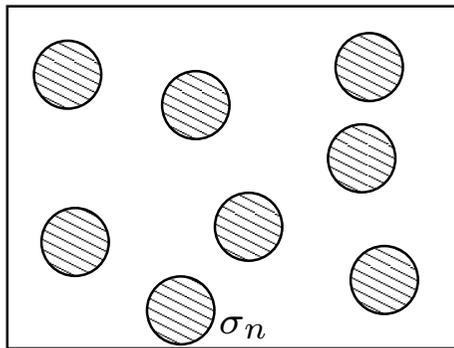


# Stöße im Plasma, Leitfähigkeit I

stoßfrei vollst. ionisiert	stoßfrei teilw. ionisiert
stoßdominiert vollst. ionisiert	stoßdominiert teilw. ionisiert

Bisher haben wir ein Plasma als ein 'ideales' Gas betrachtet, in welchem keine Wechselwirkung zwischen den einzelnen Gasteilchen stattfindet. Wegen der großen Reichweite der Coulombkraft ist dies – trotz Debye-Abschirmung – bei einem Plasma keine gute Näherung mehr. Zwar sind Stöße noch kein kol-

lektives Verhalten, aber das Verhalten des Plasmas wird durch sie beeinflusst. Man unterscheidet, wie oben links angedeutet, zwischen stoßfreien und nicht stoßfreien und zwischen vollständig und teilweise ionisierten Plasmen. Letztere weisen einen hohen Anteil an neutralen Atomen oder Molekülen auf. Stöße in solchen Plasmen haben einen anderen Charakter, als in einem vollständig ionisierten Plasma.



In teilweise ionisierten Plasmen spielen Stöße zwischen geladenen und ungeladenen Teilchen eine wichtige Rolle. Weil letztere immer schwer sind, kann man sie als schweres Hindernis im Weg der geladenen Elektronen auffassen. Die **Stoßfrequenz**  $\nu_n$  ist dann proportional zur Dichte des Neutralgases  $n_n$  und zum **Wirkungsquerschnitt**  $\sigma_n$  für Stöße mit Neutralteilchen.

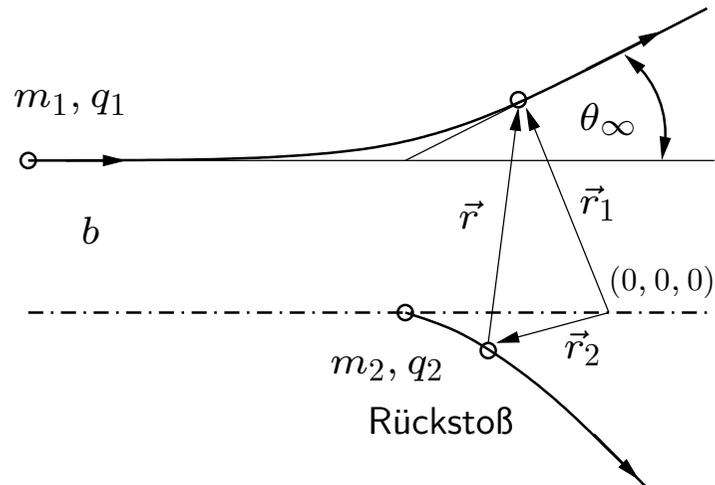
$$\nu_n = n_n \sigma_n \langle v \rangle, \text{ wo } \sigma_n \approx 10^{-19} \text{ m}^2$$

und  $\langle v \rangle$  die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen ist. Der Wirkungsquerschnitt für Neutralteilchen beträgt etwa  $\sigma_n = \pi r_0^2$ , wo  $r_0$  der Radius eines Atomes oder Moleküls ist. Die **mittlere freie Weglänge**  $\lambda_n$  ist definiert als

$$\lambda_n = \frac{\langle v \rangle}{\nu_n} = \frac{1}{n_n \sigma_n}.$$

# Coulombstöße

In einem Coulombstoß wirken die Kräfte



$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \text{und} \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}. \quad (2)$$

Addition der beiden Gleichungen liefert

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = (m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0,$$

wo  $\vec{R} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) / (m_1 + m_2)$  der Vektor zum Schwerpunkt ist. Der Schwerpunkt erfährt keine Beschleunigung. Dividieren wir Glg. 1 durch  $m_1$  und

Glg. 2 durch  $m_2$  und subtrahieren wir sie anschließend, so erhalten wir

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot \left( \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{m_1} - \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{m_2} \right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}.$$

Das System verhält sich wie ein Teilchen mit der **reduzierten Masse**  $\mu = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$ ,

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \quad \text{wo} \quad \vec{r} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (3)$$

Ein System von zwei Punktladungen bewegt sich also mit  $\dot{\vec{R}} = \text{const.}$  in eine Richtung. Die Relativbewegung der beiden Ladungen kann von der Schwerpunktsbewegung separiert werden. Ladung 1 bewegt sich relativ zu Teilchen 2 wie ein Teilchen der Masse  $\mu$ . Seine Bewegung wird durch Glg. 3 bestimmt.

# Herleitung des Rutherford'schen Streuquerschnittes

Die Bewegungsgleichung im Zentralfeld in Polarkoordinaten kann man leicht im Lagrangeformalismus finden. Die Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \left( \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U(r) \right) = L_{\text{CM}} + L_{\text{rel}}, \quad \text{wo} \quad M\ddot{R} = 0$$

muss in die Lagrangegleichung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

eingesetzt werden und ergibt mit  $L_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right) - U(r)$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \longrightarrow \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.}, \text{ Drehimpulserhaltung}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} \longrightarrow \mu \ddot{r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr} \longrightarrow \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r).$$

weil  $dU/dr = -F(r)$ . Drehimpulserhaltung besagt, dass  $r^2\dot{\theta} = h = \text{const.}$ , was uns erlaubt, die Zeitableitungen von  $r$  durch Ableitungen nach dem Winkel  $\theta$  zu ersetzen:

$$\frac{\dot{r}}{h} = \frac{\dot{r}}{r^2\dot{\theta}} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\theta} = -\frac{du}{d\theta}, \quad \text{wo } u = \frac{1}{r}.$$

Auch die zweite Ableitung von  $u$  nach  $\theta$  kann durch  $\ddot{r}$  ausgedrückt werden.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \frac{du}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta} \frac{dt \dot{r}}{dt h} = -\frac{1}{h} \frac{d}{d\theta} \frac{dt \dot{r}}{dt} = -\frac{1}{h} \frac{dt}{d\theta} \frac{d}{dt} \dot{r} = -\frac{\dot{r}}{h\dot{\theta}} = -\frac{\dot{r}}{h^2/r^2} = -\frac{\dot{r}}{h^2u^2},$$

wo wir im dritten Schritt die Erhaltung des Drehimpulses  $h$  ausgenützt haben. In der Variablen  $u$  lässt sich die Bewegungsgleichung anders ausdrücken,

$$F(r) = \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\mu \left( h^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} + h^2u^3 \right) = -\mu h^2u^2 \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right),$$

wo wir in der großen Klammer  $h = r^2\dot{\theta}$  ausgenutzt haben. Damit haben wir

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}u^2 = -\mu h^2u^2 \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right).$$

Nun ist ja  $h$  der Drehimpuls pro reduzierte Masse und der Drehimpuls ist konstant, also gilt auch  $h = v_0 b$ . Einsetzen liefert

$$\left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2 b^2} = -\kappa = \text{const.}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(\theta) = u_0 \cos(\theta - \theta_0) - \kappa, \quad (4)$$

wie man durch Einsetzen leicht verifiziert. Die Anfangsbedingungen mit  $\theta \rightarrow \pi$  legen die Integrationskonstanten  $u_0$  und  $\theta_0$  fest. Dort muss gelten

$$u = 0 \quad \text{und} \quad -v_0 = \dot{r} = -h \frac{du}{d\theta} \quad \text{also} \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{v_0}{h} = \frac{v_0}{v_0 b} = \frac{1}{b}.$$

Also gilt

$$u(\theta = \pi) = 0 = u_0 \cos(\pi - \theta_0) - \kappa \quad (5)$$

$$\frac{du}{d\theta}(\theta = \pi) = \frac{1}{b} = -u_0 \sin(\pi - \theta_0) \quad (6)$$

Wir dividieren Glg. 5 durch Glg. 6 und erhalten

$$\frac{\cos(\pi - \theta_0)}{\sin(\pi - \theta_0)} + \kappa b = 0$$
$$\frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = \frac{1}{b\kappa} \longrightarrow \theta_0 = \arctan\left(\frac{1}{b\kappa}\right). \quad (7)$$

$u_0$  findet man, indem man hier den  $\tan$  durch den  $\sin$  ausdrückt und in Glg. 6

einsetzt

$$\tan^2(\theta_0) = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 - \sin^2 \theta_0} = \frac{1}{(b\kappa)^2} \longrightarrow \sin^2 \theta_0 = \frac{1/(b\kappa)^2}{1 + 1/(b\kappa)^2},$$

$$u_0^2 \sin^2 \theta_0 = \frac{1}{b^2} \longrightarrow u_0^2 = \frac{1}{b^2} \frac{1}{\sin^2 \theta_0}$$

$$u_0^2 = \frac{1}{b^2} \frac{1 + 1/(b\kappa)^2}{1/(b\kappa)^2} \longrightarrow u_0 = \sqrt{\frac{1 + (b\kappa)^2}{b^2}}$$

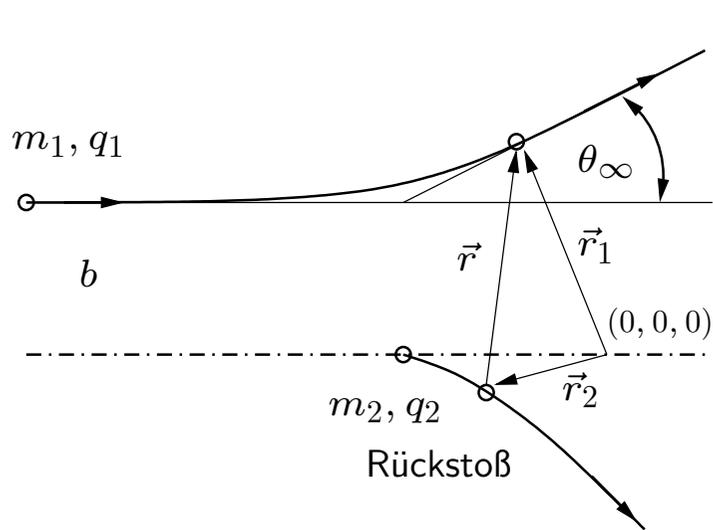
Damit ist die Lösung für die Bahn der geladenen Teilchen endlich gefunden,

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{1 + (b\kappa)^2}{b^2}} \cos \left( \theta - \arctan \left( \frac{1}{b\kappa} \right) \right) - \kappa.$$

Der Abstand  $r$  und Ablenkwinkel  $\theta$  im Schwerpunktsystem hängen also auf

eindeutige Art und Weise von einander ab.

## Der asymptotische Streuwinkel $\theta_\infty$

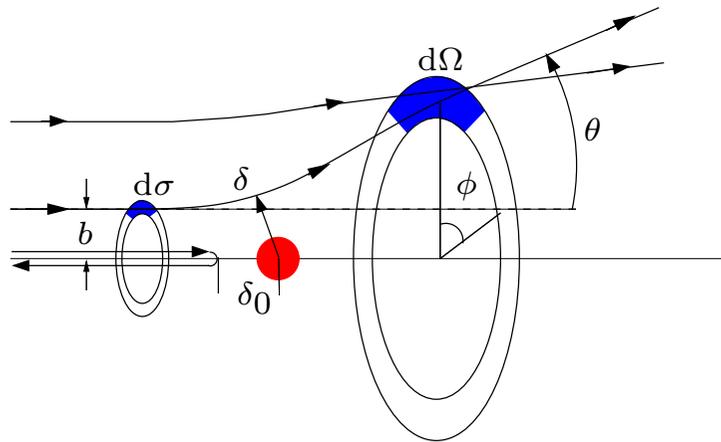


Den asymptotischen Ablenkwinkel  $\theta_\infty$  können wir nun einfach bestimmen. Eine Möglichkeit ist klar  $\theta_\infty = \pi$ , was mit der Anfangsbedingung übereinstimmt. Die andere Möglichkeit ist nach Glg. 4  $\theta_\infty = \pi + 2\theta_0$ , denn  $\cos(\pi + 2\theta_0 - \theta_0) = \cos(\pi + \theta_0) = \cos(\pi - \theta_0)$  und  $2\theta_0 + \pi = 2\theta_0 - \pi$  im Kreis. Wir setzen den Ausdruck von Glg. 7 für  $\theta_0$  in  $\theta_\infty = \pi + 2\theta_0$  ein, stellen nach  $\theta_\infty/2$  um und verwenden  $\tan(\pi/2 - \alpha) = 1/\tan(\alpha)$

$$\frac{\theta_\infty}{2} - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{1}{b\kappa}\right) \longrightarrow \tan\left(\frac{\theta_\infty}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{b\kappa}$$

$$\tan\left(\frac{\theta_\infty}{2}\right) = -b\kappa = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2 b} \quad (8)$$

# Der differentielle Wirkungsquerschnitt oder der Streuquerschnitt



Streut das Teilchen aus einem Stoßparameter im Intervall  $b, b + db$  wird es in einen Winkel im Intervall  $\theta, \theta + d\theta$  streuen. Passiert es eine infinitesimale Fläche  $d\sigma$ , so streut es in einen Raumwinkel  $d\Omega$ . Der Proportionalitätsfaktor  $d\sigma/d\Omega$  heißt **differentieller Streuquerschnitt**:

$$d\sigma = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega.$$

Aus der Abbildung entnehmen wir, dass

$$d\sigma = |b db d\phi| \quad \text{und} \quad d\Omega = |\sin \theta d\theta d\phi|.$$

Daraus können wir den differentiellen Streuquerschnitt berechnen,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \left( \frac{db}{d\theta} \right) \right|, \text{ wo } b = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \cot \left( \frac{\theta}{2} \right).$$

Mit  $\cot(x)' = -1/\sin^2(x)$  und  $\sin(\theta) = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$  haben wir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \frac{1}{2 \sin^2(\frac{\theta}{2})} \right|,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \frac{\cos(\frac{\theta}{2})/\sin(\frac{\theta}{2})}{2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})} \right) \left| \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \frac{1}{2 \sin^2(\frac{\theta}{2})} \right|,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \frac{1}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \right)^2, \text{ voilà, der Rutherford'sche Streuquerschnitt.}$$

## Der mittlere Streuwinkel

Der mittlere Streuwinkel für viele Teilchen derselben Geschwindigkeit  $v_0$  aber mit verschiedenen Stoßparametern  $b$  kann berechnet werden mit

$$\langle \theta^2(v_0) \rangle = \frac{\int \theta^2(v_0, b) d\sigma(b)}{\int d\sigma(b)}. \quad (9)$$

Dies sieht ganz einfach aus, ist es aber nicht. Wir bestimmen das quadratische Mittel, weil der normale Mittelwert verschwinden muss. Das eigentliche Problem liegt aber in den Integrationsgrenzen. Je größer der Stoßparameter, desto kleiner wird zwar der Streuwinkel, der differentielle Streuquerschnitt

$$d\sigma = 2\pi b db$$

wird aber auch größer. Fliegt ein Elektron an einem Proton außerhalb seiner Debye-Kugel vorbei, so wird es wegen der Abschirmung (fast) nichts vom Proton

merken. Es ist also sinnvoll, die Debye-Länge als obere Grenze zu nehmen. Als untere wird oft der Stoßparameter gewählt, durch den ein Teilchen gerade eine Ablenkung um 90 Grad erfährt (Glg. 8),

$$b_{\min} = b_{\frac{\pi}{2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2}, \quad \text{und} \quad b_{\max} = \lambda_D.$$

Das Verhältnis der beiden Größen ist

$$\Lambda = \frac{b_{\max}}{b_{\min}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \lambda_D \mu v_0^2}{q_1 q_2} \approx \frac{4\pi\epsilon_0 \lambda_D k_B T_e}{q_1 q_2} = \frac{\lambda_D 4\pi\epsilon_0 \lambda_D^2 n e^2}{q_1 q_2 \epsilon_0} = 4\pi n \lambda_D^3,$$

wo wir die Debye-Länge  $\lambda_D = ((\epsilon_0 k_B T)/n e^2)^{(1/2)}$  nach der Temperatur invertiert eingesetzt haben. In einem Plasma ist das Verhältnis  $b_{\max}/b_{\min}$  also sehr groß,  $\Lambda$  ist bis auf einen Faktor  $4\pi$  gleich dem Plasmaparameter  $\eta$ . In der

Näherung für kleine Streuwinkel haben wir nach Glg. 8

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{\theta}{2} \approx \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\right) \frac{1}{\mu v_0^2} \frac{1}{b}.$$

Einsetzen in die Mittelung oben (Glg. 9) und Auswerten der Integrale ergibt

$$\langle\theta^2(v_0)\rangle = \frac{8}{\mu^2 v_0^4} \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)}{(b_{\max}^2 - b_{\min}^2)} \approx \frac{4}{\pi} \left(\frac{b_{\min}}{b_{\max}}\right)^2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) = \frac{4 \ln \Lambda}{\pi \Lambda^2}$$

Der wesentliche Punkt hier ist, dass dies ein sehr kleiner Winkel ist! Schließlich soll der Plasmamparameter  $\eta \gg 1$  sein, weshalb  $\Lambda^2 = (4\pi)^2 \eta^2 \gg 1$  sicher erfüllt ist. Die Größe  $\ln \Lambda = \ln(b_{\max}/b_{\min})$  wird oft **Coulomb-Logarithmus** genannt.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Wer gut aufgepasst hat, wird gemerkt haben, dass sich da irgendwo ein verdächtiger Vorzeichenfehler herumbewegt. Um sachdienliche Hinweise wird gebeten!

## Effizienz für Streuung um $\pi/2$

Soeben haben wir gezeigt, dass der mittlere Streuwinkel klein ist, und man muss sich nun fragen, ob eine Streuung um  $\pi/2$  effizienter durch ein einzelnes Streuereignis um  $\pi/2$  oder durch viele kleine Streuungen um  $\Delta\theta$  erfolgt. Mit

$$b_{\min} = b_{\frac{\pi}{2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2}, \quad \text{und} \quad b_{\max} = \lambda_D$$

kann dies leicht abgeschätzt werden. Der Ablenkwinkel für eine kleine Ablenkung mit Stoßparameter  $b$  ist nach Glg. 8

$$\Delta\theta = \frac{2q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2 b}.$$

Bewegt sich das Teilchen durch ein Plasma mit  $n$  Streuzentren pro Kubikmeter,

ist seine mittlere quadratische Ablenkung

$$\langle (\Delta\theta)^2 \rangle = \int_{\Delta\theta_{\min}}^{\Delta\theta_{\max}} (\Delta\theta)^2 F(\Delta\theta) d(\Delta\theta), \quad (10)$$

wo  $F(\Delta\theta)d(\Delta\theta)$  die Anzahl Stöße ist, die eine Winkeländerung in  $[\Delta\theta, \Delta\theta + d(\Delta\theta)]$  bewirkt. Die dazugehörigen Stoßparameter sind oben angegeben und die zurückgelegte Strecke  $L$  finden wir durch

$$F(\Delta\theta)d(\Delta\theta) = nL2\pi bdb$$

weil dies ja die Anzahl Streuzentren in einem Schlauch der Länge  $L$ , mit Radius  $b$  und Dicke  $db$  um die Flugrichtung ist. Damit kann der sonst schwer zu bestimmende Ausdruck  $F(\Delta\theta)d(\Delta\theta)$  in Glg. 10 ersetzt und das Integral nun

bestimmt werden

$$\langle (\Delta\theta)^2 \rangle = nL2\pi \left( \frac{2q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \right)^2 \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = 2\pi nL \left( \frac{2q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \right)^2 \ln(\Lambda). \quad (11)$$

Wir können nun abschätzen, wie weit ein Teilchen fliegen muss, um durch viele kleine Ablenkungen um  $\pi/2$  abgelenkt werden, indem wir  $\langle (\Delta\theta)^2 \rangle = 1$  setzen<sup>2</sup> und nach  $L$  auflösen,

$$L_{\pi/2} = \frac{1}{2\pi n \ln \Lambda} \left( \frac{4\pi\epsilon_0}{2q_1q_2} \mu v_0^2 \right)^2.$$

---

<sup>2</sup>Ja, das ist die Konvention

Der Streuquerschnitt für Streuung um  $\pi/2$  durch mehrere Streuungen ist also

$$\sigma'_{\pi/2} = \frac{1}{nL_{\pi/2}} = 2\pi \ln \Lambda \left( \frac{2q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \right)^2,$$

was mit dem von Seite 18 bekannten Resultat für  $\sigma_{\pi/2}$  verglichen werden muss:

$$\frac{\sigma'_{\pi/2}}{\sigma_{\pi/2}} = \frac{2\pi \ln \Lambda \left( \frac{2q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \right)^2}{\pi \left( \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \right)^2} = 8 \ln \Lambda,$$

was eine große Zahl ist weil  $\ln \Lambda$  für normale Plasmen typisch zwischen 20 und 30 liegt.

Damit ist nun klar, dass Streuung um große Winkel effizient nur durch viele kleine Streuungen erfolgen kann.

## Stoßfrequenz im Plasma

Stöße im Plasma werden durch die Coulombkraft vermittelt. Wir haben soeben gesehen, dass für dieses Potential kleine Streuwinkel viel häufiger sein müssen, als große. Erschwerend kommt bei Plasmen dazu, dass das Coulombpotential einer Einzelladung ja durch eine Debye-Kugel abgeschirmt wird. Man könnte jetzt meinen, dass man also für den Wirkungsquerschnitt einfach  $\pi$  mal das Quadrat der Debye-Länge nehmen darf. Dies funktioniert aber nicht, weil die Debye-Kugel für Teilchen mit genügend hoher Energie zunehmend ineffektiv wird.

Wir haben bereits gezeigt, dass der Stoßparameter für eine Ablenkung um 90 Grad gerade

$$b_{\frac{\pi}{2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \quad \text{und der Wirkungsquerschnitt} \quad \sigma_{\frac{\pi}{2}} = \pi \left( \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu v_0^2} \right)^2$$

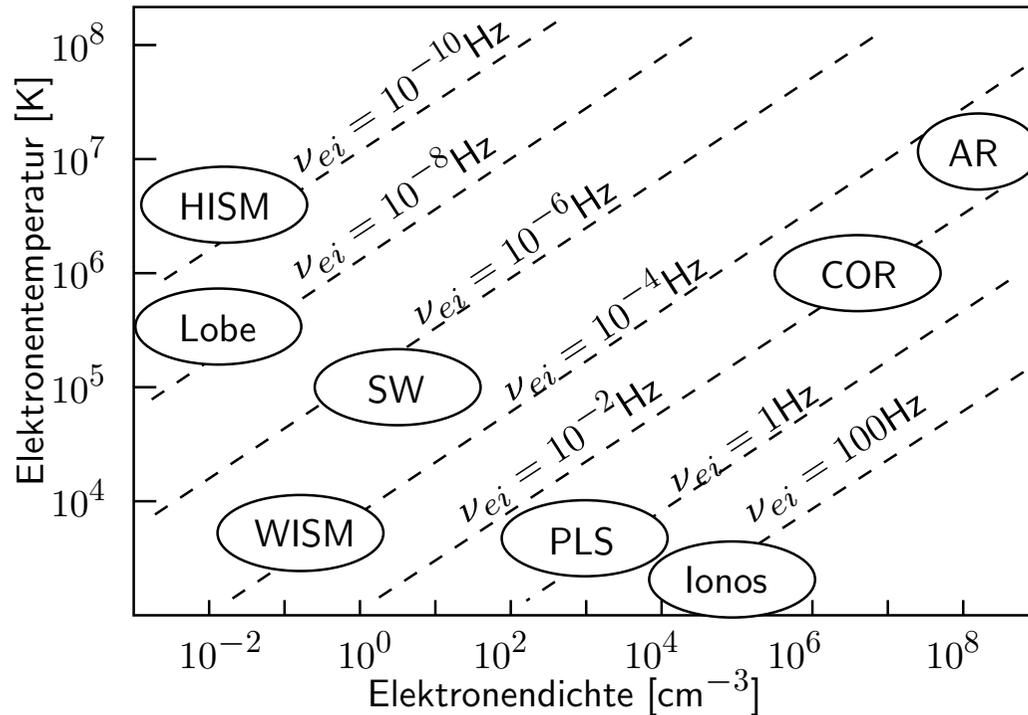
ist. Doch was ist in einem Plasma die Geschwindigkeit  $v_0$ ? Ein Elektron hat auf seinem Weg ja schon manchen Stoß erlebt. Diese Stöße bringen das Elektrogas schnell ins thermodynamische Gleichgewicht, deshalb setzt man hier die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen ein,  $v_0 = \langle v_e \rangle$ . Damit wird die Stoßfrequenz im Plasma

$$\nu_{ei} = n_e \sigma_{\frac{\pi}{2}} \langle v_e \rangle \approx \frac{n_e e^4}{16\pi \epsilon_0^2 m_e^2 \langle v_e \rangle^3} \quad \text{weil } \mu \approx m_e.$$

Mit  $k_B T_e = \frac{1}{2} m_e \langle v_e \rangle^2$  sehen wir, dass die Stoßfrequenz invers proportional zur Temperatur hoch  $3/2$  und wie erwartet proportional zur Dichte des Plasmas ist.

$$\nu_{ei} \approx \frac{\sqrt{2} e^4}{64\pi \epsilon_0^2 \sqrt{m_e}} \cdot n_e \cdot \left( \frac{1}{k_B T_e} \right)^{3/2}.$$

## Stoßfrequenz in Plasmen



Die Stoßfrequenzen in einigen Plasmen sind hier aufgetragen. Man beachte die absoluten Zahlenwerte! Im heißen ISM betragen die Stoßzeiten tausende von Jahren. Ein Elektron trifft also nur alle tausend Jahre ein Proton nahe genug, um um einen Winkel von 90 Grad abgelenkt zu werden. Selbst im vergleichsweise dichten Sonnenwind beträgt die durchschnittliche Zeit zwischen zwei Stößen mehr als ein Tag, bzw. etwa

die Zeit, die ein Sonnenwindelektron braucht, um bis zur Erde zu gelangen. Das macht den Sonnenwind für kinetische Studien besonders interessant.

## Stoßfrei vs. stoßdominiert

Wie entscheidet man denn nun, ob ein Plasma stoßdominiert oder stoßfrei ist? Dazu muss man etwas genauere Abschätzungen und Rechnungen durchführen, die wir hier sein lassen. Es stellt sich heraus, dass man durch Berücksichtigung der kleinen Streuwinkel und der Verteilung der thermischen Geschwindigkeiten der Elektronen im Plasma die Stoßfrequenz schreiben kann als (siehe B&T)

$$\nu_{ei} \approx \frac{\omega_{pe}}{64\pi} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda},$$

woraus wir ein Kriterium für die oben angesprochene Unterscheidung haben. Ist

$$\frac{\nu_{ei}}{\omega_{pe}} > 1 \Rightarrow \text{stoßdominiert}; \quad \frac{\nu_{ei}}{\omega_{pe}} \ll 1 \Rightarrow \text{'stoßfrei'}.$$

Extraterrestrische Plasmen sind in der Regel sehr 'dünn' und heiß, sie sind immer stoßfrei (bzw. schwach gekoppelt). Ein stoßdominiertes Plasma muss sehr dicht und kalt sein, wie z. B. Plasmen, die kurzzeitig durch Laserablation entstehen. Die Stoßfrequenz geht (bis auf eine schwache Abhängigkeit im Coulomb-Logarithmus) linear mit der Dichte und invers proportional zu  $T_e$  hoch  $3/2$ .

$$\nu_{ei} \propto n_e T^{-3/2}$$

Man nennt solche dichten, kalten Plasmen auch stark gekoppelt. Es befinden sich nur wenige Teilchen innerhalb einer Debye-Kugel. Wir werden solche stoßdominierten oder stark gekoppelten Plasmen in dieser Vorlesung nicht behandeln, sondern uns auf (nahezu) stoßfreie und schwach gekoppelte Plasmen beschränken<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>B&T: Baumjohann und Treumann, "Basic Space Plasma Physics", Imperial College Press, 1997

## Mittlere freie Weglänge

Formal ist die mittlere freie Weglänge in einem Plasma genau gleich definiert, wie in einem neutralen Gas

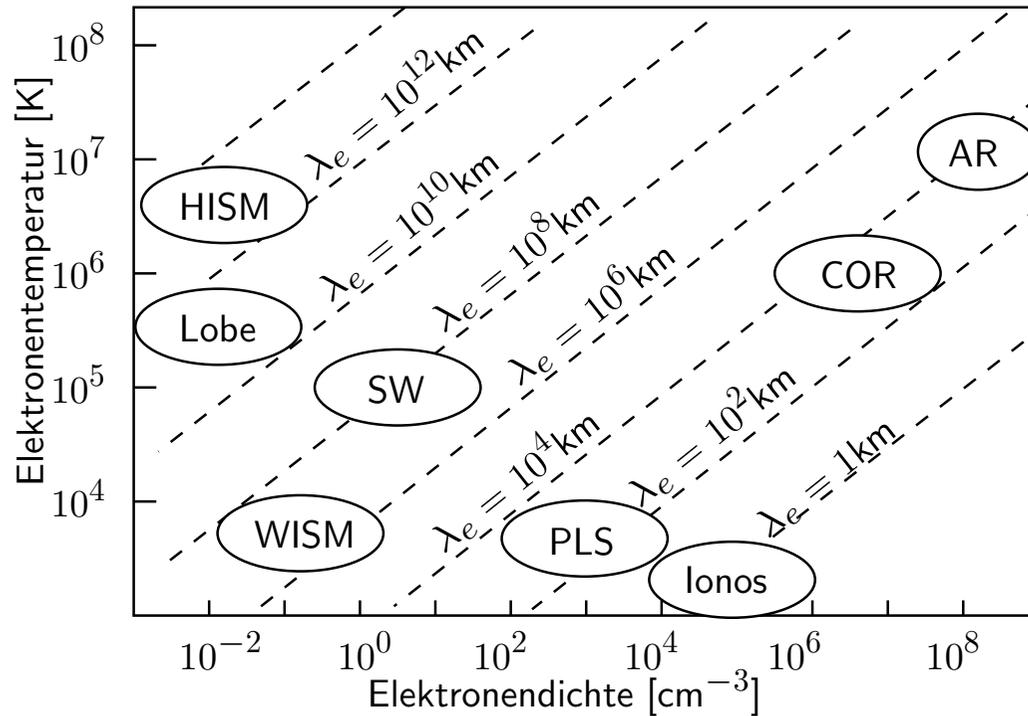
$$\lambda_e = \frac{\langle v_e \rangle}{\nu_{ei}} = \frac{64\pi\epsilon_0^2}{n_e e^4} (k_B T_e)^2.$$

Dies zeigt den Einfluss der Temperatur. Ein Elektron hat in einem kühlen Plasma eine kleine mittlere freie Weglänge, in einem heißen aber eine lange. Man kann die mittlere freie Weglänge auch über die Debyelänge  $\lambda_D$  ausdrücken,

$$\lambda_e \approx 64\pi\lambda_D \frac{\Lambda}{\ln \Lambda},$$

die mittlere freie Weglänge ist also viel größer als eine Debye-Länge.

## Mittlere freie Weglänge II



Die Abbildung links zeigt typische mittlere freie Weglängen. Für den Sonnenwind beträgt sie, nicht unerwartet, etwa eine astronomische Einheit. In der Ionosphäre etwa einen Kilometer. Vergleichen Sie dies mit der mittleren freien Weglänge eines Stickstoffmoleküls in Luft bei Standardbedingungen!

## Leitfähigkeit im Plasma

Sobald in einem Plasma Stöße auftreten, muss die Bewegungsgleichung für die Plasmateilchen um einen Reibungsterm ergänzt werden. Dieser muss proportional sein zur Differenz der Geschwindigkeit des zu untersuchenden Teilchens,  $\vec{v}$ , und der des Plasmas,  $\vec{u}$ , wie auch zur Stoßfrequenz  $\nu$ .

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) - m\nu (\vec{v} - \vec{u}) \quad (12)$$

In einem stationären, unmagnetisierten Plasma ( $\vec{B} = 0$ ), in dem sich alle Elektronen mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_e = \vec{v} - \vec{u}$  bewegen und sich die restlichen Stoßpartner in Ruhe befinden erhalten wir als Bewegungsgleichung

$$\vec{E} = -\frac{m_e \nu}{e} \vec{v}_e, \quad \text{und damit} \quad \vec{v}_e = -\frac{e}{m_e \nu} \vec{E}.$$

Weil sich die Elektronen relativ zu den Ionen oder Neutralgasatomen bewegen, führen sie auch einen Strom

$$\vec{j} = -en_e\vec{v}_e.$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben das Ohmsche Gesetz

$$\vec{E} = \frac{m_e\nu}{n_e e^2} \vec{j} = \eta \vec{j}, \quad \text{wo} \quad \eta = \frac{m_e\nu}{n_e e^2} \quad (13)$$

der Plasmawiderstand ist. Ist das Plasma vollständig ionisiert, so können wir für die Stoßfrequenz den Ausdruck für die Coulomb-Stöße verwenden, den wir soeben kennengelernt haben.

$$\text{Mit } \nu_{ei} \approx \frac{\omega_{pe}}{64\pi} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \text{ erhalten wir } \eta_S = \frac{1}{64\pi\epsilon_0\omega_{pe}} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \quad (14)$$

als Ausdruck für den **Spitzer-Widerstand**  $\eta_S$  des Plasmas. Dieser ist von der Plasmadichte nahezu unabhängig weil sich die Abhängigkeiten in Plasmafrequenz

und  $\Lambda$  gerade aufheben. Nur im Coulomblogarithmus bleibt eine sehr schwache Abhängigkeit übrig. Versuche ich die Leitfähigkeit eines Plasmas durch Zugabe von Ladungsträgern zu erhöhen, so steigt auch die Stoßfrequenz, was die Geschwindigkeit der Ladungsträger verringert und damit auch den Strom (oder die Leitfähigkeit). Die einzige Möglichkeit den Spitzer-Widerstand zu beeinflussen, ist deshalb, die Temperatur des Plasmas zu verändern, denn

$$\eta \propto T_e^{3/2}.$$

## Leitfähigkeit in magnetisierten Plasmen

In einem magnetisierten Plasma muss der Einfluss des Magnetfeldes berücksichtigt werden. Dieses kann zu neuen Phänomenen führen, wie wir noch sehen werden. Bewegt sich das Plasma mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  gegenüber einem Magnetfeld, so müssen wir das sich aus der Lorentzkraft ergebende elektrische Feld  $\vec{v} \times \vec{B}$  zum Ohmschen Gesetz addieren. Wir erhalten

$$\vec{j} = \sigma_0 \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (15)$$

wo wir den Widerstand durch sein Inverses, die Plasma-Leitfähigkeit, ersetzt haben,

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu}. \quad (16)$$

Glg. 15 ist eine einfache Version des Ohmschen Gesetzes, welches in allen vollständig ionisierten geophysikalischen Plasmen gültig ist. In diesen Plasmen

sind Stöße sehr selten und deshalb kann die Plasmaleitfähigkeit als fast unendlich betrachtet werden. Die Leitfähigkeit könnte als Skalar behandelt werden, wäre da nicht die magnetfeldbedingte Anisotropie. Dies zeigt sich besonders schön in der niedrigen Ionosphäre, wo Stöße zwischen dem ionisierten und neutralen Gas eine wichtige Rolle spielen. Die Kombination mit dem irdischen Magnetfeld führt, wie wir bald sehen werden, zu einem stark anisotropen Leitfähigkeitstensor.

In einem stationären Plasma mögen sich die Elektronen wieder mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_e$  bewegen und die Stoßpartner sollen in Ruhe sein. Dann folgt aus der Bewegungsgleichung (Glg. 12)

$$\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B} = -\frac{m_e \nu}{e} \vec{v}_e.$$

Der Strom ist immer noch gegeben durch  $\vec{j} = -en_e \vec{v}_e$ , was uns erlaubt, die Geschwindigkeit durch den Strom auszudrücken. Wir können die obige Gleichung

nun umschreiben in

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} - \frac{\sigma_0}{n_e e} \vec{j} \times \vec{B}, \quad (17)$$

wo wir den Ausdruck 16 für die Leitfähigkeit verwendet haben.

Wir definieren nun unser Bezugssystem so, dass die  $z$ -Achse mit der Richtung des Magnetfeldes  $\vec{B}$  zusammenfällt,  $\vec{B} = B \hat{z}$ . Wir betrachten vorerst nur die  $x$ -Komponente der Glg. 17.

$$j_x = \sigma_0 E_x - \frac{\sigma_0}{n_e e} (\vec{j} \times \vec{B})_x = \sigma_0 E_x - \frac{q_e}{m_e \nu} (j_y B_z - j_z B_y).$$

Weil  $B_y = 0$  in unserem Koordinatensystem und mit  $\omega_{ge} = q_e B / m_e$  erhalten wir für die  $x$ -Komponente von Glg. 17

$$j_x = \sigma_0 E_x + \frac{\omega_{ge}}{\nu} j_y.$$

Wie man sich nun leicht überzeugt, lautet das Gleichungssystem von Glg. 17 deshalb

$$\begin{aligned}j_x &= \sigma_0 E_x + \frac{\omega_{ge}}{\nu} j_y, \\j_y &= \sigma_0 E_y - \frac{\omega_{ge}}{\nu} j_x, \\j_z &= \sigma_0 E_z,\end{aligned}\tag{18}$$

wo die Elektronenzyklotronfrequenz  $\omega_{ge}$  das Ladungsvorzeichen mit beinhaltet.

Wir eliminieren  $j_y$  aus der ersten und  $j_x$  aus der zweiten Gleichung und erhalten

$$\begin{aligned}j_x &= \frac{\nu^2}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_x + \frac{\omega_{ge} \nu}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_y, \\j_y &= \frac{\nu^2}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_y - \frac{\omega_{ge} \nu}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_x, \\j_z &= \sigma_0 E_z.\end{aligned}\tag{19}$$

Wir können nun im hier benutzten Koordinatensystem den Leitfähigkeitstensor ablesen:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}, \quad \text{wo } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_P & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_P & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{||} \end{pmatrix}\tag{20}$$

mit den Komponenten

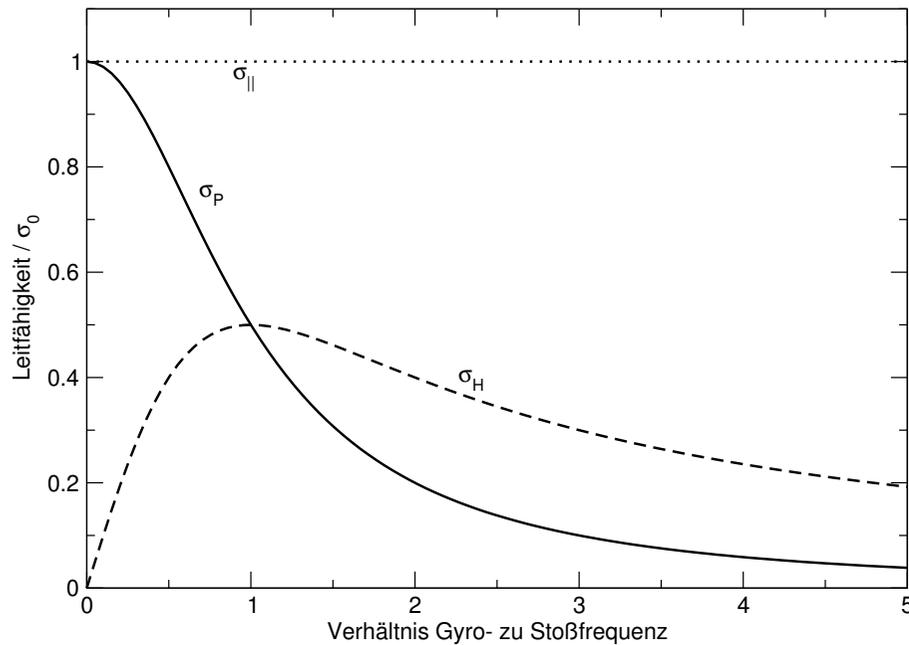
$$\begin{aligned}\sigma_P &= \frac{\nu^2}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0, \\ \sigma_H &= -\frac{\omega_{ge}\nu}{\nu^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0, \\ \sigma_{||} &= \sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu}.\end{aligned}\tag{21}$$

## Pedersen- und Hall- Leitfähigkeiten

Das Tensorelement  $\sigma_P$  ist die sog. **Pedersen-Leitfähigkeit** und bestimmt den Pedersen-Strom, der in die Richtung des elektrischen Feldes  $\vec{E}_\perp$  fließt, welches transversal zum Magnetfeld steht. Die **Hall-Leitfähigkeit**  $\sigma_H$  bestimmt den Hall-Strom in die Richtung senkrecht zum Magnetfeld und elektrischen Feld, nämlich in  $-\vec{E} \times \vec{B}$ -Richtung. Das Element  $\sigma_{||}$  ist die parallele Leitfähigkeit und bestimmt den Strom entlang des magnetischen Feldes. Im unmagnetisierten Fall entspricht  $\sigma_{||}$  der Plasma-Leitfähigkeit.

Kann man das Koordinatensystem nicht so legen, wie wir es jetzt der Einfachheit halber getan haben, so kann Glg. 20 trotzdem in parallele und senkrechte Anteile umgeschrieben werden indem man das Kreuzprodukt von Glg. 17 mit  $\vec{B}$  bestimmt und das Resultat zur Eliminierung von  $\vec{j} \times \vec{B}$  in Glg. 17 verwendet,

$$\vec{j} = \sigma_{||}\vec{E}_{||} + \sigma_P\vec{E}_\perp - \sigma_H \left( \vec{E}_\perp \times \vec{B} \right) / B. \quad (22)$$



Die parallele Leitfähigkeit ist unabhängig von der Gyrofrequenz, während die Pedersen- und Hall-Leitfähigkeiten eine andere Abhängigkeit aufweisen. Schreiben wir sie so um, dass in ihnen nur noch das Verhältnis von Gyro- zu Stoßfrequenz vorkommt, so finden wir das links gezeigte Verhalten. Ist das Plasma stoßdominiert ( $\omega/\nu < 1$ ), so überwiegt die Pedersen-Leitfähigkeit. In diesem Fall stößt ein Plasmateilchen statistisch

bevor es eine Gyration durchführen konnte. Die Hall-Leitfähigkeit beginnt zu überwiegen, wenn ein Teilchen mindestens eine Gyration durchführen kann, bevor es wieder einen Stoß erlebt. Die parallele Leitfähigkeit überwiegt immer.