en_0\vec{B}_0 \times (\vec{v}_0 \times \vec{B}_0) + Mn_0\vec{B}_0 \times \vec{g},$$

wo die linke Seite mit  $(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_0 = 0$  wegen  $\vec{v}_0 = \text{const.}$  verschwindet. Mit  $\vec{B}_0 \times (\vec{v}_0 \times \vec{B}_0) = \vec{v}_0 B_0^2 - \vec{B}_0(\vec{v}_0 \cdot \vec{B}_0) = \vec{v}_0 B_0^2$  weil  $\vec{v}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0$  erhalten wir

$$\vec{v}_0 = \frac{M \vec{g} \times \vec{B}_0}{e B_0^2} = -\frac{g}{\Omega_c} \vec{y}, \quad \text{wo} \quad \Omega_c = \frac{eB_0}{M}.$$

Die Driftgeschwindigkeit der Ionen zeigt nach links. Die Elektronen haben eine Drift in  $+\vec{y}$ -Richtung, die aber wegen  $m_e \ll M$  vernachlässigbar ist.



Nun erlauben wir eine kleine Auslenkung in  $\vec{x}$ -Richtung, z. B. durch Bewegungen im umgebenden Plasma. Die Ionendrift führt dazu, dass sich Ionen und Elektronen trennen und sich ein elektrisches Feld  $\vec{E}_1$  aufbaut, welches im Vakuum nach links und im Plasma nach rechts zeigt. Das Plasma erfährt nun eine  $\vec{E}_1 \times \vec{B}_0$ -Drift, die in dieselbe Richtung wirkt, wie die Ausbeulungen schon bestehen. Die Situation ist also instabil, wie man an diesen Beispielen schön<sup>6</sup> sieht.

Um herauszufinden, wie schnell sich diese Instabilität auswirkt, müssen wir eine Stabilitätsanalyse durchführen.

---

<sup>6</sup>Dank an Dr. D. Innes (MPS)

## Stabilitätsanalyse

Wie eine Stabilitätsanalyse im Prinzip funktioniert haben wir auf Seiten 1 bis 3 schon gesehen, aber noch nicht auf ein Plasma angewendet.

Wir betrachten ein Plasma im stationären ( $\partial X/\partial t = 0$ ) Gleichgewicht mit verschwindender Plasmageschwindigkeit  $\vec{v}_0 = 0$ , Feld  $\vec{B}_0$ , Druck  $p_0$ , Dichte  $\rho_0$  und Strom  $\vec{j}_0$ . Diese Gleichgewichtsgrößen erfüllen alle die Gleichungen der MHD,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (10)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad \text{mit (11)}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \text{ als Energiegleichung und } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ als Anfangsbedingung (12)}$$

Für die Gleichgewichtsgrößen gilt damit

$$\vec{\nabla} p = \vec{j}_0 \times \vec{B}_0 + \rho \vec{g}, \quad \vec{j}_0 = (\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) / \mu_0, \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0.$$

Die kleinen destabilisierenden Störungen berücksichtigen wir so:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \vec{v} = \vec{v}_1, \quad p = p_0 + p_1, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1, \quad \vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_1.$$

Die Plasmagrößen  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{j}$  erfüllen die MHD-Gleichungen 10 bis 12. Setzt man sie ein, subtrahiert die Gleichungen für das Gleichgewicht und behält nur lineare Terme in den fluktuierenden Größen, so erhält man folgendes Gleichungs-

system:

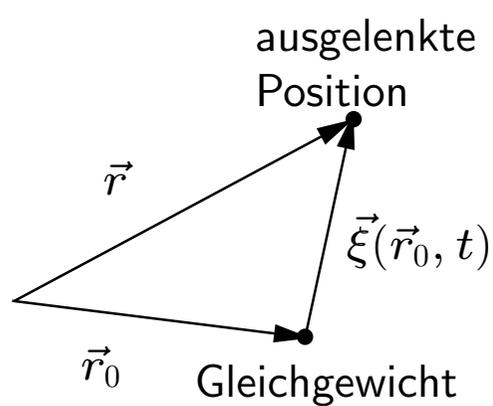
$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0), \quad (13)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1 + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 + \rho_1 \vec{g}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0, \quad (15)$$

$$\vec{j}_1 = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - p_0 (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \ln \left( \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right). \quad (17)$$



Wenn man Gleichungen 13 bis 17 mit der Auslenkung  $\vec{\xi}(\vec{r}_0, t) = \vec{r} - \vec{r}_0$  ausdrückt, kann man diese auf eine einzige Gleichung reduzieren<sup>7</sup>! Man findet eine Bewegungsgleichung

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}(\vec{\xi}(\vec{r}_0, t)), \quad (18)$$

wo die Kraft alle wesentlichen Terme enthält

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{\xi}) = & -\vec{\nabla} p_1 + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \vec{g} + \frac{1}{\mu_0} \left\{ \vec{\nabla} \times \left[ \vec{\nabla} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right] \right\} \times \vec{B}_0 + \\ & + \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 \right) \times \left[ \vec{\nabla} \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

(jaja...!) Der wesentliche Punkt ist, dass die Kraft linear in  $\vec{\xi}$  ist.

<sup>7</sup>Siehe Priest, *Magnetohydrodynamics of the Sun*, Cambridge, 2014

Dass die Kraft linear mit  $\vec{\xi}$  geht, bedeutet, dass man mit dem Ansatz

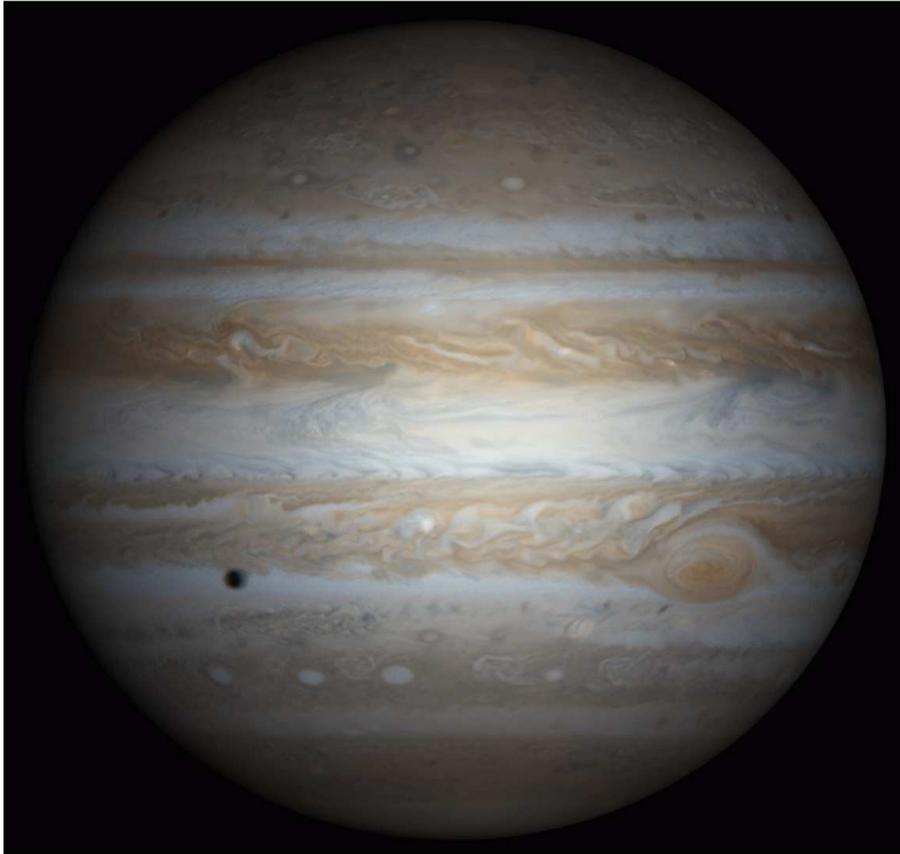
$$\vec{\xi}(\vec{r}_0, t) = \vec{\xi}(\vec{r}_0) e^{i\omega t}$$

die Bewegungsgleichung 18 in eine algebraische Gleichung überführen kann:

$$-\omega^2 \rho_0 \vec{\xi}(\vec{r}_0) = \vec{F}(\vec{\xi}(\vec{r}_0)). \quad (20)$$

Diese Gleichung hat nun dieselbe Form, wie wir sie bei der Diskussion der Normal Mode Methode und der Energie (oder Variations) - Methode gesehen haben. Man kann mit ihr auch die Ausbreitung von Wellen untersuchen (wenn  $\omega^2 > 0$ ), oder aber eben das Auftreten von Instabilitäten wenn  $\omega$  rein imaginär und deshalb für eine der Lösungen  $\mathbf{Im}(\omega)$  positiv ist.

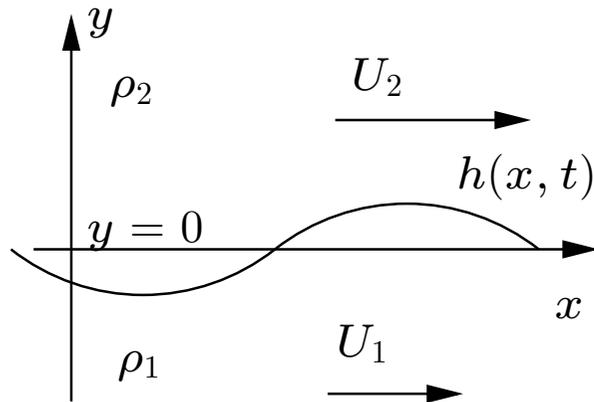
## Kelvin-Helmholtz Instabilität



Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität tritt auf, wenn zwei Flüssigkeiten relativ zu einander strömen. An der Trennschicht können sich Wirbel bilden. Ein wunderschönes Beispiel liefert Jupiter.

Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität tritt nicht immer auf, wie wir im Folgenden sehen werden. Sie wird auch auf der Erde beobachtet, z. B. am Rande der Magnetosphäre, in Wolkenformationen bei Inversionslagen, oder auch ganz einfach, bei windgetriebenen Wasserwellen.

## Analyse für die Kelvin-Helmholtz-Instabilität



Wir betrachten zwei ideale (Viskosität Null) unmischbare Flüssigkeiten<sup>8</sup> der Dichten  $\rho_1 > \rho_2$ , die bei  $y = 0$  aufeinandertreffen. Sie fließen anfänglich mit ungestörten Geschwindigkeiten  $\vec{U}_1 = (U_1, 0)$  und  $\vec{U}_2 = (U_2, 0)$ . Weil beide Flüssigkeiten ideal seien (Viskosität Null) und in ihren Strömungen zu Beginn keine Wirbel vorhanden sind ( $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ ), verschwindet die Vortizität (Wirbelstärke) nach dem Zirkulationssatz

von Kelvin<sup>9</sup> auch für immer,  $\vec{\omega} \doteq \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$  und  $\partial_t \vec{\omega} = 0$ . Ein solches Geschwindigkeitsfeld kann als Gradient eines skalaren Potentials geschrieben werden:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \Phi, \quad \text{wo} \quad \vec{\nabla}^2 \Phi = \Delta \Phi = 0.$$

<sup>8</sup>Wir vernachlässigen auch die Oberflächenspannung.

<sup>9</sup>Dieser kann durch Bildung der Rotation der Bewegungsgleichung hergeleitet werden.

Das Potential  $\Phi$  bestimmt sich durch

$$\Phi = U_1 x + \phi_1 \quad \text{für } y < 0 \quad \text{und} \quad \Phi = U_2 x + \phi_2 \quad \text{für } y > 0,$$

wo  $U_1$  und  $U_2$  die “ungestörten” und  $\vec{u}$  die effektiven Geschwindigkeit sind.

Die Gleichungen der (M)HD geben die Dynamik eines Systems nur dann vor, wenn auch die Randbedingungen bekannt sind. Dazu verlangen wir  $\phi_1 \rightarrow 0$  für  $y \rightarrow -\infty$  und  $\phi_2 \rightarrow 0$  für  $y \rightarrow \infty$ . An der Grenzschicht ist die Situation komplizierter. Weil die beiden Flüssigkeiten nicht mischbar seien, muss gelten:

$$(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \vec{n} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{n} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}, \quad (21)$$

was intuitiv klar ist: die Bewegung senkrecht zur Oberfläche muss auf beiden Seiten der Grenzschicht dieselbe sein. Dies wäre die richtige Randbedingung wenn die Grenzschicht sich nicht dynamisch an die Strömung anpassen würde.

Um die korrekte Randbedingung zu finden betrachten wir ein Flüssigkeitselement an der Grenzschicht, die durch die Funktion  $S(\vec{x}, t) = 0$  beschrieben werde. Ein Flüssigkeitselement bleibt an der Oberfläche, wenn die substantielle Ableitung

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0.$$

Wir betrachten diese Kontinuitätsgleichung nun in Flüssigkeiten 1 und 2,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla} S = 0, \quad (22)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \vec{\nabla} S = 0. \quad (23)$$

Nun steht  $\vec{\nabla} S$  für  $S = 0 = \text{const.}$  ja senkrecht auf der Grenzschicht und der Normalenvektor ist gegeben durch  $\vec{n} = \vec{\nabla} S / |\vec{\nabla} S|$ . Subtraktion von Glg. 23 von

Glg. 22 und Division durch  $|\vec{\nabla}S|$  liefert gerade die Randbedingung Glg. 21.

In unserem Beispiel lautet die Funktion  $S(\vec{x}, t) = y - h(x, t) = 0$ , womit wir die korrekte Randbedingung finden:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) (y - h(x, t)) = -\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \quad (24)$$

Die kinematische Randbedingung lautet nun

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{auf} \quad y = h(x, t). \quad (25)$$

Jetzt fehlt nur noch die dynamische Randbedingung, die Randbedingung an die Bewegungsgleichung. Diese wird gegeben durch die zeitabhängige Bernoulliglei-

chung:

$$p + \rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \Phi|^2 + gy \right) = \text{const.} \quad (26)$$

Wenn wir die Oberflächenspannung vernachlässigen, muss an der Grenzschicht  $y = h(x, t)$  ein Druckgleichgewicht  $p_1 = p_2$  herrschen, so dass an ihr gelten muss

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \Phi_1|^2 + gh \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \Phi_2|^2 + gh \right) \quad (27)$$

Das Problem ist natürlich, dass diese Gleichung nichtlinear ist - ein Überbleibsel der Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichung, die selbst in der viel älteren Euler- und dann auch der Bernoulligleichung schon auftritt. Wir werden sie los, indem wir nur kleine Störungen zulassen:  $|\phi_i| \ll 1$  und alle Terme höherer Ordnung ( $\phi^2$ ,  $h^2$ ,  $h\phi$  und auch  $\partial_x \phi \partial_x h$ ) vernachlässigen. Wir subtrahieren auch die ungestörte

Bernoulligleichung, in der Terme wie  $\frac{1}{2}U_i^2$  vorkommen, und erhalten

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + gh \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + gh \right). \quad (28)$$

Wir haben das Problem linearisiert. Die Koeffizienten sind alle von Zeit und Ort ( $x$ ) unabhängig, weshalb wir den folgenden Ansatz machen können:

$$h(x, t) = h_0 \exp(ikx + \omega t) \quad \text{und} \quad \phi_i(x, y, t) = \Phi_i(y) \exp(ikx + \omega t),$$

wo  $k > 0$  eine reelle Wellenzahl ist und  $\omega$  durchaus komplex sein kann. Hat  $\omega$  für irgendeine Wellenzahl  $k$  einen positiven Realteil, ist die Situation nicht stabil.

Die Lösung  $\phi_i$  muss auch die Laplacegleichung erfüllen, was wir sicherstellen

indem wir fordern, dass

$$\Delta\phi_i = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_i = \left( -k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_i, \quad \text{also} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_i = k^2 \phi_i.$$

Die einzige Abhängigkeit von  $y$  liegt aber in  $\Phi_i(y)$ , weshalb wir  $\Phi_i(y) \propto \exp(\pm ky)$  ansetzen, wo das Vorzeichen durch die Randbedingungen

$$\phi_1 \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad y \longrightarrow -\infty \quad \text{und} \quad \phi_2 \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad y \longrightarrow +\infty$$

gegeben ist.

Die Proportionalitätskonstante erhalten wir aus der kinematischen Randbedingung (Glg. 25) an der Grenzschicht, die wir hier bei  $y = 0$  auswerten. Deren linearisierte

Version lautet

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\Phi_i(y=0) &= \frac{\partial}{\partial t}h(x,t) + U_i\frac{\partial}{\partial x}h(x,t), \\ \mp k\Phi_i(y=0) &= \omega h(x,t) + U_i ikh(x,t) = (\omega + U_i ik)h(x,t), \\ \Phi_i(y=0) &= \frac{h_0}{\mp k} (\omega + U_i ik) e^{(ikx+\omega t)}\end{aligned}$$

Wir haben damit die Lösungen gefunden

$$\phi_1 = \frac{-h_0}{k} (\omega + ikU_1) e^{-ky} \cdot e^{ikx+\omega t} \quad \text{und} \quad \phi_2 = \frac{h_0}{k} (\omega + ikU_2) e^{ky} \cdot e^{ikx+\omega t},$$

wie man sich durch Einsetzen in die dynamische Randbedingung (Glg. 27) bei

$y = 0$  überzeugt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\rho_1 \left[ \frac{-h_0}{k} (\omega + ik U_1)^2 + gh_0 \right] e^{(ikx+\omega t)} &= \rho_2 \left[ \frac{h_0}{k} (\omega + ik U_2)^2 + gh_0 \right] e^{(ikx+\omega t)}, \\ \rho_1 \left[ -(\omega + ik U_1)^2 + gk \right] &= \rho_2 \left[ (\omega + ik U_2)^2 + gk \right].\end{aligned}\quad (29)$$

Diese Glg. ist quadratisch in  $\omega$  und bestimmt die Stabilität des Systems. Wir lösen sie nach  $\omega$  auf und erhalten nach etwas Rechnen

$$\omega = -ik \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (30)$$

Die Situation ist stabil wenn der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist und instabil wenn er positiv ist. Wir machen gleichnamig und erhalten die Bedingung

an Instabilität:

$$k^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 > gk (\rho_1^2 - \rho_2^2).$$

Wir sehen sofort, dass eine Instabilität für  $U_1 \neq U_2$  immer auftauchen kann, wenn  $k$  nur groß genug wird, die Wellenlängen also klein genug werden. Je kleiner die Wellenlänge, desto größer das Wachstum - dies ist die Kelvin-Helmholtz-Instabilität.

**Beispiel I:** Wind wehe mit  $U_2$  über Wasser ( $U_1 = 0$ ). In diesem Fall können wir auch  $\rho_1 \gg \rho_2$  annehmen und wir haben Instabilität für

$$k > \frac{g\rho_1}{\rho_2 U_2^2}.$$

Über einem See bilden sich bei leichtem Wind nur kurze Wellen - die Oberfläche kräuselt sich. Bei starkem Wind bilden sich größere und längere Wellen.

**Beispiel II:** Für  $\rho_2 > \rho_1$  ist die Situation für alle Wellenzahlen  $k > 0$  instabil. Wir haben in unserer Analyse die Rayleigh-Taylor-Instabilität gleich mit erhalten!